区分的費用関数をもつ動的在庫モデル（Ⅱ）

児　玉　正　憲

（受付　1998 年 4 月 30 日）

目　　　　次

6.　応用例

本節では，これまでの数学モデルの具体例をいくつか示し，さらに発展の可能性をさぐる。

応用例 1

モデルの前提条件と記号

(i)　発注経費を考慮しない，一般的需要型をもつ過剰需要が次期の需要とみなされる多期間購入・販売在庫モデルを取り扱う。

(ii)　各期の初めに発注が行われ，ただちに入荷する（単価 c_1，各期の長さは t）。x を初期在庫量とし，z を発注後の手持の在庫量とする。

(iii)　h と p を 1 期単位当たりの在庫および品切費用とする（$c_1 < p$）。

(iv)　各期の需要量 B は非負の確率変数で，分布関数及び密度関数を $\Phi(b)$，$\phi(b)$ とする。$\Phi(b)$ と $\phi(b)$ は各期とも不変で，各期の需要量は互いに独立とする。B の期待値 m は有限とする。

(v)　需要の発生は一般的関数に従うものとする。つまり，需要量 B の実現値 b が与えられたとき，期における需要の発生は $bg(T/t)$ $(0 \leqq T \leqq t)$ に従うものとする。ここに $g(y)$ は $g(0) = 0, g(1) = 1$ となる $dg(y)/dy > 0$ となる関数 $(0 \leqq y \leqq 1)$。時点 T における在庫量を $Q(T)$ とすると

$$Q(T) = z - g\left(\frac{T}{t}\right)b, \quad 0 \leqq T \leqq t \tag{65}$$

である。$s = g\,(T/t)\,b$ をみたす T/t は $b \geqq s$ のとき，唯一存在しこれを $T/t = g^{-1}(s/b)$ で表わす。このとき，$T = tg^{-1}(s/b)$（$g\,(u) = v$ をみたす u を $u = g^{-1}(v)$ で表わす）

また，

α：割引率 $(0 < \alpha < 1)$

$f_n(x)$：初期在庫量を x としたとき，n 期間にわたる期待割引最小費用とする。

ここでの目的は $g\,(y)$ を需要形態を表わす統一モデルとして使用し（例えば，$g\,(y) = y$ のとき，一様需要，$g\,(y) = y^2$ のとき，上に凸需要，$g\,(y) = \sqrt{y}$ のとき下に凸需要，$g\,(y) = y^{1/n}, \ldots,$ $n = 1/2, 1/3\ldots$ のとき，E. Naddor[12) の需要形態である），そのときの最適条件を求め，最適購入政策を考察することにある。

在庫量が連続的であるから在庫状態の代表例は図 6.1 のようになり，需要量が b，期首在庫量が z のときの 1 期間の平均在庫量 $I_1\,(b, z)$，1 期間の平均在庫不足量 $I_2\,(b, z)$ は以下のようになる。

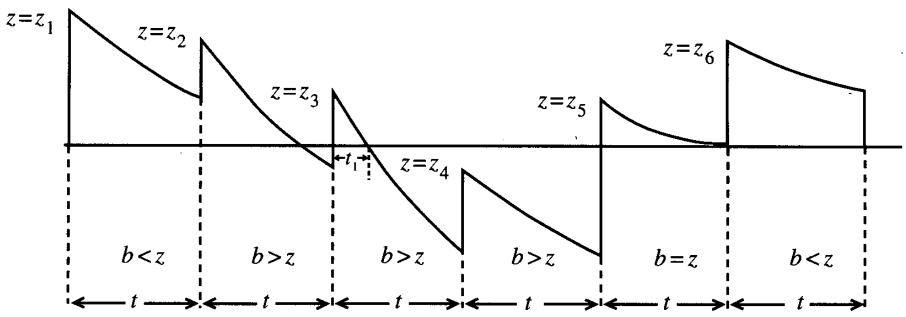

図6.1　在庫状態

(i)　$b \leqq z$ の場合

$$I_1(b, z) = \frac{1}{t}\int_0^t [z - bg(T/b)]\,dT = \frac{1}{t}\left[zt - tb\int_0^1 g(y)\,dy\right] = z - bG(1)$$

$$I_2\,(b, z) = 0$$

(ii)　$b > z \geqq 0$ の場合

$$I_1\,(b, z) = \frac{1}{t}\int_0^{t_1} [z - bg\,(T/t)]\,dT = z\left(\frac{t_1}{t}\right) - bG\left(\frac{t_1}{t}\right)$$

$$= zg^{-1}(z/b) - bG\,(g^{-1}(z/b))$$

$$I_2(b, z) = \frac{1}{t}\int_{t_1}^{t}[bg(T/t) - z]\,dT = b\left[G(1) - G\left(\frac{t_1}{t}\right)\right] - z\left(1 - \frac{t_1}{t}\right)$$

$$= b\,[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z\,[1 - g^{-1}(z/b)]$$

以上をまとめると，

$$I_1(b, z) = \begin{cases} z - bG(1) & z \geqq b \geqq 0 \\ zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right) & b > z \geqq 0 \end{cases}$$

$$I_2(b, z) = \begin{cases} 0 & z \geqq b \geqq 0 \\ b\left[G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right] - z\left[1 - g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right] & b > z \geqq 0 \end{cases}$$

(iii)　$z < 0$ の場合

$$I_1(b, z) = 0$$

$$I_2(b, z) = \frac{1}{t}\int_0^t [bg(T/t) - z]dT = bG(1) - z \qquad b \geqq 0$$

ここに，

$$G(x) = \int_0^x g(u)du$$

$Q(T) = 0$，即ち $z/b = g(T/t)$ となる T/t を $g^{-1}(z/b)$ とかく。

需要量 B は確率変数であるから，期待期平均在庫量 I_1，期待期平均在庫不足量 I_2 は次式で与えられる。

$$I_1 = E\{I_1(B, z)\} = \int_0^\infty I_1(b, z)\phi(b)db$$

$$= \int_0^z [z - bG(1)]\phi(b)db + \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))]\phi(b)db$$

$$I_2 = E\{I_2(B, z)\} = \int_0^\infty I_2(b, z)\phi(b)db$$

$$= \int_z^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)db$$

$z < 0$ に対しては

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = \int_0^\infty [bG(1) - z]\phi(b)db$$

したがって，このモデルの第１期の期待費用を $L(z,x)$ とすると，

$$L(z,x)=c_1\cdot(z-x)+h\left\{\int_0^z [z-bG(1)]\phi(b)db+\int_z^{\infty}[zg^{-1}(z/b)-bG(g^{-1}(z/b))]\phi(b)db\right\}$$

$$+p\int_z^{\infty}\{b[G(1)-G(g^{-1}(z/b))]-z[1-g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)db \tag{66}$$

$z<0$ に対しては,

$$L(z,x)=c_1\cdot(z-x)+p\int_0^{\infty}[bG(1)-z]\phi(b)db \tag{67}$$

また,

$$L'(z,x)=\begin{cases} c_1-p & z<0 \\ c_1-p+(h+p)\left\{\int_0^z \phi(b)db+\int_z^{\infty}g^{-1}(z/b)\phi(b)db\right\} & z\geqq 0 \end{cases} \tag{68}$$

$$L''(z,x)=\begin{cases} 0 & z<0 \\ (h+p)\int_z^{\infty}\dfrac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z}\phi(b)db & z\geqq 0 \end{cases} \tag{69}$$

ここで式 (67) を $L_1(z,x)$, 式 (66) を $L_2(z,x)$ とおき, $L(z,x)$ を

$$L(z,x)=\begin{cases} L_1(z,x) & z<0 \\ L_2(z,x) & z\geqq 0 \end{cases}$$

で定義すると, このモデルは, 第 1 節の式 (3) で

$$H(z)=\begin{cases} H_1(z)=L_1(z,x)+c_1x & z<R_1 \\ H_2(z)=L_2(z,x)+c_1x & z\geqq R_1,\ R_1=0 \end{cases} \tag{70}$$

の場合になっている (明らかに, $H_1(0)=L_1(0,0)=L_2(0,0)=H_2(0)$)。$H_i(z)$ $(i=1,2)$ は仮定 1 の条件をみたしている。このモデルでは過剰需要は後期需要とみなされるが, もし次期の発注量でみたされなければならないとすると, z の値は非負となる。したがってこの場合の数学モデルは第 1 節～第 5 節で $z\leqq R_1$ のとき $H(z)=H_1(z)$ は, $0\leqq z<R_1$ のとき, $H(z)=H_1(z)$ かつ $H_1(z)=H_2(z)$ に変更し, 仮定 1 の条件 $\lim_{z\to-\infty}H_1'(z)<0$ は $H_1'(0)<0$ に変更すればよい。

z が負の値をとりうる場合 $\lim_{z\to-\infty}H_1'(z)=c_1-p<0, H_1'(R_1)=H_1'(0)=c_1-p<0$ となり, 仮定 2.2 をみたさない。ページ 6 の 4 行～11行までの議論より $F_k^{1\prime}(R_1)<0,\ \lim_{z\to\infty}F_k'(z)>0$ $(k=0, 1,\cdots,N-1)$ となり, $F_k^{1\prime}(z)=0$ の正根 $\bar{x}_k$ を用いて, 最適購入政策は,

$$\begin{array}{ll} x<\bar{x}_k & \text{ならば}\quad \bar{x}_k-x \text{ だけ購入} \\ x\geqq\bar{x}_k & \text{ならば}\quad \text{購入しない} \end{array} \tag{71}$$

となる。

z のとる値を非負とすると, $H_1'(0)=c_1-p<0, F_k''(0)<0, \lim_{z\to\infty}F_k'(z)>0$ $(k=0,1,\cdots,N-1)$ であるから, $F_k'(z)=0$ の正根 $\bar{x}_k>0$ が存在し, 最適政策は上と同様になる。

もし，$H_1'(R_1) > 0$ の条件が加わると，$\bar{x}_k > 0$ の値は精緻化され，第3節の議論が成立し，最適購入政策は

(ⅰ) $x < \bar{x}_k^1\ (< R_1)$ ならば $\bar{x}_k^1 - x$ だけ購入 $(k = 1,\cdots,N)$
$x \geqq \bar{x}_k^1\ (< R_1)$ ならば購入しない (72)

(ⅱ) $x < \bar{x}_{ki}^2$ ならば $\bar{x}_{ki}^2 - x$ だけ購入 $(k = 2,\cdots,N;\ i = 1,\cdots,k-1)$
$x \geqq \bar{x}_{ki}^2$ ならば購入しない

となる（ただし，$\bar{x}_k^1$ および $\bar{x}_{ki}^2$ は第3節で定義されたものである）

応用例2

仮定(ⅰ),(ⅲ),(ⅳ)および(ⅴ)は応用例1と同じである

(ⅱ) 正規発注が各期の初めに行なわれ，ただちに入荷する(単価 c_1，各期の長さは t)。単価 $r_1\ (r_1 > c_1)$ で販売する。x を第1期の正規発注前の初期在庫量(以後は初期在庫量という)，z を発注後の第1期の手持の在庫量とする。

(ⅵ) 任意に定められた時間 $t_0\ (0 \leqq t_0 \leqq t,\ t_0$ は一定) で売れ残りがあると，供給者はあるきめられた許容範囲 R_1 以内で引きとる（単価 r_2，$0 < r_2 \leqq c_1$)。t_0 時点で品切れがあると，ある許容範囲 R_2 以内であれば，ただちに単価 $c_2\ (c_1 \leqq c_2)$ で追加発注し，即時に入荷できるものとする。ただし，$c_2 > r_1(1-\alpha) + (1 - t_0/t)p$ のときは追加発注をしないで，品切れを起したほうが有利となり，これはモデルの仮定に反するので，$c_2 < r_1(1-\alpha) + (1 - t_0/t)p$ とする(注意6.1参照)

このモデルの場合，与えられた b に対して，$0 \leqq z \leqq R_1$ のとき b，$z/g(t_0/t)$ および $(z + R_2)/g(t_0/t)$ の順序関係（ただし，$0 \leqq z/g(t_0/t) < (z + R_2)/g(t_0/t)$）によって3つの典型的な在庫状態が生じる。$z > R_1$ に対しては，$b, z - R_1, (z - R_1)/g(t_0/t), z/g(t_0/t)$ および $(z + R_2)/g(t_0/t)$（ただし，$0 < z - R_1 \leqq (z - R_1)/g(t_0/t) < z/g(t_0/t) < (z + R_2)/g(t_0/t)$）によって5つの典型的な在庫状態が生じる。期平均在庫量，期平均在庫不足量および期平均費用を $I_1(b, z), I_2(b, z)$ および $C(b, z, x)$ とすると，つぎのようになる。

$0 \leqq z \leqq R_1$ の場合 ($t_0 \neq 0$)

(ⅰ) $0 \leqq b \leqq z/g\left(\dfrac{t_0}{t}\right)$

これは時点 t_0 における在庫量 $[z - g(t_0/t)b]$ が非負で，需要量 $\geqq 0$ となる b の範囲を与えている。時点 t_0 で $z - g(t_0/t)b$ がただちに返却される。過剰需要が後期需要と見なされるが，次期の発注量でみたされなければならないから，$T = t$ 時点の在庫不足量 $[1 - g(t_0/t)]b$ を次期の発注量でみたし，それに対する利益を第1期利益として換算すると，$\alpha r_1[1 - g(t_0/t)]b$ となり $C(b, z, x)$ の最後に $-\alpha r_1[1 - g(t_0/t)]b$ となって加わる。ただし，$t_0 = t$ のとき $-\alpha r_1[1 - g(t_0/t)]b = 0$

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\int_0^{t_0}\left[z-g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT=\frac{t_0}{t}z-G\left(\frac{t_0}{t}\right)b$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}b\left[g\left(\frac{T}{b}\right)-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]dT=\left[G(1)-G\left(\frac{t_0}{t}\right)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]b$$

$$\begin{aligned}C(b,z,x)&=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)\\&\quad-r_2\left[z-g\left(\frac{t_0}{t}\right)b\right]-r_1g\left(\frac{t_0}{t}\right)b-\alpha r_1\left[1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]b\\&=\left(c_1-r_2+h\frac{t_0}{t}\right)z+\left\{pG(1)-(h+p)G\left(\frac{t_0}{t}\right)+\left[r_2-r_1-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right.\\&\quad\left.-\alpha r_1\left[1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]\right\}b-c_1x\end{aligned}$$

(ii) $z/g\left(\frac{t_0}{t}\right)<b\leqq(z+R_2)/g\left(\frac{t_0}{t}\right)$

これは時点 t_0 における在庫量 $[z-g(t_0/t)b]$ が負で，かつ$\geqq -R_2$ となる b の範囲を与えている。$[g(t_0/t)b-z]$ 単位がただちに配達遅れなしに単価 c_2 で購入され，単価 r_1 で販売する。$-\alpha r_1\times(T=t$ 時点の在庫不足量$)=-\alpha r_1[1-g(t_0/t)]b$ が $C(b,z,x)$ に加わる。ただし，$t_0=t$ のとき，$-\alpha r_1[1-g(t_0/t)]b=0$

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}(z/b)}\left[z-g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT=zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b$$

$$\begin{aligned}I_2(b,z)&=\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t_0}\left[bg\left(\frac{T}{t}\right)-z\right]dT+b\int_{t_0}^{t}\left[g\left(\frac{T}{t}\right)-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]dT\right\}\\&=\left[g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-\frac{t_0}{t}\right]z+\left\{\left[G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right]-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right\}b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C(b,z,x)&=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)\\&\quad+c_2\left[bg\left(\frac{t_0}{t}\right)-z\right]-r_1z-r_1\left[g\left(\frac{t_0}{t}\right)b-z\right]-\alpha r_1\left[1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]b\end{aligned}$$

$$=\left(c_1-c_2-\frac{t_0}{t}p\right)z+(h+p)\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]$$

$$+\left\{\left[c_2-r_1-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right)-\alpha r_1\left[1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]+pG(1)\right\}b-c_1x$$

(iii)　$b>(z+R_2)/g\left(\dfrac{t_0}{t}\right)$

これは時点 t_0 における在庫量 $[z-g(t_0/t)b]$ が $-R_2$ より小さい b の範囲を示している。ただちに配達遅れなしに，R_2 単位が単価 c_2 で購入され，単価 r_1 で販売する。$-\alpha r_1\times(T=t$ 時点の在庫不足量$)=-\alpha r_1(b-z-R_2)$ が $C(b, z, x)$ に加わる。

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}(z/b)}\left[z-g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT=zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t_0}\left[g\left(\frac{T}{t}\right)b-z\right]dT+b\int_{t_0}^{t}\left[g\left(\frac{T}{t}\right)b-(z+R_2)\right]dT\right\}$$

$$=zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)+\left[G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right]b-z-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)R_2$$

$$C(b,z,x)=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)+c_2R_2-r_1(z+R_2)-\alpha r_1(b-z-R_2)$$

$$=(c_1-p—r_1)(1-\alpha)z+(h+p)\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]$$

$$+(pG(1)-\alpha r_1)b+\left[c_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]R_2-c_1x$$

b は1期間の需要量を表わす確率変数 B の実現値であるから $C(B, z, x)$ の期待値を $E\{C(B, z, x)\}$ とすると

$$E\{C(B,z,x)\}=\int_0^{z/g(t_0/t)}C(b,z,x)\phi(b)db$$

$$+\int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R_2)/g(t_0/t)}C(b,z,x)\phi(b)db+\int_{(z+R_2)/g(t_0/t)}^{\infty}C(b,z,x)\phi(b)db$$

$$=-c_1x+H_1(z) \tag{73}$$

$$H_1(z)=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]z+\left[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}\right]z\Phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)$$

$$+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-c_2\right](z+R_2)\Phi\left(\frac{z+R_2}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)$$

$$+\left\{\left[r_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right)-(h+p)G\left(\frac{t_0}{t}\right)\right\}\int_0^{z/g(t_0/t)}b\phi(b)db$$

$$+\left[c_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right)\int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R_2)/g(t_0/t)}b\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]\phi(b)db$$

$$+(pG(1)-\alpha r_1)\int_0^{\infty}b\phi(b)db+\left[c_2z-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]R_2 \tag{74}$$

$$\frac{dH_1(z)}{dz}=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]+\left[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}\right]\Phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)$$

$$+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-c_2\right]\Phi\left(\frac{z+R_2}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)+(h+p)\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db \tag{75}$$

$$\frac{d^2H_1(z)}{dz^2}=\left\{(c_2-r_2)\phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-c_2\right]\phi\left(\frac{z+R_2}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)\right\}\frac{1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$+(h+p)\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\geqq 0 \tag{76}$$

$$H_1'(0)<c_1-c_2-\frac{t_0}{t}p<0 \tag{77}$$

$z>R_1$ の場合

(i) $0\leqq b<z-R_1$

これは時点 t の在庫量 $(z-b)$ が R_1 より大きく，需要量$\geqq 0$ となる b の範囲を与えている。$z-g(t_0/t)b>z-b>R_1$ であるから，ただちに R_1 単位が単価 r_2 で返却される。

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}\left[z-g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT+\int_{t_0}^{t}\left[z-R_1-g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT\right\}=z-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)R_1-G(1)b$$

$$I_2(b,z)=0$$

$$C(b,z,x)=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)-r_1b-r_2R_1$$

$$=(c_1+h)z-[hG(1)+r_1]b-\left[r_2+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]R_1-c_1x$$

(ii)　$z-R_1\leqq b<(z-R_1)/g\left(\frac{t_0}{t}\right)$

時点 t_0 における在庫量 $[z-g(t_0/t)b]$ が R_1 より大きく，時点 t における在庫量 $(z-b)$ が R_1 より大きくない b の範囲が (ii) で与えられる。時点 t_0 でただちに R_1 単位が単価 r_2 で返却される。$-\alpha r_1\times(T=t$ における在庫不足量$)=-\alpha r_1(b-z+R_1)$ が $C(b,z,x)$ に加わる。ただし，$t=t_0$ のときは，このケースは生じない。

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}\left[z-g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT+\int_{t_0}^{tg^{-1}((z-R_1)/b)}\left[z-R_1-g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT\right\}$$

$$=(z-R_1)g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\right)b+\frac{t_0}{t}R_1$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}((z-R_1)/b)}^{t}\left[g\left(\frac{T}{t}\right)b+R_1-z\right]dT$$

$$=\left[G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\right)\right]b-\left[1-g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\right](z-R_1)$$

$$C(b,z,x)=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)-r_1(z-R_1)-r_2R_1-\alpha r_1(b-z+R_1)$$

$$=[c_1+p-r_1(1-\alpha)]z+(h+p)\left[(z-R_1)g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\right)b\right]$$

$$+(pG(1)-\alpha r_1)b+\left[p+r_1(1-\alpha)-r_2+\frac{t_0}{t}h\right]R_1-c_1x$$

(iii)　$(z-R_1)/g\left(\frac{t_0}{t}\right)\leqq b<z/g\left(\frac{t_0}{t}\right)$

これは $0<z-g(t_0/t)b\leqq R_1$，つまり時点 t_0 における在庫量 $[z-g(t_0/t)b]$ が正かつ R_1 より大きくないことを意味し，このような b の範囲が (iii) で与えられる。この場合は時点 t_0 で $z-g(t_0/t)b$ 単位が単価 r_2 で返却され，t_0 時点の在庫量は 0 となる。$z-[z-g(t_0/t)b]=g(t_0/t)b$ 単

位が単価 r_1 で販売されたことになる。$-\alpha r_1 \times (T=t$ における在庫不足量$) = -\alpha r_1[1-g(t_0/t)]b$ が $C(b, z, x)$ に加わる。ただし，$t_0 = t$ のとき $-\alpha r_1[1-g(t_0/t)]b = 0$

$$I_1(b,z) = \frac{1}{t}\int_0^{t_0}\left[z - g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT = z\frac{t_0}{t} - G\left(\frac{t_0}{t}\right)b$$

$$I_2(b,z) = \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} b\left[g\left(\frac{T}{t}\right) - g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]dT = \left[G(1) - G\left(\frac{t_0}{t}\right) - \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]b$$

$$\begin{aligned} C(b,z,x) &= c_1(z-x) + hI_1(b,z) + pI_2(b,z) \\ &\quad -r_2\left[z - g\left(\frac{t_0}{t}\right)b\right] - r_1 g\left(\frac{t_0}{t}\right)b - \alpha r_1\left[1 - g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]b \\ &= \left(c_1 - r_2 + h\frac{t_0}{t}\right)z + \left\{pG(1) - \alpha r_1 - (h+p)G\left(\frac{t_0}{t}\right)\right. \\ &\quad \left. + \left[r_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right\}b - c_1 x \end{aligned}$$

(iv) $z/g\left(\frac{t_0}{t}\right) \leqq b < (z+R_2)/g\left(\frac{t_0}{t}\right)$

時点 t_0 における在庫量が非正かつ $-R_2$ より大きい b の範囲が (iv) で与えられる。この場合 $[g(t_0/t)b - z]$ 単位が配達遅れなしにただちに単価 c_2 で購入され，t_0 時点の在庫量は 0 となる。$z + [g(t_0/t)b - z] = g(t_0/t)b$ 単位が単価 r_1 で t_0 時間に販売されたことになる。また，$-\alpha r_1 \times (T=t$ 時点の在庫不足量$) = -\alpha r_1[1-g(t_0/t)]b$ が $C(b, z, x)$ に加わる。ただし，$t_0 = t$ のとき $-\alpha r_1[1-g(t_0/t)]b = 0$

$$I_1(b,z) = \frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}(z/b)}\left[z - g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT = zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right) - G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b$$

$$\begin{aligned} I_2(b,x) &= \frac{1}{t}\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t_0}\left[g\left(\frac{T}{t}\right)b - z\right]dT - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\left[g\left(\frac{T}{t}\right) - g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]bdT \\ &= z\left[g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right) - \frac{t_0}{t}\right] + \left[G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right) - \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]b \end{aligned}$$

$$C(b,z,x) = c_1(z-x) + hI_1(b,z) + pI_2(b,z)$$

$$+c_2\left[g\left(\frac{t_0}{t}\right)b-z\right]-r_1 g\left(\frac{t_0}{t}\right)b-\alpha r_1\left[1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]b$$

$$=\left(c_1-c_2-p\frac{t_0}{t}\right)z+(h+p)\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]$$

$$+\left\{pG(1)+\left[c_2-r_1-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right)-\alpha r_1\left[1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]\right\}b-c_1 x$$

（ｖ） $b \geqq (z+R_2)/g\left(\dfrac{t_0}{t}\right)$

時点 t_0 における在庫量 $(z-g(t_0/t))b$ が $-R_2$ より大きくない b の範囲が（ｖ）で与えられる。ただちに配達遅れなしに，R_2 単位が単価 c_2 で購入され，$(z+R_2)$ 単位が単価 r_1 で t_0 時間に販売される。$-\alpha r_1(T=t$ 時点の在庫不足量$)=-\alpha r_1[b-(z+R_2)]$ が $C(b, z, x)$ に加わる

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}(z/b)}\left[z-g\left(\frac{T}{t}\right)b\right]dT=zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t_0}\left[g\left(\frac{T}{t}\right)b-z\right]dT+\int_{t_0}^{t}\left[g\left(\frac{T}{t}\right)b-(z+R_2)\right]dT\right\}$$

$$=zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b+G(1)b-z-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)R_2$$

$$C(b,z,x)=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)+c_2R_2-r_1(z+R_2)-\alpha r_1[b-(z+R_2)]$$

$$=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]z+(h+p)\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]$$

$$+(pG(1)-\alpha r_1)b+\left[c_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]R_2-c_1 x$$

$C(B, z, x)$ の期待値 $E\{C(B, z, x)\}$ を求めると

$$E\{C(B,z,x)\}=\int_0^{z-R_1}C(b,z)\phi(b)db+\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(t_0/t)}C(b,z)\phi(b)db$$

$$+\int_{(z-R_1)/g(t_0/t)}^{z/g(t_0/t)}C(b,z)\phi(b)db+\int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R_2)/g(t_0/t)}C(b,z)\phi(b)db$$

$$+\int_{(z+R_2)/g(t_0/t)}^{\infty} C(b,z)\phi(b)db = -c_1 x + H_2(z) \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
H_2(z) = {} & [c_1 - p - r_1(1-\alpha)]z + \left[c_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]R_2 \\
& + [h + p + r_1(1-\alpha)](z-R_1)\Phi(z-R_1) \\
& - \left[r_1(1-\alpha) - r_2 + p + h\frac{t_0}{t}\right](z-R_1)\Phi\left(\frac{z-R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right) \\
& + \left[c_2 - r_2 + (h+p)\frac{t_0}{t}\right]\Phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right) \\
& + \left[r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c_2\right](z+R_2)\Phi\left(\frac{z-R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right) - [r_1 + hG(1)]\int_0^{z-R_1} b\phi(b)db \\
& + [pG(1) - \alpha r_1]\int_{z-R_1}^{\infty} b\phi(b)db + (h+p)\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(t_0/t)} \left[(z-R_1)g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\right. \\
& \left. - G\left(g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\right)b\right]\phi(b)db \\
& + \left\{\left[r_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right) - (h+p)G\left(\frac{t_0}{t}\right)\right\}\int_{(z-R_1)/g(t_0/t)}^{z/g(t_0/t)} b\phi(b)db \\
& + \left[c_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right)\int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R_2)/g(t_0/t)} b\phi(b)db \\
& + (h+p)\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right) - G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]\phi(b)db
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dH_2(z)}{dz} = {} & [c_1 - p - r_1(1-\alpha)] + [h + p + r_1(1-\alpha)]\Phi(z-R_1) \\
& + \left[r_2 - r_1(1-\alpha) - p - h\frac{t_0}{t}\right]\Phi\left(\frac{z-R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right) + \left[c_2 - r_2 + (h+p)\frac{t_0}{t}\right]\Phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right) \\
& + \left[r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c_2\right]\Phi\left(\frac{z+R_2}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$+(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(t_0/t)} g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\} \tag{80}$$

$$H_1'(R_1)=H_2'(R_2)=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]+\left[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}\right]\Phi\left(\frac{R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)$$

$$+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-c_2\right]\Phi\left(\frac{R_1+R_2}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)$$

$$+(h+p)\int_{R_1/g(t_0/t)}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{R_1}{b}\right)\phi(b)db, \quad \lim_{z\to\infty}H_2'(z)=c_1+h>0 \tag{81}$$

$$\frac{d^2H_2(z)}{dz^2}=r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)$$

$$+\left\{\left[r_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]\phi\left(\frac{z-R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)+(c_2-r_2)\phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)\right.$$

$$\left.+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-c_2\right]\phi\left(\frac{z+R_2}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)\right\}\frac{1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$+(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(t_0/t)}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\} \tag{82}$$

$r_2<r_1(1-\alpha)+(1-t_0/t)p$ であるから（$\because\ r_2\leqq r_1\leqq c_2<r_1(1-\alpha)+(1-t_0/t)p$），$H_2''(z)\geqq 0$ が常に成立するとは限らない。$H_2''(z)\geqq 0$ つまり $E\{C(B,z,x)\}$ が凸関数であるための十分条件は文献[13] の方法で与えられる。

補題 6.1　もし，$t_0=t$ ならば $H_2''(z)\geqq 0$ である。

証略

補題 6.2　$\phi(z)$ が z の単調関数ならば $H_2''(z)\geqq 0$ である。

証略

補題 6.3　$\phi(z)$ が峰が一つあるいは谷が一つの単純な分布で，$r_2>r_1(1-\alpha)(1-g(t_0/t))+$

$(1-t_0/t)p$ ならば $H_2''(z) \geqq 0$ である。

証明　谷が一つの場合について証明をしておく。他の場合も類似な方法で証明できる。$\phi(z)$ が $0 \leqq z < z_0$ で減少関数，$z_0 < z < \infty$ で増加関数であると仮定する（$\phi(z)$ が谷が一つの単純な分布の場合を表わしている）

$$z_0 g(t_0/t) - R_2 \leqq z_0 g(t_0/t) \leqq z_0 g(t_0/t) + R_1 \leqq z_0 + R_1$$

に注目すると（$0 \leqq z_0 g(t_0/t) - R_2$ と仮定する）

$z < z_0 g(t_0/t) - R_2$ ならば $(z+R_2)/g(t_0/t) < z_0$ となるから，$\phi((z+R_2)/g(t_0/t))$ は z の減少関数，

$z < z_0 g(t_0/t)$ ならば $z/g(t_0/t) < z_0$ となるから，$\phi(z/g(t_0/t))$ は z の減少関数，

$z < z_0 g(t_0/t) + R_1$ ならば $(z-R_1)/g(t_0/t) < z_0$ となるから，$\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の減少関数，

$z < z_0 + R_1$ ならば $z - R_1 < z_0$ となるから，$\phi(z-R_1)$ は z の減少関数である。

以上のことに注意して，z_0 の大きさについて次の３つの場合にわけて証明する。

（ｉ）　$z_0 > (R_1 + R_2)/g(t_0/t)$

このとき，$R_1 < z_0 g(t_0/t) - R_2$ となる。

i)　$R_1 < z < z_0 g(t_0/t) - R_2$ のとき，$0 < (z-R_1) \leqq (z-R_1)/g(t_0/t) \leqq z/g(t_0/t) \leqq (z+R_2)/g(t_0/t) < z_0$ となるから，$\phi(z-R_1)$, $\phi((z-R_1)/g(t_0/t)$, $\phi(z/g(t_0/t))$ および $\phi((z+R_2)/g(t_0/t))$ は z の減少関数となり，$-(z-R_1)/g(t_0/t)$ は z の増加関数となる。したがって

$$\begin{aligned}
H_2''(z) &\geqq \left\{r_1(1-\alpha)g\left(\frac{t_0}{t}\right) + \left[r_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]\right\}\frac{\phi(z-R_1)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)} \\
&\quad + \left\{(c_2 - r_2) + \left[r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c_2\right]\right\}\frac{\phi((z+R_2)/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)} \\
&= \left\{r_2 - r_1(1-\alpha)\left(1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right\}\frac{\phi(z-R_1)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)} \\
&\quad + \left\{r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - r_2\right\}\frac{\phi((z+R_2)/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)} \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

ii)　$z_0 g(t_0/t) - R_2 \leqq z < z_0 g(t_0/t)$ のとき，$0 < (z-R_1) \leqq (z-R_1)/g(t_0/t) < z/g(t_0/t) \leqq z_0$，$z_0 \leqq (z+R_2)/g(t_0/t)$ となるから，$\phi(z-R_1)$, $\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ および $\phi(z/g(t_0/t))$ は z の減少関数，$\phi((z+R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$-((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の増加関数となる。したがって

$$H_2''(z) \geqq \left\{ r_1(1-\alpha)g\left(\frac{t_0}{t}\right) + \left[r_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p \right] \right\} \frac{\phi(z-R_1)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$+(c_2-r_2)\frac{\phi(z/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)} + \left[r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c_2 \right] \frac{\phi((z+R_2)/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$= \left[r_2 - r_1(1-\alpha)\left(1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p \right] \frac{\phi(z-R_1)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$+(c_2-r_2)\frac{\phi(z/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)} + \left[r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c_2 \right] \frac{\phi((z+R_2)/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$\geqq 0 \ (\because r_1(1-\alpha) + (1-t_0/t)\,p \geqq c_2 \geqq r_2 > r_1(1-\alpha)(1-g(t_0/t)) + (1-t_0/t)\,p)$$

iii) $z_0 g(t_0/t) \leqq z < z_0 g(t_0/t) + R_1$ のとき，$0 < (z-R_1) \leqq (z-R_1)/g(t_0/t) < z_0$，$z_0 \leqq z/g(t_0/t) \leqq (z + R_2)/g(t_0/t)$ となるから，$\phi(z-R_1)$ および $\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の減少関数，$\phi(z/g(t_0/t))$ および $\phi((z+R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$-\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の増加関数となる。したがって

$$H_2''(z) \geqq \left\{ r_1(1-\alpha)g\left(\frac{t_0}{t}\right) + \left[r_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p \right] \right\} \frac{\phi((z-R_1)/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$+\left\{ (c_2-r_2) + \left[r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c \right] \right\} \frac{\phi(z/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$= \left[r_2 - r_1(1-\alpha)\left(1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p \right] \frac{\phi((z-R_1)/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$+\left\{ r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - r_2 \right\} \frac{\phi(z/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$\geqq 0 \ (\because r_1(1-\alpha) + (1-t_0/t)\,p > r_2 > r_1(1-\alpha)(1-g(t_0/t)) + (1-t_0/t)\,p)$$

iv)　$z_0g(t_0/t)+R_1\leqq z<z_0+R_1$ のとき，$0<z-R_1<z_0$，$z_0\leqq(z-R_1)/g(t_0/t)\leqq z/g(t_0/t)\leqq(z+R_2)/g(t_0/t)$ となるから，$\phi(z-R_1)$ は z の減少関数，$\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$，$\phi(z/g(t_0/t))$ および $\phi((z+R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$-\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の減少関数となる。したがって

$$H_2''(z)\geqq r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)+\left\{\left[r_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]+(c_2-r_2)\right.$$

$$\left.+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-c_2\right]\right\}\frac{\phi((z-R_1)/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$=r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)\geqq 0$$

$g(t_0/t)=1$ の場合は iii) に吸収される。

v)　$z\geqq z_0+R_1$ のとき，$(z+R_2)/g(t_0/t)>z/g(t_0/t)>(z-R_1)/g(t_0/t)\geqq(z-R_1)\geqq z_0$ となるから，$\phi(z-R_1)$，$\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$，$\phi(z/g(t_0/t))$ および $\phi((z+R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$-\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の減少関数となる。したがって

$$H_2''(z)\geqq\left\{r_1(1-\alpha)g\left(\frac{t_0}{t}\right)+\left[r_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)b\right]+(c_2-r_2)\right.$$

$$\left.+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)b-c_2\right]\right\}\frac{\phi(z-R_1)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$=r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)\geqq 0$$

(ii)　$R_1/g(t_0/t)<z_0\leqq(R_1+R_2)/g(t_0/t)$

このとき，$z_0g(t_0/t)-R_2<R_1$ となる。$R_1<z$ のとき，$z_0g(t_0/t)-R_2<R_1<z$ よって $z_0<(z+R_2)/g(t_0/t)$ したがって $\phi((z+R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，i) $R_1<z<z_0g(t_0/t)-R_2$ は生じない。

ii)　$z_0g(t_0/t)-R_2\leqq z<z_0g(t_0/t)$ のとき，$R_1<z$ であるから $R_1<z<z_0g(t_0/t)$，故に $z_0>z/g(t_0/t)>(z-R_1)/g(t_0/t)\geqq(z-R_1)$，よって $\phi(z-R_1)$，$\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ および $\phi(z/g(t_0/t))$ は z の減少関数となる。したがって (i)-ii) と同様にして $H_2''(z)\geqq 0$ を得る。

iii)　$z_0g(t_0/t)\leqq z<z_0g(t_0/t)+R_1$ のとき，$z_0\leqq z/g(t_0/t)<(z+R_2)/g(t_0/t)$，$(z-R_1)\leqq(z-R_1)/g(t_0/t)<z_0$ となる。したがって $\phi((z/g(t_0/t))$ および $\phi((z+R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$\phi(z-R_1)$ および $\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の減少関数となるから，(i)-iii) と同様にして $H_2''(z)\geqq 0$ を得る。

iv)　$z_0g(t_0/t)+R_1\leqq z<z_0+R_1$ のとき，$z-R_1\leqq z_0$，$z_0\leqq(z-R_1)/g(t_0/t)<z/g(t_0/t)\leqq(z+R_2)/g(t_0/t)$ よって $\phi(z-R_1)$ は z の減少関数，$\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$，$\phi(z/g(t_0/t))$ および $\phi((z+R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数となり，(i)-iv) と同様にして $H_2''(z)\geqq 0$ を得る。$g(t_0/t)=1$ の場合は iii) に吸収される。

v)　$z \geqq z_0 + R_1$ のとき，$(z + R_2)/g(t_0/t) > z/g(t_0/t) > (z - R_1)/g(t_0/t) \geqq (z - R_1) \geqq z_0$ となり，$\phi(z - R_1)$，$\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$，$\phi(z/g(t_0/t))$ および $\phi((z + R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数となる。(i)-v) と同様にして $H_2''(z) \geqq 0$ を得る。

(iii)　$0 < z_0 \leqq R_1 g(t_0/t)$

このとき，$0 < z_0 g(t_0/t) \leqq R_1 < z_0 g(t_0/t) + R_1$，$z > R_1$ に対しては $z_0 < z/g(t_0/t) < (z + R_2)/g(t_0/t)$ であるから $\phi(z/g(t_0/t)$ および $\phi((z + R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，i) $R_1 < z < z_0 g(t_0/t) - R_2$ および ii) $z_0 g(t_0/t) - R_2 \leqq z \leqq z_0 g(t_0/t)$ は生じない（$\because$ $z > R_1 \geqq z_0 g(t_0/t)$ より） iii) $z_0 g(t_0/t) < z < z_0 g(t_0/t) + R_1$ のとき，$z > R_1$ より z の範囲は $R_1 < z < z_0 g(t_0/t) + R_1$ となる。$z - R_1 \leqq (z - R_1)/g(t_0/t) < z_0$ より $\phi(z - R_1)$ および $\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$ は z の減少関数，したがって (i)-iii) と同様にして $H_2''(z) \geqq 0$ を得る。

iv)　$z_0 g(t_0/t) + R_1 \leqq z \leqq z_0 + R_1$ のとき，$z - R_1 \leqq z_0$ より $\phi(z - R_1)$ は z の減少関数，$z_0 \leqq (z - R_1)/g(t_0/t) < z/g(t_0/t) < (z + R_2)/g(t_0/t)$ より $\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$，$\phi(z/g(t_0/t))$ および $\phi((z + R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数となる。したがって (i)-iv) と同様にして $H_2''(z) \geqq 0$ を得る。

v)　$z > z_0 + R_1$ のとき，$z_0 < (z - R_1) \leqq (z - R_1)/g(t_0/t) < z/g(t_0/t) < (z + R_2)/g(t_0/t)$ となり，$\phi(z - R_1)$，$\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$，$\phi(z/g(t_0/t))$ および $\phi((z + R_2)/g(t_0/t))$ は z の増加関数となる。したがって (i)-v) と同様にして $H_2''(z) \geqq 0$ を得る。「証終」

注意 6.1　補題 6.3 を拡張して，$\phi(z)$ が図 6.2 で与えられるような場合でも，$r_2 > r_1(1 - \alpha)(1 - g(t_0/t)) + (1 - t_0/t)p$ ならば $H_2''(z) \geqq 0$ であることを補題 6.3 の証明と同様な方法で示すことができる。また，$\phi(z)$ が一様分布の場合でも示すことができる。

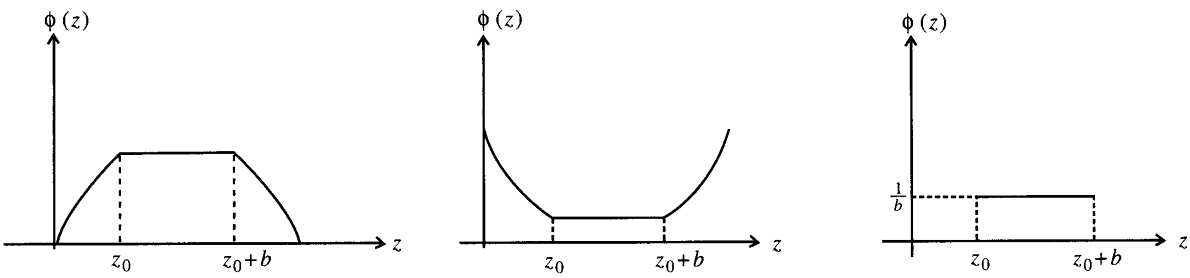

図6.2

$$H(z) = \begin{cases} H_1(z) & 0 \leqq z \leqq R_1 \\ H_2(z) & z > R_1 \end{cases}$$

で $H(z)$ を定義すると，この場合の数学モデルは，第 1 節～第 5 節で $z \leqq R_1$ のとき，$H(z) = H_1(z)$，$z > R_1$ のとき，$H(z) = H_2(z)$ を $0 \leqq z \leqq R_1$ のとき，$H(z) = H_1(z)$，$z > R_1$ のとき，$H(z)$

$= H_2(z)$ に変更し，仮定1の条件 $\lim_{z\to-\infty} H_1'(z) < 0$ を $H_1'(0) < 0$ に変更すればよい。$H_1(z)$ および $H_2(z)$ は第1節～第5節の条件をみたしているから（補題 6.1～6.3，注意 6.1 のいづれかが成立しているという条件の下で）$H_1'(R_1) > 0$ を仮定すると，第3節で定義された $\bar{x}_k^1$ $(k=1,\cdots,N)$ および $\bar{x}_{ki}^2$ $(k=2,\cdots,N; i=1,\cdots,k-1)$ を用いて，最適購入政策は

（i）$x < \bar{x}_k^1 (< R_1)$ ならば $\bar{x}_k^1 - x$ だけ購入 (83)

$x \geqq \bar{x}_k^1 (< R_1)$ ならば購入しない

（ii）$x < \bar{x}_{ki}^2$ ならば $\bar{x}_{ki}^2 - x$ だけ購入 (84)

$x \geqq \bar{x}_{ki}^2$ ならば購入しない

となる。

注意 6.2　（i）$z > R_1$，$z/g(t_0/t) < b < (z+R_2)/g(t_0/t)$ のとき，時点 t_0 において緊急発注を行なわない場合の平均在庫不足量 $I_2^*(b, z)$（平均在庫量は不変）は

$$I_2^*(b,z) = \frac{1}{t}\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t}\left[bg\left(\frac{T}{t}\right) - z\right]dT = b\left[G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right] - z\left[1 - g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right]$$

となり，このときの期当りの平均費用 $C^*(b, z, x)$ は

$$C^*(b,z,x) = c_1(z-x) + hI_1(b,z) + pI_2^*(b,z) - r_1 z - \alpha r_1(b-z)$$

である。$C(b, z, x) < C^*(b, z, x)$（緊急発注が有効である条件）であるためには

$$pI_2(b,z) + c_2\left[g\left(\frac{t_0}{t}\right)b - z\right] - r_1 g\left(\frac{t_0}{t}\right)t - \alpha r_1\left[1 - g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right]b$$

$$< pI_2^*(b,z) - r_1 z - \alpha r_1(b-z)$$

（$\because c_1(z-x) + hI_1(b,z)$ は共通）

が，成立しなければならない。上式を整理すると

$$\left\{r_1(1-\alpha) + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)p - c_2\right\} + \left\{c_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)p\right\}g\left(\frac{t_0}{t}\right) < 0$$

すなわち

$$\left\{c_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)p\right\}\left[g\left(\frac{t_0}{t}\right)b - z\right] < 0$$

となる。$g(t_0/t)b - z \geqq 0$ であるから $c_2 < r_1(1-\alpha) + (1 - t_0/t)p$ を得る。

（ii）$z > R_1$，$b > (z_1 + R_2)/g(t_0/t)$ のとき，時点 t_0 で緊急発注を行わない場合の平均在庫不足量 $I_2^*(b, z)$ を求めると，（i）と同様にして，$b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]$ となる。こ

のときの平均費用 $C^*(b, z, x)$ は

$$C^*(b, z, x) = c_1(z-x) + hI_1(b, z) + p_2 I_2^*(b, z) - r_1 z - \alpha r_1(b-z)$$

である。$C(b, z, x) < C^*(b, z, x)$（緊急発注が有効である条件）であるためには，

$$pI_2(b, z) + c_2 R_2 - r_1(z+R_2) - \alpha r_1[b-(z+R_2)] < p_2 I_2^*(b, z) - r_1 z - \alpha r_1(b-z)$$

$$(\because c_1(z-x) + hI_1(b, z) \text{は共通})$$

が，成立しなければならない。上式を整理すると，$[c_2 - r_1(1-\alpha) - (1-t_0/t)p]R_2 < 0$，$R_2 > 0$ より $c_2 < r_1(1-\alpha) + (1-t_0/t)p$ を得る。

（iii） $0 \leqq z \leqq R_1$，$z/g(t_0/t) < b < (z+R_2)/g(t_0/t)$ のとき，時点 t_0 において緊急発注を行わない場合の平均在庫不足量 $I_2^*(b, z)$ は（ｉ）と同様にして，$b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]$ となる。このときの平均費用 $C^*(b, z, x)$ は

$$C^*(b, z, x) = c_1(z-x) + hI_1(b, z) + pI_2^*(b, z) - r_1 z - \alpha r_1(b-z)$$

である。$C(b, z, x) < C^*(b, z, x)$ であるためには，

$$pI_2(b, z) + c_2[bg(t_0/t) - z] - r_1 z - r_1[g(t_0/t)t - z] - \alpha r_1[1 - g(t_0/t)]b$$

$$< pI_2^*(b, z) - r_1 z - \alpha r_1(b-z)$$

が，成立しなければならない。上式を整理すると，$[z - g(t_0/t)b]\,[r_1(1-\alpha) + (1-t_0/t)p - c_2] < 0$ となる。$z - g(t_0/t)b > 0$ より $c_2 < r_1(1-\alpha) + (1-t_0/t)p$ を得る。

（iv） $0 \leqq z \leqq R_1$，$b > (z+R_2)/g(t_0/t)$ のとき，時点 t_0 において緊急発注を行わない場合の平均在庫不足量 $I_2^*(b, z)$ は（ｉ）と同様にして，$b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]$ となる。このときの平均費用 $C^*(b, z, x)$ は

$$C^*(b, z, x) = c_1(z-x) + hI_1(b, z) + pI_2^*(b, z) - r_1 z - \alpha r_1(b-z)$$

である。$C(b, z, x) < C^*(b, z, x)$ であるためには

$$pI_2(b, z) + c_2 R_2 - r_1(z+R_2) - \alpha r_1(b-z-R_2) < pI_2^*(b, z) - r_1 z - \alpha r_1(b-z)$$

が，成立しなければならない。上式を整理すると，$[c_2 - r_1(1-\alpha) - (1-t_0/t)p]R_2 < 0$ となる。$R_2 > 0$ より $c_2 < r_1(1-\alpha) + (1-t_0/t)p$

以上のことより，緊急発注をモデルに導入する仮定より $c_2 \leqq r_1(1-\alpha) + (1-t_0/t)p$ とする（等号を含めて）。

注意 6.3　$c_2 > r_1(1-\alpha) + (1-t_0/t)\,p$ のときは，緊急発注を行わないモデルとなる。異る点を列記すると，

$0 \leqq z \leqq R_1$ の場合 $(t_0 \neq 0)$

（ii）　$z/g\left(\frac{t_0}{t}\right) < b \leqq (z+R_2)/g\left(\frac{t_0}{t}\right)$

$$I_2(b, z) = \frac{1}{t}\int_{tg^{-1}(b,z)}^{t}\left[bg\left(\frac{T}{t}\right) - z\right]dT = b\left[G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right] - z\left[1 - g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right]$$

$$C(b,z,x)=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)-r_1z-\alpha r_1(b-z)$$

$$=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]z+(h+p)\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right]+[pG(1)-\alpha r_1]b-c_1x$$

(iii) $b>(z+R_2)/g\left(\frac{t_0}{t}\right)$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}(b,z)}^{t}\left[bg\left(\frac{T}{t}\right)-z\right]dT=b\left[G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right]-z\left[1-g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right]$$

$$C(b,z.x)=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)-r_1z-\alpha r_1(b-z)$$

$$=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]z+(h+p)\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right]+[pG(1)-\alpha r_1]b-c_1x$$

したがって，$E\{(C(B,z,x)\}$ は

$$E[C(b,z,x)]$$

$$=\int_0^{z/g(t_0/t)}C(b,z,x)\phi(b)db+\int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R_2)/g(t_0/t)}C(b,z,x)\phi(b)db+\int_{(z+R_2)/g(t_0/t)}^{\infty}C(b,z,x)\phi(b)db$$

$$=-c_1x+H_1(z) \tag{85}$$

$$H_1(z)=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]z+\left[p+r_1(1-\alpha)+\frac{t_0}{t}h-r_2\right]z\Phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)$$

$$+\left\{\left[r_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right)-(h+p)G\left(\frac{t_0}{t}\right)\right\}\int_0^{z/g(t_0/t)}b\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]\phi(b)db+[pG(1)-\alpha r_1]m \tag{86}$$

$$\frac{dH_1(z)}{dz}=c_1-p-r_1(1-\alpha)$$

$$+\left[p+r_1(1-\alpha)+\frac{t_0}{t}h-r_2\right]\Phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)+(h+p)\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db \tag{87}$$

$$\frac{d^2H_1(z)}{dz^2}=\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-r_2\right]\phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)\frac{1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\geqq 0 \tag{88}$$

$$H_1'(0)=c_1-p-r_1(1-\alpha)<0 \tag{89}$$

$z>R_1$ の場合 $(t_0\neq 0)$

(iv) $z/g\left(\dfrac{t_0}{t}\right)\leqq b<(z+R_2)/g\left(\dfrac{t_0}{t}\right)$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t}\left[bg\left(\frac{T}{t}\right)-z\right]dT=b\left[G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right]-z\left[1-g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right]$$

$$C(b,z,x)=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)-r_1z-\alpha r_1(b-z)$$

$$=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]z+(h+p)\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]$$

$$+[pG(1)-\alpha r_1]b-c_1x$$

(v) $b\geqq(z+R_2)/g\left(\dfrac{t_0}{t}\right)$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t}\left[bg\left(\frac{T}{t}\right)-z\right]dT=b\left[G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right]-z\left[1-g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right]$$

$$C(b,z,x)=c_1(z-x)+hI_1(b,z)+pI_2(b,z)-r_1z-\alpha r_1(b-z)$$

$$=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]z+(h+p)\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]+[pG(1)-\alpha r_1]b-c_1x$$

したがって，$E\{C(B,z,x)\}$ は

$$E\{C(B,z,x\}=\int_0^{z-R_1}C(b,z,x)\phi(b)db+\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(t_0/t)}C(b,z,x)\phi(b)db$$

$$+\int_{(z-R_1)/g(t_0/t)}^{z/g(t_0/t)}C(b,z,x)\phi(b)db+\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}C(b,z,x)\phi(b)db$$

$$=-c_1x+H_2(z) \tag{90}$$

$$H_2(z)=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]z+[h+p+r_1(1-\alpha)](z-R_1)\phi(z-R_1)$$

$$-\left[r_1(1-\alpha)+p+\frac{t_0}{t}h-r_2\right](z-R_1)\Phi\left(\frac{z-R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)$$

$$+\left[r_1(1-\alpha)+p+\frac{t_0}{t}h-r_2\right]z\Phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)+[pG(1)-\alpha r_1]m$$

$$-[(h+p)G(1)+r_1(1-\alpha)]\int_0^{z-R_1}b\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(t_0/t)}\left[(z-R_1)g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\right)b\right]\phi(b)db$$

$$+\left\{\left[r_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]g\left(\frac{t_0}{t}\right)-(h+p)\right\}\int_{(z-R_1)/g(t_0/t)}^{z/g(t_0/t)}b\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]\phi(b)db \tag{91}$$

$$\frac{dH_2(z)}{dz}=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]+[h+p+r_1(1-\alpha)]\Phi(z-R_1)$$

$$+\left[r_2-r_1(1-\alpha)-p-\frac{t_0}{t}h\right]\Phi\left(\frac{z-R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)+\left[r_1(1-\alpha)+p+\frac{t_0}{t}h-r_2\right]\Phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)$$

$$+(h+p)\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(t_0/t)}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db \tag{92}$$

$$H_2'(R_1)=[c_1-p-r_1(1-\alpha)]+\left[r_1(1-\alpha)+p+\frac{t_0}{t}r_1-r_2\right]\Phi\left(\frac{R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)$$

$$+(h+p)\int_{R_1/g(t_0/t)}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{R_1}{b}\right)\phi(b)db \tag{93}$$

$$\lim_{z\to\infty}H_2'(z)=c_1+h>0 \tag{94}$$

$$\frac{d^2H_2(z)}{dz^2}=r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)+\left\{\left[r_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]\phi\left(\frac{z-R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)\right.$$

$$\left.+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-r_2\right]\phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)\right\}\frac{1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$+(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(t_0/t)}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\}$$

$$=r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)+\left\{\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-r_2\right]\right.$$

$$\left.\times\left[\phi\left(\frac{z}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)-\phi\left(\frac{z-R_1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}\right)\right]\right\}\frac{1}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$+(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(t_0/t)}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(t_0/t)}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\} \tag{95}$$

$r_1(1-\alpha)+(1-t_0/t)\,p-r_2>0$ であるから $\phi(z)$ が増加関数であれば，$H''(z)\geqq 0$ となることは明らかである。また，補題 6.1～6.3 および注意 6.1 が成立することを示すことができる。ここでは，補題 6.3 で $\phi(z)$ が峰が一つの単純な分布で，$r_2>r_1(1-\alpha)(1-g(t_0/t))+(1-t_0/t)p$ のとき，$H_2''(z)\geqq 0$ が成立することを証明しておく。

証明

$z_0g(t_0/t)<z_0g(t_0/t)+R_1\leqq z_0+R_1$ に注目すると，

$z<z_0g(t_0/t)$ ならば $z/g(t_0/t)<z_0$ となるから，$\phi(z/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$z<z_0g(t_0/t)+R_1$ なら $(z-R_1)/g(t_0/t)<z_0$ となるから，$\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$z<z_0+R_1$ ならば $(z-R_1)<z_0$ となるから，$\phi(z-R_1)$ は z の増加関数である。

以上のことに注意して，z_0 の大きさについて次の 2 つの場合にわけて証明する。

(ｉ) $z_0>R_1/g(t_0/t)$

このとき，$R_1<z_0g(t_0/t)$ となる。

i) $R_1<z<z_0g(t_0/t)$ のとき，$0<z-R_1\leqq(z-R_1)/g(t_0/t)<z/g(t_0/t)<z_0$ となるから，$\phi(z-R_1)$，$\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ および $\phi(z/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$-\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$は z の減少関数となる。したがって

$$H_2''(z)\geqq r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)$$

$$+\left\{\left[r_2-r_1(1-\alpha)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-r_2\right]\right\}\frac{\phi\left(z/g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$=r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)$$

$$\geqq 0$$

ii) $z_0 g(t_0/t) \leqq z < z_0 g(t_0/t) + R_1$ のとき，$0 < z - R_1 \leqq (z - R_1)/g(t_0/t) < z_0$，$z/g(t_0/t) \geqq z_0$ となるから，$\phi(z - R_1)$ および $\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$\phi(z/g(t_0/t))$ および $-\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$ は z の減少関数となる。したがって

$$H_2''(z) \geqq r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)$$
$$+\left\{\left[r_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right] + \left[r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - r_2\right]\right\}\frac{\phi\left(z/g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$
$$= r_1(1-\alpha)\phi(z-R_1)$$
$$\geqq 0$$

iii) $z_0 g(t_0/t) + R_1 \leqq z < z_0 + R_1$ のとき，$0 < z - R_1 < z_0$，$z_0 \leqq (z - R_1)/g(t_0/t) < z/g(t_0/t)$ より $\phi(z - R_1)$ および $-\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$ および $\phi(z/g(t_0/t))$ は z の減少関数となる。したがって

$$H_2''(z) \geqq \left\{r_1(1-\alpha)g\left(\frac{t_0}{t}\right) + \left[r_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]\right\}\frac{\phi(z-R_1)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$
$$+\left[r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - r_2\right]\frac{\phi(z/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$
$$= \left[r_2 - r_1(1-\alpha)\left(1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]\frac{\phi(z-R_1)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$
$$+\left[r_1(1-\alpha) + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - r_2\right]\frac{\phi(z/g(t_0/t))}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$
$$\geqq 0$$

$t_0 = t$ のとき，この場合は生じない。

iv) $z \geqq z_0 + R_1$ のとき $z_0 \leqq z - R_1 \leqq (z - R_1)/g(t_0/t) < z/g(t_0/t)$ より $\phi(z - R_1)$，$\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$ および $\phi(z/g(t_0/t))$ は z の減少関数，$-\phi((z - R_1)/g(t_0/t))$ は z の増加関数となる。したがって

$$H_2''(z) \geqq \left\{r_1(1-\alpha)g\left(\frac{t_0}{t}\right) + \left[r_2 - r_1(1-\alpha) - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]\right\}\frac{\phi(z-R_1)}{g\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$$+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-r_2\right]\frac{\phi(z/g(t_0/t))}{g\left(\dfrac{t_0}{t}\right)}$$

$$=\left[r_2-r_1(1-\alpha)\left(1-g\left(\frac{t_0}{t}\right)\right)-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]\frac{\phi(z-R_1)}{g\left(\dfrac{t_0}{t}\right)}$$

$$+\left[r_1(1-\alpha)+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-r_2\right]\frac{\phi(z/g(t_0/t))}{g\left(\dfrac{t_0}{t}\right)}$$

$$\geqq 0$$

（ii） $0<z_0\leqq R_1/g(t_0/t)$

このとき，$0<z_0g(t_0/t)\leqq R_1<z_0g(t_0/t)+R_1$ となる。$z>R_1$ に対して $z_0\leqq R_1/g(t_0/t)<z/g(t_0/t)$ より，$\phi(z/g(t_0/t))$ は z の減少関数，

i) $z_0g(t_0/t)<z<z_0g(t_0/t)+R_1$ のとき，$R_1<z<z_0g(t_0/t)+R_1$ となる。$0<z-R_1<(z-R_1)/g(t_0/t)<z_0$ より，$\phi(z-R_1)$ および $\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$-\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は減少関数となる。よって (i)-ii) より $H_2''(z)\geqq 0$

ii) $z_0g(t_0/t)+R_1\leqq z<z_0+R_1$ のとき，$0<z-R_1<z_0$，$z_0\leqq(z-R_1)/g(t_0/t)<z/g(t_0/t)$ より $\phi(z-R_1)$ および $-\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の増加関数，$\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ および $\phi(z/g(t_0/t))$ は z の減少関数となる。したがって (i)-iii) より $H_2''(z)\geqq 0$

iii) $z\geqq z_0+R_1$ のとき，$z_0\leqq z-R_1\leqq(z-R_1)/g(t_0/t)<z/g(t_0/t)$ より，$\phi(z-R)$，$\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ および $\phi(z/g(t_0/t))$ は z の減少関数，$-\phi((z-R_1)/g(t_0/t))$ は z の増加関数となる。したがって (i)-iv) より $H_2''(z)\geqq 0$ ［証終］

非凸期待費用関数

$H_2''(z)\geqq 0$ が成立しない場合は，$E\{C(B,z,x)\}$ は z の下に凸な関数とならない。しかし，$H_1'(0)=c_1-c_2-(t_0/t)p<0$ で $H(z)$ は原点の近傍で減少の状態にあり，$F_k(z)$ $(k=1,\cdots,N-1)$ も $F_k'(0)=H_1'(0)-\alpha c<0$ より原点の近傍で減少の状態にある。与えられた k に対して，(1) $H_1'(R_1)>0$，$F_1^{1\prime}(R_1)>0,\cdots,F_{k-1}^{1\prime}(R_1)>0$ (2) $H_1'(R_1)>0$，$F_1^{1\prime}(R_1)>0,\cdots,F_{k-2}^{1\prime}(R_1)>0$，$F_{k-1}^{1\prime}(R_1)\leqq 0,\cdots,(k)$ $H_1'(R_1)>0$，$F_1^{1\prime}(R_1)\leqq 0,\cdots,F_{k-1}^{1\prime}(R_1)\leqq 0$ の k 個の場合の $F_{k-1}^1(z)$，$F_{k-1k-1}^2(z),\cdots$，$F_{k-11}^2(z)$ は非凸関数となる。もし，z_{ki} $(i=0,1,\cdots)$ で $F_{k-1}^1(z)$ が極小値をとるならば，そのとき $F_{k-1}^{1\prime}(z_{ki})=0$，$F_{k-1}^{1\prime\prime}(z_{ki})>0$，$F_{k-1}^1(0)$ は $F_{k-1}^{1\prime}(0)<0$ より極小値ではない。

いま，$F_{k-1}^1(z)$ が図 6.3 に示されているものとする。z_{k0}，z_{k1}，および z_{k2} は極小値である（図 6.2 参照）。

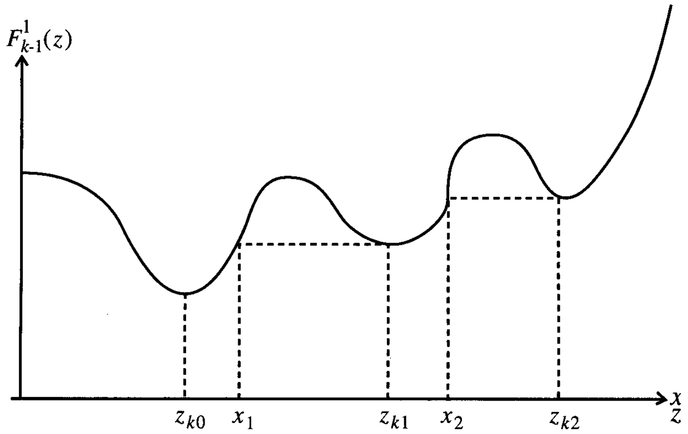

図6.3

このとき，最適購入政策はつぎのようになる。

(i)　$x < z_{k0}$ ならば　　$z_{k0} - x$ だけ購入する

(ii)　$z_{k0} < x < x_1$ ならば　　購入しない

(iii)　$x_1 < x < z_{k1}$ ならば　　$z_{k1} - x$ だけ購入する

(iv)　$z_{k1} < x < x_2$ ならば　　購入しない

(v)　$x_2 < x < z_{k2}$ ならば　　$z_{k2} - x$ だけ購入する

(vi)　$z_{k2} < x$ ならば　　購入しない

証明

(i)　$x < z_{k0}$ ならば　　$F^1_{k-1}(z_{k0}) < F^1_{k-1}(x)$

(ii)　$z_{k0} < x < x_1$ ならば　　$F^1_{k-1}(x) < F^1_{k-1}(z) \quad (x < z < x_1)$

(iii)　$x_1 < x < z_{k1}$ ならば　　$F^1_{k-1}(z_{k1}) < F^1_{k-1}(x)$

(iv)　$z_{k-1} < x < x_2$ ならば　　$F^1_{k-1}(x) < F^1_{k-1}(z) \quad (x < z < x_2)$

(v)　$x_2 < x < z_{k2}$ ならば　　$F^1_{k-1}(z_{k2}) < F^1_{k-1}(x)$

(vi)　$z_{k2} < x$ ならば　　$F^1_{k-1}(x) < F^1_{k-1}(z) \quad (x < z < \infty)$

[証終]

$z^i_{kj} > 0\ (i = 0, 1\cdots)$ で $F^2_{k-1j}(z)\ (j = 1,\cdots,k-1)$ が極小値をとるならば $F^{2\prime}_{k-1j}(z^i_{kj}) = 0$，$F^{2\prime\prime}_{k-1j}(z^i_{kj}) > 0$，$F^2_{k-1j}(0)$ は $F^{2\prime}_{k-1j}(0) < 0$ より極小値でない。

いま，与えられた k と j に対して，$F^2_{k-1j}(z)$ が図 6.4 に示されているものとする。z^0_{kj}，z^1_{kj} および z^2_{kj} は極小値である（図 6.4 参照）

このとき，最適購入政策はつぎのようになる。

(i)　$x < z^0_{kj}$ ならば　　$z^0_{kj} - x$ だけ購入する

(ii)　$z^0_{kj} < x < x_1$ ならば　　購入しない

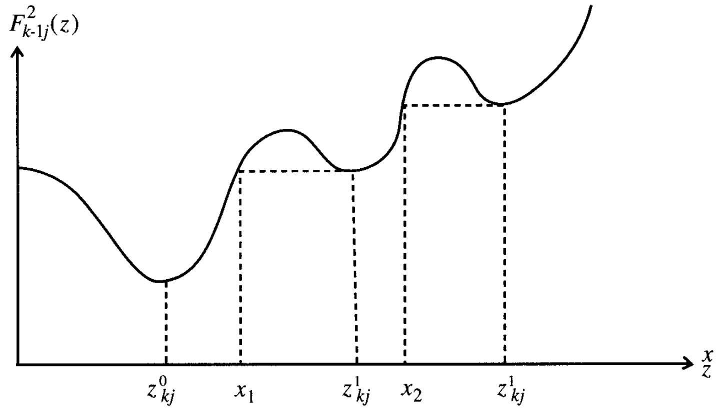

図6.4

(iii)　$x_1 < x < z^1_{kj}$ ならば　　$z^1_{kj} - x$ だけ購入する

(iv)　$z^1_{kj} < x < x_2$ ならば　　購入しない

(ｖ)　$x_2 < x < z^2_{kj}$ ならば　　$z^2_{kj} - x$ だけ購入する

(vi)　$z^2_{kj} < x$ ならば　　購入しない

証略

その他の応用例

応用２のモデルでは過剰需要は次期の発注量でみたされると仮定したので $z \geqq 0$ となったが，この仮定をはずすと，z の値は負になりうる。この場合には，(ｉ) $z < -R_2$，(ii) $-R_2 \leqq z < 0$，(iii) $0 \leqq z \leqq R_1$，(iv) $z > R_1$，のケースについて $E\{C(B, z, x)\}$ を計算する必要が生じる。この場合には $H(z)$ を

$$H(z) = \begin{cases} H_1(z) & z < -R_2 \\ H_2(z) & -R_2 \leqq z < 0 \\ H_3(z) & 0 \leqq z \leqq R_1 \\ H_4(z) & z > R_1 \end{cases} \tag{96}$$

で定義し，解析しなければならない。

また，時点 t_0 で売れ残りがあると，供給者は R_1 以内で引きとるとしたが，これを R_1 以上の売れ残りがあると，きめられた在庫水準 R_0 までの在庫を引きとるに変更し，t_0 時点で品切れがあると，ある許容範囲 R_2 以内であれば，ただちに追加発注し，即時に入荷できるものとしたがこれを R_2 以上品切れがあると，R_3 単位（$R_3 > R_2$）追加発注でることに変更すると，z のとりうる範囲（応用例２とは異る）で $E\{C(B, z, x)\}$ が異るタイプの z の関数となる。つまり供給者と購入者の間の契約案件に依存して多種類の１期間の期待費用関数を考察する必要が生じる。この問題を解決するためには，一般に $H(z)$ を

$$H(z)=\begin{cases} H_1(z) & z<a_1 \\ H_2(z) & a_1 \leqq z < a_2 \\ \vdots & \\ H_{k-1}(z) & a_{k-2} \leqq z < a_{k-1} \\ H_k(z) & z \geqq a_{k-1} \end{cases} \tag{97}$$

で定義し，$H(z)$ の性質および上の $H(z)$ を用いた $f_n(x)$ の性質を調べる必要が生じる。これについては既に議論されているが[11]，第３節～第５節で述べた詳細な検討はされていない。これは今後の課題である。

む す び

関数方程式 $f_n(x)=\underset{z\geqq x}{\mathrm{Min}}\left\{-c_1x+H(z)+\alpha\int_0^\infty f_{n-1}(z-b)\phi(b)db\right\}$ において $H(z)$ が２つの異る関数から構成されている場合の $f_n(x)$ および関数方程式をみたす z の値 $z_n(x)$ の性質について詳細に検討し，それが多くの動的在庫モデルに対応していること示した。式 (97) で定義された $H(z)$ を用いた $f_n(x)$ および $z_n(x)$ の性質について第３節～第５節で議論したような詳細な検討が必要であり，この検討によって応用範囲が広がると思われる。

参 考 文 献

1) Kabak, I. W.: "Partial Returns in the Single Period Inventory Model," IE News, **19** (2), 1984. pp. 1–3.
2) 徂徠三十六，有薗育生，大田　宏：「返却および追加注文を許す一期間モデルの解法」日本経営工学会誌，**37** (2), 1986, pp. 100–105.
3) 児玉正憲，北原貞輔：「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究。**47** (5–6), 九州大学経済学会，1983, pp. 49–72.
4) 児玉正憲：「種々の需要形態に関する確率的在庫モデル」経済学研究，**51** (5), 九州大学経済学会，1986, pp. 35–44.
5) ———：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅰ）」経済学研究，**55** (6), 九州大学経済学会，1990, pp. 31–48.
6) ———：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅱ）」経済学研究，**56** (2), 九州大学経済学会，1990, pp. 277–293.
7) ———：「ある非凸期待費用関数の最適政策（Ⅰ）」経済学研究，**57** (2), 九州大学経済学会，1991, pp. 1–26.
8) ———：「ある確率的システムの最適政策（Ⅰ）」経済学研究，**58** (2), 九州大学経済学会，1992, pp. 35–50.
9) ———：「ある非凸期待費用関数の最適政策（Ⅱ）」経済学研究，**57** (3–4), 九州大学経済学会，1991, pp. 175–198.
10) ———：「ある確率システムの最適政策（Ⅱ）」経済学研究，**58** (3), 九州大学経済学会，1993, pp. 17–27.
11) 児玉正憲：Some Probabilistic Inentory Problems with Various Demand Pattern, Journal of Information & Optimization Science, **17** (1), 1996, pp. 17–48.
12) Naddor, E: Inventory System, John Wiley, 1966.
13) 児玉正憲：生産・在庫管理システムの基礎，九州大学出版会，1996, pp. 224～228を参照