無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察

海　生　直　人

（受付　2014 年 4 月 21 日）

あ　ら　ま　し

本稿では離散形分布ブロック取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した拡張保全モデルを議論する。評価関数としては定常状態における単位時間当りの期待費用を採用し，それを最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。無償保証期間を製品に考えることは期待費用を減少させるだけでなく，最適予防保全周期を無償保証期間に近づける傾向を生じさせる。

キーワード　無償保証期間，離散形分布，ブロック取換え政策，定常状態における単位時間当りの期待費用，最適政策

1.　は　じ　め　に

本稿では離散形分布を仮定することによって基本的な保全政策の 1 つであるブロック取換え政策について議論する。ブロック取換えモデルとは以下のものである（Barlow and Proschan［1，p. 95］参照）。最も基本的なモデルは 1 ユニットシステムに対するものである。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ，かつある前もって定められた時刻において新しい同じユニットと交換される。ユニットの交換から次のユニットの交換までの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。

本稿では製品（ユニット）の無償保証期間［2, 3］を考慮した離散形分布ブロック取換え政策を議論する。最初に基本的な離散形分布ブロック取換え政策を既存の結果よりまとめる［4］。次に無償保証期間を付加して離散形分布ブロック取換え政策を議論する。無償保証期間と予防保全周期の大小関係においてそれぞれの状況下での政策を考察し，総合的な離散形分布ブロック取換え政策を議論する。最後に基本的な離散形分布ブロック取換え政策との比較を行う。評価関数としては定常状態における単位時間当りの期待費用を適用し，その期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。

以下の諸量を導入する。

1）　C_d　1 回当りの製品（ユニット）故障に対するダウンタイム費用

C_r　1回当りの製品（ユニット）購入に対する購入費用

2）　w　無償保証期間，すなわち［0, w］における故障に対しては無償でユニットが供給される。但し，ダウンタイム費用 C_d は発生する。

N　ブロック取換え政策における予防保全周期。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ（事後保全），かつある前もって定められた時刻 N において新しい同じユニットと交換される（予防保全）。

3）　$f(d)$　製品（ユニット）の寿命時間の確率関数（$d = 0, 1, 2, ... ; f(0) = 0$）

$F(d)$　同累積分布関数

$m(d)$　同再生確率関数（$m(0) = 0$）

$M(d)$　同再生関数（$M(0) = 0$）

$1 / \lambda$　製品の期待寿命時間

4）　$SC_i(N) i = 0, 1, 2$　定常状態における単位時間当りの期待費用

$i = 0$：$w = 0$ のとき

$i = 1$：$0 < w \le N$ のとき

$i = 2$：$0 < N \le w$ のとき

2.　離散形分布ブロック取換え政策

最初に無償保証期間を伴わない，すなわち $w = 0$ の場合の基本的な離散形分布ブロック取換え政策を既存の結果よりまとめる［4］。

モデルは以下のものである。ユニットは故障時点において費用 $C_d + C_r$ を伴って新しい同じユニットと取換えられ（事後保全），かつある前もって定められた時刻 N において費用 C_r を伴って新しい同じユニットと交換される（予防保全）。ユニットの交換（予防保全）から次のユニットの交換（予防保全）までの期間を1サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_0(N) = \frac{(C_d + C_r)M(N) + C_r}{N} \tag{2.1}$$

となる。以下の式を定義する。

$$H(N) = Nm(N+1) - M(N). \tag{2.2}$$

そのとき，期待費用 $SC_0(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_0^* に対して以下の定理を得る。

［**定理2.1**］

（1）　$m(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

（i）　もし $H(\infty) > C_r / (C_d + C_r)$ ならば，そのとき

$$H(N_0^* - 1) < C_r / (C_d + C_r) \text{ かつ } H(N_0^*) \geq C_r / (C_d + C_r) \tag{2.3}$$

を満足する，期待費用 $SC_0(N)$ を最小にする有限でただ 1 つの最適予防保全周期 N_0^* $(0 < N_0^* < \infty)$ が存在し，期待費用に関して以下の関係が成立する。

$$(C_d + C_r)m(N_0^*) < SC_0(N_0^*) \leq (C_d + C_r)\, m(N_0^* + 1). \tag{2.4}$$

（ii）　もし $H(\infty) \leq C_r / (C_d + C_r)$ ならば，そのとき最適予防保全周期は $N_0^* \to \infty$ となる。すなわち予防保全は行わず事後保全のみを行う。そのときの期待費用は

$$SC_0(\infty) = (C_d + C_r)\lambda \tag{2.5}$$

となる。
（2）　$m(n)$ が単調減少であるとき（$n \geq 0$）最適予防保全周期は $N_0^* \to \infty$ となる。□

3.　無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策

前節では無償保証期間を伴わない（$w = 0$）基本的離散形分布ブロック取換え政策を取扱ったが，本節では無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策を取扱う。無償保証期間内での製品（ユニット）の故障に対する取換えに関しては購入費用 C_r は免除され，ダウンタイム費用 C_d のみが発生する。以下においては無償保証期間 w と予防保全周期 N の大小関係においてそれぞれの状況下での最適離散形分布ブロック取換え政策を考察し，その結果に基づき総合的な離散形分布ブロック取換え政策を議論する。

3.1　無償保証期間が予防保全周期以下の場合

$0 < w \leq N$ の場合を取扱う。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_1(N) = \frac{(C_d + C_r)M(N) + C_r - C_r M(w)}{N} \tag{3.1}$$

となる。このとき期待費用 $SC_1(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_1^* に対して以下の補題を得る。

［補題3.1］

$0 < w \leq N$ において以下が成立する。

（1）　$m(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \geq 0$）次のことが成立する。

（i） もし $H(\infty) \le (C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r)$ ならば，そのとき期待費用 $SC_1(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_1^* は $N_1^* \to \infty$ となる。そのときの期待費用は

$$SC_1(\infty) = (C_d + C_r)\lambda \tag{3.2}$$

となる。

（ii） もし $H(w) < (C_r - C_r M(w))/(C_d + C_r) < H(\infty)$ ならば，そのとき

$$H(N_1^* - 1) < (C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r) \text{ かつ } H(N_1^*) \ge (C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r) \tag{3.3}$$

を満足する有限でただ 1 つの最適予防保全周期 N_1^* ($w < N_1^* < \infty$) が存在し，期待費用に関して以下の関係が成立する。

$$(C_d + C_r) m(N_1^*) < SC_1(N_1^*) \le (C_d + C_r) m(N_1^* + 1). \tag{3.4}$$

（iii） もし $H(w) \ge (C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r)$ ならば，そのとき最適予防保全周期は $N_1^* = w$ となる。そのときの期待費用は

$$SC_1(N_1^*) = SC_1(w) = \frac{C_d M(w) + C_r}{w} \tag{3.5}$$

となる。

（2） $m(n)$ が単調減少であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

（i） もし

$$SC_1(w) \ge SC_1(\infty), \tag{3.6}$$

すなわち

$$C_d M(w) + C_r \ge w(C_d + C_r)\lambda \tag{3.7}$$

ならば，$N_1^* \to \infty$ となる。

（ii） もし

$$SC_1(w) < SC_1(\infty), \tag{3.8}$$

すなわち

$$C_d M(w) + C_r < w(C_d + C_r)\lambda \tag{3.9}$$

ならば，$N_1^* = w$ となる。□

3.2　無償保証期間が予防保全周期以上の場合

$0 < N \le w$ の場合を取扱う。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_2(N) = \frac{C_d M(N) + C_r}{N} \tag{3.10}$$

となる。このとき期待費用 $SC_2(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_2^* に対して以下の補題を得る。

[補題3.2]

$0 < N \le w$ において以下が成立する。

（1）　$m(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

（i）　もし $H(w) \le C_r / C_d$ ならば，そのとき期待費用 $SC_2(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_2^* は $N_2^* = w$ となる。そのときの期待費用は

$$SC_2(N_2^*) = SC_2(w) = \frac{C_d M(w) + C_r}{w} \tag{3.11}$$

となる。

（ii）　もし $H(w) > C_r / C_d$ ならば，そのとき

$$H(N_2^* - 1) < C_r / C_d \text{ かつ } H(N_2^*) \ge C_r / C_d \tag{3.12}$$

を満足する有限でただ 1 つの最適予防保全周期 N_2^*（$0 < N_2^* \le w$）が存在し，期待費用に関して以下の関係が成立する。

$$C_d m(N_2^*) < SC_2(N_2^*) \le C_d m(N_2^* + 1). \tag{3.13}$$

（2）　$m(n)$ が単調減少であるとき（$n \ge 0$）最適予防保全周期は $N_2^* = w$ となる。□

3.3　大域的最適予防保全周期

前もって無償保証期間と予防保全周期の大小関係を知ることはできない。本節では補題3.1および3.2から大域的最適予防保全周期 N_w^* についてまとめる。

[定理3.3]

無償保証期間を w としたとき以下が成立する。

（1）　$m(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

（i）　もし $H(w) < (C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r)$ ならば，$N_w^* = N_1^* > w$ となる。

（ii）　もし $(C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r) \le H(w) \le C_r/C_d$ ならば，$N_w^* = w$ となる。

（iii）　もし $H(w) > C_r / C_d$ ならば，$N_w^* = N_2^*\,(0 < N_2^* \le w)$ となる。

（2）　$m(n)$ が単調減少であるとき（$n \geq 0$）次のことが成立する。

（i）　もし

$$SC_1(w) = SC_2(w) = \frac{C_d M(w) + C_r}{w} \geq SC_1(\infty), \tag{3.14}$$

すなわち

$$C_d M(w) + C_r \geq w(C_d + C_r)\lambda \tag{3.15}$$

ならば，$N_w^* = N_1^* \to \infty$ となる。

（ii）　もし

$$SC_1(w) = SC_2(w) = \frac{C_d M(w) + C_r}{w} < SC_1(\infty), \tag{3.16}$$

すなわち

$$C_d M(w) + C_r < w(C_d + C_r)\lambda \tag{3.17}$$

ならば，$N_w^* = N_1^* = w$ となる。□

3.4　考　　察

無償保証期間を製品に付与することは定常状態における単位時間当りの期待費用を減少させるだけでなく，最適予防保全周期を無償保証期間に近づける傾向を生じさせる。換言すれば，N_0^* が w より大きいときには無償保証は最適予防保全周期を短くし w に近づける傾向がある。逆に N_0^* が w より小さいときには無償保証は最適予防保全周期を長くし w に近づける傾向がある。

4.　む　す　び

本稿では離散形分布ブロック取換えモデルに製品の故障に対する無償保証期間を考慮した拡張保全モデルを議論した。評価関数として定常状態における単位時間当りの期待費用を採用し，それを最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求めた。無償保証期間を考慮することは期待費用を減少させるだけでなく，最適予防保全周期を無償保証期間に近づける傾向を生じさせる。ここで取扱ったモデルは大修理の概念によるものであるが，小修理を採用したモデルに関しては不完全ではあるが Chien et al.［5］を参照するとよい。

文 献

[1] R. E. Barlow and F. Proschan, "Mathematical Theory of Reliability," John Wiley, New York, 1965.
[2] W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, "Warranty Cost Analysis," Marcel Dekker, New York, 1994.
[3] W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, "Product Warranty Handbook," Marcel Dekker, New York, 1996.
[4] T. Nakagawa, "A Summary of Discrete Replacement Policies," *European Journal of Operational Research*, **17**, 1984, pp. 382–392.
[5] Y.-H. Chien and F.-M. Chang, "Optimal Discrete–Time Periodic Replacement Policy for Repairable Products under Free Repair Warranty," in *Advanced Reliability Modeling IV Beyond the Traditional Reliability and Maintainability Approaches*, pp. 129–136, edited by S. Chukova, J. Haywood and T. Dohi, McGraw–Hill, Taiwan, 2010.

Abstract

A Note on Discrete Block Replacement Policy Taking Account of Free Warranty Interval

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the extended discrete block replacement model, taking account of free warranty interval. We adopt the expected cost per unit time in the steady state as a criterion of optimality and obtain the optimal discrete block replacement policy minimizing that expected cost. When we apply the free warranty interval, the expected cost decreases and furthermore we have the tendency that the optimal preventive maintenance period goes closer to the free warranty interval.

Keywords: Free warranty interval, Discrete distribution, Block replacement policy, Expected cost per unit time in the steady state, Optimal policy