区分的費用関数をもつ動的在庫モデル（I）

児　玉　正　憲

（受付　1997年10月13日）

目　　　次

は　し　が　き

本論文では費用関数が確率変数の実現値と決定変数に依存する場合の多期間在庫問題を考察する。一期間モデルについては，期待費用最大化[1,2]あるいは期待費用最小化問題[3,4]として考察され，具体的な在庫問題が解決された[5,6]。さらに費用関数の数学的一般化がなされ解析されている[7,8]。多期間モデルにも拡張され，最適政策の性質が検討されている[9,10]。多期間モデルの場合，最適政策，期待費用関数…を既知の関数で陽に表現することは容易ではなく，なされていない。本論文では，必

1）Kabak, I. W.: "Partial Returns in the Single Period Inventory Model," IE News, **19**(2), 1984, pp. 1–3.

2）徂徠三十六，有薗育生，大田　宏：「返却および追加注文を許す一期間モデルの解法」日本経営工学会誌，**37**(2), 1986, pp. 100–105.

3）児玉正憲，北原貞輔：「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究，**47**(5–6)，九州大学経済学会，1983, pp. 49–72.

4）児玉正憲：「種々の需要形態に関する確率的在庫モデル」経済学研究，**51**(5), 九州大学経済学会，1986, pp. 35–44.

5）――――：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（I）」経済学研究，**55**(6)，九州大学経済学会，1990, pp. 31–48.

6）――――：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（II）」経済学研究，**56**(2)，九州大学経済学会，1990, pp. 277–293.

7）――――：「ある非凸期待費用関数の最適政策（I）」経済学研究，**57**(2)，九州大学経済学会，1991, pp. 1–26.

8）――――：「ある確率的システムの最適政策（I）」経済学研究，**58**(2)，九州大学経済学会，1992, pp. 35–50.

9）――――：「ある非凸期待費用関数の最適政策（II）」経済学研究，**57**(3–4)，九州大学経済学会，1991, pp. 175–198.

10）――――：「ある確率的システムの最適政策(II)」経済学研究，**58**(3)，九州大学経済学会，1993, pp. 17–27.

要な関数を既知の関数で陽に表現することを可能な限り試みる。第1節では，数学モデルを提示し，第2，第3節で数学モデルの性質を検討し，第4節で具体解，第5節で一般解を与える。最後に，第6節で具体的な応用例として在庫問題を考察する。

1. 数学モデル

z の実数値関数 $H(z)$，定数 $c>0$，$0<\alpha<1$，および実数 x を用いて，$f_k(x), F_k(x)\ (k=1,2,\cdots,N)$ を次の式で定義する

$$f_1(x)=\operatorname*{Min}_{z\geq x}\{-cx+H(z)\}$$

$$f_k(x)=\operatorname*{Min}_{z\geq x}\left\{-cx+H(z)+\alpha\int_0^{\infty}f_{k-1}(z-b)\,\phi(b)\,db\right\},\qquad k=2,3,\cdots,N \tag{1}$$

$$F_{k-1}(z)=H(z)+\alpha\int_0^{\infty}f_{k-1}(z-b)\,\phi(b)\,db,\qquad f_0(\cdot)=0\quad k=1,2,\cdots,N \tag{2}$$

ここに，$\phi(b)$ は実確率変数 B の確率密度関数で $b<0$ に対して $\phi(b)=0$ とする。

$H(z)$ の関数形が z のとる値によって，次のように異なるものとする。

$$H(z)=\begin{cases}H_1(z) & z\leq R_1\\ H_2(z) & z>R_1\end{cases} \tag{3}$$

このとき，

$$F_{k-1}(z)=\begin{cases}H_1(z)+\alpha\int_0^{\infty}f_{k-1}(z-b)\,\phi(b)\,db & z\leq R_1\\ H_2(z)+\alpha\int_0^{\infty}f_{k-1}(z-b)\,\phi(b)\,db & z>R_1\end{cases} \tag{4}$$

となる。$k=1,2,\cdots,N$ に対して $F^1_{k-1}(z)$ および $F^2_{k-1}(z)$ を次の式で定義する

$$F^1_{k-1}(z)=H_1(z)+\alpha\int_0^{\infty}f_{k-1}(z-b)\,\phi(b)\,db,\qquad (z\leq R_1) \tag{5}$$

$$F^2_{k-1}(z)=H_2(z)+\alpha\int_0^{\infty}f_{k-1}(z-b)\,\phi(b)\,db,\qquad (z>R_1) \tag{6}$$

2. 数学的性質（1）

応用例との関連から，$H_i(z)\ (i=1,2)$ を次のように特定化しよう。

仮定 1. $H_i(z)\ (i=1,2)$ は2階微分可能な凸関数で，$H_1'(R_1)=H_2'(R_1)$, $\lim_{z\to-\infty}H_1'(z)<0$, $\lim_{z\to\infty}H_2'(z)>c$.

仮定1のもとで，次の再帰式が成り立つ

定理2.1

$$\begin{aligned}f_1(x)&=-cx+H(\bar{x}_1), & x<\bar{x}_1\\ &=-cx+H(x), & x\geq\bar{x}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_k(x)&=-cx+H(\bar{x}_k)+\alpha\int_0^{\infty}f_{k-1}(\bar{x}_k-b)\,\phi(b)\,db, & x<\bar{x}_k\quad k=2,3,\cdots,N\\ &=-cx+H(x)+\alpha\int_0^{\infty}f_{k-1}(x-b)\,\phi(b)\,db, & x\geq\bar{x}_k\quad k=2,3,\cdots,N\end{aligned}$$

$$f_1'(x) = -c, \qquad x < \bar{x}_1$$
$$= -c + H'(x), \qquad x \geq \bar{x}_1$$
$$\lim_{x\to\infty} f_1'(x) > 0$$
$$f_k'(x) = -c, \quad x < \bar{x}_k \quad k = 2,\cdots,N$$
$$= -c + H'(x) + \alpha\int_0^\infty f_{k-1}'(x-b)\,\phi(b)\,db, \quad x \geq \bar{x}_k \quad k = 2,\cdots,N$$
$$\lim_{x\to\infty} f_k'(x) > 0$$
$$f_1''(x) = 0, \qquad x < \bar{x}_1$$
$$= H''(x), \qquad x > \bar{x}_1$$
$$f_k''(x) = 0, \qquad x < \bar{x}_k$$
$$= H''(x) + \alpha\int_0^\infty f_{k-1}''(x-b)\,\phi(b)\,db, \quad x > \bar{x}_k, \quad x \neq R_1 \quad k = 2,\cdots,N$$

ここに，$x = R_1, x = \bar{x}_k\,(k = 1, 2,\cdots, N)$ において，$f_k'(x)$ の左微係数および右微係数は存在する。また，$\bar{x}_k$ は次の各方程式の唯一の根である

$$H'(z) + \alpha\int_0^\infty f_{k-1}'(z-b)\,\phi(b)\,db = 0 \qquad k = 1,\cdots,N \tag{7}$$

証明（i） $k=1$ のときは，仮定1より $H'(\bar{x}_1)=0$ となる唯一の根 $\bar{x}_1$ が存在し，その点で $H(z)$ が最小となることは明らかである。$x<\bar{x}_1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ H(z)=H(\bar{x}_1)$，よって $f_1(x)=-cx+H(\bar{x}_1)$，$x\geq\bar{x}_1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ H(z)=H(x)$，よって $f_1(x)=-cx+H(x)$。また，仮定1より $x=R_1$，$x=\bar{x}_1$ で $f'(x)$ の左微係数および右微係数は存在する。もし，$\beta\leq x\leq\gamma$ で $H'(x)=0$ となるときは，$\bar{x}_1=\beta$ とする。以下で唯一の根を議論するときはこのような意味である。

（ii） 定理2.1が自然数 $k=m$ で成立していると仮定すると，

$$f_m(x) = -cx + H(\bar{x}_m) + \alpha\int_0^\infty f_{m-1}(\bar{x}_m-b)\,\phi(b)\,db \qquad x < \bar{x}_m$$
$$= -cx + H(x) + \alpha\int_0^\infty f_{m-1}(x-b)\,\phi(b)\,db \qquad x \geq \bar{x}_m$$
$$f_m'(x) = -c \qquad x < \bar{x}_m$$
$$= -c + H'(x) + \alpha\int_0^\infty f_{m-1}'(x-b)\,\phi(b)\,db \qquad x \geq \bar{x}_m$$
$$\lim_{x\to\infty} f_m'(x) > 0$$
$$f_m''(x) = 0 \qquad x < \bar{x}_m$$
$$= H''(x) + \alpha\int_0^\infty f_{m-1}''(x-b)\,\phi(b)\,db \qquad x > \bar{x}_m, \quad x \neq R_1$$

が成り立つ。

ここに $\bar{x}_m$ は次の方程式の唯一の根である。

$$F_{m-1}'(x) = H'(x) + \alpha\int_0^\infty f_{m-1}'(x-b)\,\phi(b)\,db = 0$$

このとき，

$$\lim_{z\to-\infty} F'_m(z) = \lim_{z\to-\infty} H'(z) - \alpha c < 0$$
$$\lim_{z\to\infty} F'_m(z) > \lim_{z\to\infty} H'(z) > 0$$
が成立し，$F''_m(z)$ は $z = R_1$，を除いて非負で，これらの点では $F'_m(z)$ の左微係数および右微係数は存在し，非負であるから $F'_m(z)$ は非減少関数である。したがって，$F'_m(z) = 0$ は唯一の根 $\bar{x}_{m+1}$ をもち，$z = \bar{x}_{m+1}$ で $F_m(z)$ は最小となる。また，$x < \bar{x}_{m+1}$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_m(z) = F_m(\bar{x}_{m+1})$，よって $f_{m+1}(x) = -cx + F_m(\bar{x}_{m+1})$。$x \geq \bar{x}_{m+1}$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_m(z) = F_m(x)$，よって $f_{m+1}(x) = -cx + F_m(x)$。その他は，仮定1および帰納法の仮定より明らかである。したがって $k = m+1$ のとき定理2.1は成立する。

定理2.2

(i)　$\bar{x}_{k+1} \geq \bar{x}_k$

(ii)　$f'_{k+1}(x) \leq f'_k(x) \qquad x \leq \bar{x}_{k+1}$

また，定数 $h > 0$ に対して，$\lim_{z\to\infty} H'(z) = c + h$ ならば

(iii)　$-c \leq f'_1(x) < h$

$$-\left[c + \frac{h(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha}\right] < f'_k(x) - f'_{k-1}(x) \leq 0 \qquad x \leq \bar{x}_k \quad k \geq 2$$

$$-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\{c(1-\alpha)(1-\alpha^{k-1}) + h[1-\alpha^{k-1} + (k-1)(\alpha-1)\alpha^{k-2}]\} \leq f'_k(x) - f'_{k-1}(x) \leq \alpha^{k-1}h$$

$$x > \bar{x}_k \quad k \geq 2$$

証明　(i)，(ii) の証明　i) $k = 1$ のとき，$F'_1(x)$ は非減少関数で $F'_1(\bar{x}_2) = 0$，また，

$$F'_1(\bar{x}_1) = H'(\bar{x}_1) + \alpha\int_0^\infty f'_1(\bar{x}_1 - b)\,\phi(b)\,db = -\alpha c < 0$$

であるから $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$，

$x \leq \bar{x}_1$ ならば $f'_1(x) = f'_2(x) = -c$，$\bar{x}_1 < x \leq \bar{x}_2$ ならば $f'_2(x) = -c, f'_1(x) = -c + H'(x) \geq -c$ したがって $x \leq \bar{x}_2$ ならば $f'_2(x) \leq f'_1(x)$

ii)　(i) と (ii) が自然数 $k = m$ で成立していると仮定すると

$\bar{x}_{m+1} \geq \bar{x}_m$

$f'_{m+1}(x) \leq f'_m(x) \qquad x \leq \bar{x}_{m+1}$

が成立する。このとき

$$F'_{m+1}(x) = H'(x) + \alpha\int_0^\infty f'_{m+1}(x-b)\,\phi(b)\,db$$

は非減少関数で，$F'_{m+1}(\bar{x}_{m+2}) = 0$ であるから

$$F'_{m+1}(\bar{x}_{m+1}) = H'(\bar{x}_{m+1}) + \alpha\int_0^\infty f'_{m+1}(\bar{x}_{m+1} - b)\,\phi(b)\,db$$
$$\leq H'(\bar{x}_{m+1}) + \alpha\int_0^\infty f'_m(\bar{x}_{m+1} - b)\,\phi(b)\,db = F'_m(\bar{x}_{m+1}) = 0$$

したがって $\bar{x}_{m+1} \leqq \bar{x}_{m+2}$

$x \leq \bar{x}_{m+1}$ ならば $f'_{m+1}(x) = f'_{m+2}(x) = -c$，$\bar{x}_{m+1} < x \leq \bar{x}_{m+2}$ ならば $f'_{m+2}(x) = -c$，$f'_{m+1}(x) = -c + F'_m(x) \geqq -c + F'(\bar{x}_{m+1}) = -c$ したがって $x \leq \bar{x}_{m+2}$ ならば $f'_{m+2}(x) \leq f'_{m+1}(x)$.

(iii) の証明　i) $k = 1$ のとき，$x = R_1$ を除いて $H''(x) \geq 0$，$x = R_1$ で $H'(x)$ は非負の左微係数および右微係数をもち $\lim_{x\to\infty} H'(x) = c + h$，$\lim_{x\to\infty} f'_1(x) = h$ であるから $H'(x) < c + h$，$-c \leq f'_1(x) < h$ を得る。

ii）$k=2$ のとき，（i）より $\bar{x}_1 \leqq \bar{x}_2$，$x \le \bar{x}_2$ ならば $f_2'(x) = -c$，（iii）の i）の結果より $c \ge -f_1'(x) > -h$ したがって，$0 \ge f_2'(x) - f_1'(x) > -(c+h)$

$x < \bar{x}_1$ のとき，$f_1'(x) = -c$，$x \ge \bar{x}_1$ のとき，$f_1'(x) = -c + H'(x)$ であるから，$x > \bar{x}_2$ に対して

$$f_2'(x) - f_1'(x) = \alpha \int_0^{\infty} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db$$

$$= \alpha \int_0^{x-\bar{x}_1} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db + \alpha \int_{x-\bar{x}_1}^{\infty} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db$$

$$\begin{cases} < \alpha h \displaystyle\int_0^{x-\bar{x}_1} \phi(b)\,db - \alpha c \int_{x-\bar{x}_1}^{\infty} \phi(b)\,db \le \alpha h \quad (\because f_1'(x) < h) \\ = -\alpha c + \alpha \displaystyle\int_0^{x-\bar{x}_1} H'(x-b)\,\phi(b)\,db \geqq -\alpha c \end{cases}$$

したがって

$$-\alpha c \le f_2'(x) - f_1'(x) < \alpha h \qquad x > \bar{x}_2$$

iii）（iii）が自然数 $k=m$ で成立していると仮定すると

$$-\left[c + \frac{h(1-\alpha^{m-1})}{1-\alpha}\right] < f_m'(x) - f_{m-1}'(x) \le 0 \qquad x \le \bar{x}_m$$

$$-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\{c(1-\alpha)(1-\alpha^{m-1}) + h[1-\alpha^{m-1}+(l-1)(\alpha-1)^{m-2}]\} \le f_m'(x) - f_{m-1}'(x) < \alpha^{m-1}h \qquad x > \bar{x}_m$$

（i）から $\bar{x}_m \le \bar{x}_{m+1}$

$x \le \bar{x}_m$ ならば $f_m'(x) = f_{m+1}'(x) = -c$，$\bar{x}_m < x \le \bar{x}_{m+1}$ ならば $f_{m+1}'(x) = -c$，$f_m'(x) = -c + F_{m-1}'(x) \ge -c$

また，

$$F_{m-1}''(x) \ge 0, \quad \lim_{x\to\infty} F_{m-1}'(x) = c + \frac{h(1-\alpha^m)}{1-\alpha}, \quad \lim_{x\to\infty} f_m'(x) = \frac{h(1-\alpha^m)}{1-\alpha}$$

であるから，次の不等式を得る

$$F_{m-1}'(x) < c + \frac{h(1-\alpha^m)}{1-\alpha}, \quad -c \le f_m'(x) < \frac{h(1-\alpha^m)}{1-\alpha}$$

したがって，$x \leqq \bar{x}_{m+1}$ に対して

$$-\left[c + \frac{h(1-\alpha^m)}{1-\alpha}\right] < f_{m+1}'(x) - f_m'(x) \le 0$$

$x > \bar{x}_{m+1}$ に対して

$$f_{m+1}'(x) - f_m'(x) = \alpha \int_0^{\infty} [f_m'(x-b) - f_{m-1}'(x-b)]\,\phi(b)\,db$$

$$= \alpha \int_0^{x-\bar{x}_m} [f_m'(x-b) - f_{m-1}'(x-b)]\,\phi(b)\,db + \alpha \int_{x-\bar{x}_m}^{\infty} [f_m'(x-b) - f_{m-1}'(x-b)]\,\phi(b)\,db$$

$$\begin{cases} \le \alpha^m h \displaystyle\int_0^{x-\bar{x}_m} \phi(b)\,db + 0 \cdot \int_{x-\bar{x}_m}^{\infty} \phi(b)\,db \leqq \alpha^m h \\ \ge -\dfrac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\{c(1-\alpha)(1-\alpha^{m-1}) + h[1-\alpha^{m-1}+(l-1)(\alpha-1)]\,\alpha^{m-2}\} \displaystyle\int_0^{x-\bar{x}_m} \phi(b)\,db \\ \quad -\alpha\left[c + h\,\dfrac{(1-\alpha^{m-1})}{1-\alpha}\right] \displaystyle\int_{x-\bar{x}_m}^{\infty} \phi(b)\,db > \dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\{c(1-\alpha)(1-\alpha^m) + h[1-\alpha^m + l(\alpha-1)\,\alpha^{m-1}]\} \end{cases}$$

したがって次の不等式を得る

$$-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\{c(1-\alpha)(1-\alpha^m)+h[1-\alpha^m+l(\alpha-1)\alpha^{m-1}]\}\le f'_{m+1}(x)-f'_m(x)\le\alpha^m h \qquad x>\bar{x}_{m+1}$$

3. 数学的性質（2）

次に $\bar{x}_k\,(k=1,\cdots,N)$ と R_1 の間の関係や，$f_k(x), F_k(x)$ を $H_i(x)\,(i=1,2)$ で表現することを考えよう。$H'_1(R_1)\le 0$ ならば定理2.1より $H'(x)=0$ の根は $H'_2(x)=0$ の根と一致し，$\bar{x}_1\ge R_1$ となる。このとき

$$F_1^{1\prime}(R_1)=H'_1(R_1)+\alpha\int_0^\infty f'_1(R_1-b)\,\phi(b)\,db=H'_1(R_1)-\alpha c<0$$

となり，仮定 1 より $\bar{x}_2>R_1$ となる

帰納法より

$$F'_k(R_1)=H'_1(R_1)+\alpha\int_0^\infty f'_k(R_1-b)\,\phi(b)\,db=H'_1(R_1)-\alpha c<0$$

が証明できるから $\bar{x}_k\ge R_1$ となる。この場合の詳細な解析は拙稿[11)]で行った。ここでは次の仮定のもとで議論しよう。

仮定2.2　$H'_1(R_1)>0$

仮定2.1，2.2および定理2.2の（iii）の仮定のもとで，次の再帰式を得る。

定理3.1

$$\begin{aligned}
f_1(x)&=-cx+H_1(\bar{x}_1^1) && x<\bar{x}_1^1\\
&=-cx+H_1(x) && \bar{x}_1^1\le x<R_1\\
&=-cx+H_2(x) && x\ge R_1\\[6pt]
f'_1(x)&=-c && x<\bar{x}_1^1\\
&=-c+H'_1(x) && \bar{x}_1^1\le x<R_1\\
&=-c+H'_2(x) && x\ge R_1\\[6pt]
f'_1(x)&\ge -c && \lim_{x\to\infty} f'_1(x)=h\\[6pt]
f''_1(x)&=0 && x<\bar{x}_1^1\\
&=H''_1(x) && \bar{x}_1^1<x<R_1\\
&=H''_2(x) && x>R_1
\end{aligned} \tag{8}$$

$x=\bar{x}_1^1$，$x=R_1$ において $f'_1(x)$ の左微係数および右微係数は存在し，非負である。ここに，$\bar{x}_1^1$ は $H'_1(x)=0$ となる唯一の根である。

$k=2$ の場合

1）$F_1^{1\prime}(R_1)>0$

$$\begin{aligned}
f_2(x)&=-cx+F_1^1(\bar{x}_2^1) && x<\bar{x}_2^1\\
&=-cx+F_1^1(x) && \bar{x}_2^1\le x<R_1
\end{aligned}$$

11）児玉正憲：Some Probabilistic Inventory Problems with Various Demand Pattern, Journal of Information & Optimization Science, **17**(1), 1996, pp.17-48.

$$= -cx + F_1^2(x) \qquad x \geq R_1$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= -c & & x < \bar{x}_2^1 \\ &= -c + F_1^{1\prime}(x) & & \bar{x}_2^1 \leq x < R_1 \\ &= -c + F_1^{2\prime}(x) & & x \geq R_1 \end{aligned} \tag{9}$$

$$f_2'(x) \geq -c,\ \lim_{x\to\infty} F_1^{2\prime}(x) = c + (1+\alpha)h,\ \lim_{x\to\infty} f_2'(x) = (1+\alpha)h \tag{10}$$

$$\begin{aligned} f_2''(x) &= 0 & & x < \bar{x}_2^1 \\ &= F_1^{1\prime\prime}(x) & & \bar{x}_2^1 < x < R_1 \\ &= F_1^{2\prime\prime}(x) & & x > R_1 \end{aligned} \tag{11}$$

$f_2''(x)$ は $x=\bar{x}_2^1$, R_1 を除いて存在し，非負，$x=\bar{x}_2^1$, $x=R_1$ で左および右 2 次微係数が存在し，非負　ここに $\bar{x}_2^1\,(<R_1)$ は $F_1^{1\prime}(x)=0$ の唯一の根である。

2）$F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -cx + F_1^2(\bar{x}_2^2) & & x < \bar{x}_2^2 \\ &= -cx + F_1^2(x) & & x \geq \bar{x}_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= -c & & x < \bar{x}_2^2 \\ &= -c + F_1^{2\prime}(x) & & x \geq \bar{x}_2^2 \end{aligned} \tag{12}$$

$$f_2'(x) \geq -c,\ \lim_{x\to\infty} F_1^{2\prime}(x) = c + (1+\alpha)h,\ \lim_{x\to\infty} f_2'(x) = (1+\alpha)h \tag{13}$$

$$\begin{aligned} f_2''(x) &= 0 & & x < \bar{x}_2^2 \\ &= F_1^{2\prime\prime}(x) & & x > \bar{x}_2^2 \end{aligned} \tag{14}$$

$f_2''(x)$ は $x=\bar{x}_2^2$, R_1 を除いて存在し，非負，$x=\bar{x}_2^2$, R_1 で左および右 2 次微係数が存在し非負，ここに $\bar{x}_2^2$ は $F_1^{2\prime}(x)=0$ の唯一の根である。

$k>2$ の場合

1）$F_{k-1}^{1\prime}(R_1) > 0$

$$\begin{aligned} f_k(x) &= -cx + F_{k-1}^1(\bar{x}_k^1) & & x < \bar{x}_k^1 \\ &= -cx + F_{k-1}^1(x) & & \bar{x}_k^1 \leq x < R_1 \\ &= -cx + F_{k-1}^2(x) & & x \geq R_1 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= -c & & x < \bar{x}_k^1 \\ &= -c + F_{k-1}^{1\prime}(x) & & \bar{x}_k^1 \leq x < R_1 \\ &= -c + F_{k-1}^{2\prime}(x) & & x \geq R_1 \end{aligned} \tag{16}$$

$$f_k'(x) \geq -c,\quad \lim_{x\to\infty} F_{k-1}^{2\prime}(x) = c + h\left[\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right],\quad \lim_{x\to\infty} f_k'(x) = h\left[\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right] \tag{17}$$

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= 0 & & x < \bar{x}_k^1 \\ &= F_{k-1}^{1\prime\prime}(x) & & \bar{x}_k^1 < x < R_1 \\ &= F_{k-1}^{2\prime\prime}(x) & & x > R_1 \end{aligned} \tag{18}$$

$f_k''(x)$ は $x=\bar{x}_k^1$, R_1 を除いて存在し，非負，$x=\bar{x}_k^1$, R_1 で左および右 2 次微係数が存在し非負，ここに $\bar{x}_k^1$ は $F_{k-1}^{1\prime}(x)=0$ の唯一の根である。

2) $F_{k-1}^{2\prime}(R_1)\leq 0$

$$\begin{aligned} f_k(x) &= -cx+F_{k-1}^2(\bar{x}_k^2) && x<\bar{x}_k^2 \\ &= -cx+F_{k-1}^2(x) && x\geq \bar{x}_k^2 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= -c && x<\bar{x}_k^2 \\ &= -c+F_{k-1}^{2\prime}(x) && x\geq \bar{x}_k^2 \end{aligned} \tag{20}$$

$$f_k'(k)\geq -c,\quad \lim_{x\to\infty} F_{k-1}^{2\prime}(x)=c+h\left[\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right],\quad \lim f_k'(x)=h\left[\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right] \tag{21}$$

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= 0 && x<\bar{x}_k^2 \\ &= F_{k-1}^{2\prime\prime}(x) && x>\bar{x}_k^2 \end{aligned} \tag{22}$$

$f_k''(x)$ は $x=\bar{x}_k^2$ を除いて存在し非負，$x=\bar{x}_k^2$ で左および右 2 次微係数が存在し非負，ここに $\bar{x}_k^2$ は $F_{k-1}^{2\prime}(x)=0$ の唯一の根である。

証明 (i) $k=1$　仮定より $H_1'(z)=0$ となる唯一の根 $\bar{x}_1^1\,(<R_1)$ が存在し，その点で $H(z)$ が最小となることは明らかである。$x<\bar{x}_1^1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ H(z)=H_1(\bar{x}_1^1)$, よって $f_1(x)=-cx+H_1(\bar{x}_1^1)$, $\bar{x}_1^1\leq x<R_1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ H(z)=H_1(x)$, よって $f_1(x)=-cx+H_1(x)$, $x\geq R_1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ H(z)=H_2(x)$, よって $f_1(x)=-cx+H_2(x)$。

$H_1^{1\prime}(\bar{x}_1^1)=0$, $H_1'(R_1)=H_2'(R_1)$, $\lim_{x\to\infty} H_2'(x)=c+h$, $H_i(z)$ が凸関数で2回微分可能であることを用いると，その他が容易に示される。

(ii) $k=2$　このとき $F_1'(z)$ は凸関数で，

$$\lim_{x\to-\infty} F_1^{1\prime}(x)=\lim_{x\to-\infty} H_1'(x)-\alpha c<0 \qquad \lim_{x\to\infty} F_1^{2\prime}(x)>0$$

であり，また

$$\begin{aligned} F_1^{1\prime}(R_1) &= H_1'(R_1)+\alpha\int_0^\infty f_1'(R_1-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_1'(R_1)+\alpha\left\{\int_0^{R_1-\bar{x}_1^1} f_1'(R_1-b)\,\phi(b)\,db+\int_{R_1-\bar{x}_1^1}^\infty f_1'(R_1-b)\,\phi(b)\,db\right\} \\ &= H_1'(R_1)+\alpha\left\{-c+\int_0^{R_1-\bar{x}_1^1} H_1'(R_1-b)\,\phi(b)\,db\right\} \qquad (\because (8),\ \phi(b)=0\ \ b<0\ \text{より}) \end{aligned}$$

となり，$H_1'(R_1)>0$ より $F_1^{1\prime}(R_1)$ の正負が不明であるから $F_1^{1\prime}(R_1)>0$, $F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0$ の場合を考察すれば十分である（図3.1を参照）。

$F_1^{1\prime}(R_1)>0$ の場合，$F_1^{1\prime}(z)=0$ となる唯一の根 $\bar{x}_2^1\,(<R_1)$ が存在し，その点で $F_1(z)$ が最小となることは明らかである。$x<\bar{x}_2^1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_1(z)=F_1^1(\bar{x}_2^1)$, よって $f_2(x)=-cx+F_1^1(\bar{x}_2^1)$, $\bar{x}_2^1\leq x<R_1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_1(z)=F_1^1(x)$, よって $f_2(x)=-cx+F_1^1(x)$, $x\geq R_1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_1(z)=F_1^2(x)$, よって $f_2(x)=-cx+F_1^2(x)$

$F_1^{1\prime}(\bar{x}_2^1)=0$, $F_1^{1\prime}(R_1)=F_1^{2\prime}(R_1)$ より（9）を得る。$x<\bar{x}_2^1$ に対して $f_2'(x)=-c$, $R_1>x\geq\bar{x}_2^1$ に対して $F_1^{1\prime}(x)\geq 0$, $x\geq R_1$ に対して$F_1^{2\prime}(x)\geq 0$ より $f_2'(x)\geq -c$。

$$\lim_{x\to\infty} F_1^{2\prime}(x)=\lim_{x\to\infty} H_2'(x)+\alpha\lim_{x\to\infty} f_1'(x)=c+h+\alpha h=c+(1+\alpha)h$$

$$\lim_{x\to\infty} f_2'(x)=-c+\lim_{x\to\infty} F_1^{2\prime}(x)=(1+\alpha)h$$

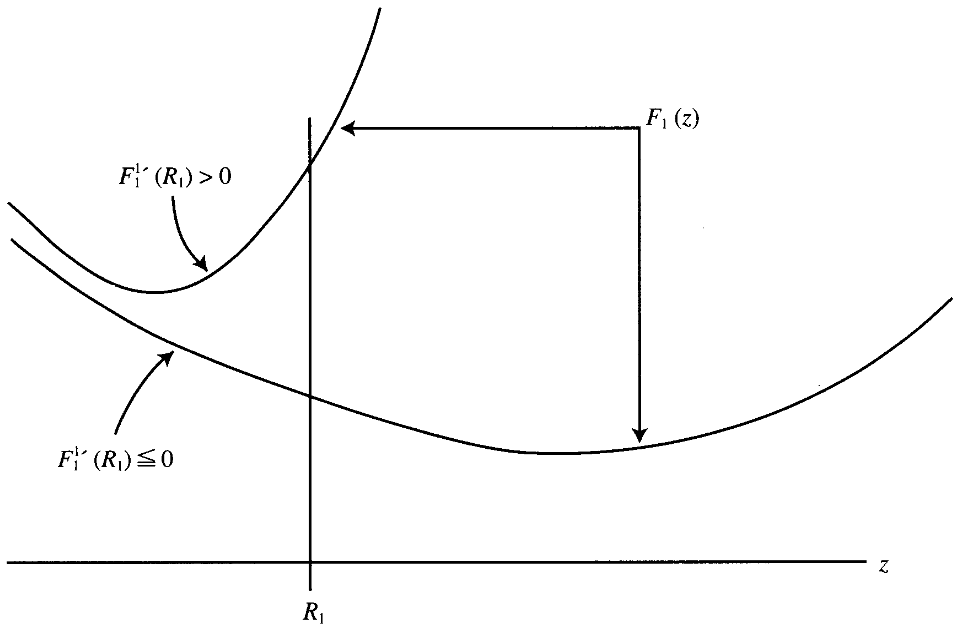

図3.1

が成立するから（10）が示された。

$F_1''(z)$ は $z=R_1$ を除いて存在し，$z=R_1$ で左および右2次微係数が存在し，非負であることおよび $F_1^{1\prime\prime}(\bar{x}_2^1)=0$ は必ずしも成立しないことより（11）は明らかである。

$F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0$ の場合，$F_1^{2\prime}(z)=0$ となる唯一の根 $\bar{x}_2^2(\geq R_1)$ が存在し，その点で $F_1(z)$ が最小となることは明らかである。$x<\bar{x}_2^2$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_1(z)=F_1^2(\bar{x}_2^2)$，よって $f_2(x)=-cx+F_1^2(\bar{x}_2^2)$，$x\geq\bar{x}_2^2$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_1(z)=F_1^2(x)$，よって $f_2(x)=-cx+F_1^2(x)$，

$F_1^{2\prime}(\bar{x}_2^2)=0$ より（12）を得る。（13）が成立することは $F_1^{1\prime}(R_1)>0$ の場合と同様である。（14）が成立することは，$F_1^{2\prime\prime}(\bar{x}_2^2)=0$ が必ずしも成立しないことより明らかである。

（iii） $k>2, k=m$ に対して（15）～（22）が成立していると仮定しよう。

$F_m^{1\prime}(R_1)>0$ の場合，$F_m^{1\prime}(z)=0$ となる唯一の根 $\bar{x}_{m+1}^1$ が存在し，その点で $F_m(z)$ が最小となることは

$$\lim_{x\to-\infty} F_m^{1\prime}(z)=\lim_{x\to-\infty} H_1'(z)-ac<0,\qquad \lim_{x\to\infty} F_m^{2\prime}(z)>0$$

および $F_m^1(z)$ が凸関数であることから明らかである。

$x<\bar{x}_{m+1}^1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_m(z)=F_m^1(\bar{x}_{m+1}^1)$，よって $f_{m+1}(x)=-cx+F_m^1(\bar{x}_{m+1}^1)$，$\bar{x}_{m+1}\leq x<R_1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_m^1(z)$ $=F_m^1(x)$，よって $f_{m+1}(x)-cx+F_m^1(x)$，$x\geq R_1$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_m(z)=F_m^2(x)$，よって $f_{m+1}(x)=-cx+F_m^2(x)$。

$F_m^{1\prime}(\bar{x}_{m+1}^1)=0$，$F_m^{1\prime}(R_1)=F_m^{2\prime}(R_1)$ より $k=m+1$ に対して（16）を得る。

$x<\bar{x}_{m+1}^1$ に対して $f_{m+1}'=-c$，$R_1>x\geq\bar{x}_{m+1}^1$ に対して $F_m^{1\prime}(x)\geq 0$，$x\geq R_1$ に対して $F_m^{2\prime}(x)\geq 0$ より $f_{m+1}'(x)$ $\geq -c$。

$$\lim_{x\to\infty} F_m^{2\prime}(x)=\lim_{x\to\infty} H_2'(x)+\alpha\lim_{x\to\infty} f_m'(x)=c+h+\alpha h\left[\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha}\right]=c+h\left[\frac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} f_{m+1}'(x)=-c+\lim_{x\to\infty} F_m^{2\prime}(x)=h\left[\frac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha}\right]$$

が成立するから，$k=m+1$ のとき（17）は成立する。

$F_m''(z)$ は $z=R_1$ を除いて存在し，非負，$z=R_1$ で左および右 2 次微係数が存在し，非負であることおよび $F_m''(\bar{x}^1_{m+1})=0$ は必ずしも成立しないことより $k=m+1$ のとき（18）は成立する。

$F_m^{1\prime}(R_1)\leq 0$ の場合，$F_m^{2\prime}(z)=0$ となる唯一の根 $\bar{x}^1_{m+1}(>R_1)$ が存在し，その点で $F_m(z)$ が最小となることは，

$$\lim_{z\to\infty} F_m^{1\prime}(z)=\lim_{z\to-\infty} H_1'(z)-\alpha c<0, \qquad \lim_{z\to\infty} F_m^{2\prime}(x)>0$$

および $F_m^2(z)$ が凸関数であることより明らかである。

$x<\bar{x}^2_{m+1}$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_m(z)=F_m^2(\bar{x}^2_{m+1})$，よって $f_{m+1}(x)=-cx+F_m^2(\bar{x}^2_{m+1})$，$x\geq\bar{x}^2_{m+1}$ ならば $\underset{z\geq x}{\mathrm{Min}}\ F_m(z)$ $=F_m^2(x)$，よって $f_{m+1}(x)=-cx+F_m^2(x)$

$F_m^{2\prime}(\bar{x}_{m+1})=0$ より $k=m+1$ に対して（20）が成立する。

$x<\bar{x}^2_{m+1}$ に対して $f'_{m+1}(x)=-c$，$x\geq\bar{x}^2_{m+1}$ に対して $F_m^{2\prime}(x)\geq 0$ より $f'_{m+1}(x)\geq -c$，その他の $k=m+1$ に対する（21）の証明は $F_m^{1\prime}(R_1)>0$ の場合の証明と同様である。

$F_m^{2\prime\prime}(\bar{x}^2_{m+1})=0$ が必ずしも成立しないことより $k=m+1$ に対して（22）は成立する

$F_{m-1}^{1\prime}(R_1)>0$ のとき

$$\begin{aligned}
F_m^{1\prime}(R_1)&=H_1'(R_1)+\alpha\int_0^\infty f_m'(R_1-b)\,\phi(b)\,db\\
&=H_1'(R_1)+\alpha\left\{\int_0^{R_1-\bar{x}^1_m} f_m'(R_1-b)\,\phi(b)\,db+\int_{R_1-\bar{x}^1_m}^\infty f_m'(R_1-b)\,\phi(b)\,db\right\}\\
&=H_1'(R_1)-\alpha c+\alpha\int_0^{R_1-\bar{x}^1_m} F_{m-1}^{1\prime}(R_1-b)\,\phi(b)\,db,
\end{aligned}$$

$$F_{m-1}^{1\prime}(R_1)\geq F_{m-1}^{1\prime}(R_1-b)\geqq F_{m-1}^{1\prime}(\bar{x}^1_m)=0 \qquad 0\leq b\leq R_1-\bar{x}^1_m$$

となるから，$F_m^{1\prime}(R_1)$ の正負は確定せず，$F_m^{1\prime}(R_1)>0$ か $F_m^{1\prime}(R_1)\leq 0$ の場合が生じる。

$F_{m-1}^{1\prime}(R_1)\leq 0$ のとき

$$F_m^{1\prime}(R_1)=H_1'(R_1)+\alpha\int_0^\infty f_m'(R_1-b)\,\phi(b)\,db=H_1'(R_1)-\alpha c$$

となる。ところが

$$\begin{aligned}
0\geq F_{m-1}^{1\prime}(R_1)&=H_1'(R_1)+\alpha\int_0^\infty f_{m-1}'(R_1-b)\,\phi(b)\,db\\
&=\begin{cases} H_1'(R_1)-\alpha c & F_{m-2}^{1\prime}(R_1)\leqq 0\\ H_1'(R_1)-\alpha c+\alpha\displaystyle\int_0^{R_1-\bar{x}^1_{m-1}} F_{m-2}^{1\prime}(R_1-b)\,\phi(b)\,db & F_{m-2}^{1\prime}(R_1)>0,\end{cases}
\end{aligned}$$

$$F_{m-2}^{1\prime}(R_1)\geqq F_{m-2}^{1\prime}(R_1-b)\geqq F_{m-2}^{1\prime}(\bar{x}^1_{m-1})=0 \qquad 0\leqq b\leqq R_1-\bar{x}^1_{m-1}$$

が成り立つから，$H_1'(R_1)-\alpha c\leqq 0$ となり，$F_m^{1\prime}(R_1)\leqq 0$ となる。すなわち $F_{m-1}^{1\prime}(R_1)\leqq 0$ ならば

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F_1^{1\prime}(R_1)>0 \arrow[r] \arrow[dr] & F_2^{1\prime}(R_1)>0 \arrow[r] \arrow[dr] & F_3^{1\prime}(R_1)>0 \arrow[r] & \cdots\ F_{n-1}^{1\prime}(R_1)>0 \arrow[r] \arrow[dr] & F_n^{1\prime}(R_1)>0\\
H_1'(R_1)>0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
 & F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0 \arrow[r] & F_2^{1\prime}(R_1)\leq 0 \arrow[r] & F_3^{1\prime}(R_1)\leq 0 \arrow[r] & \cdots\ F_{n-1}^{1\prime}(R_1)\leq 0 \arrow[r] & F_n^{1\prime}(R_1)\leq 0
\end{tikzcd}$$

図3.2

$F_m^{1\prime}(R_1) \leq 0$ となる。

$F_n^{1\prime}(R_1)$ の符号推移図を図3.2に示す。

$f_k(x)$ を既知の関数 $H_i(x)$ $(i = 1, 2)$ で表現するためには図3.2より次の様に多くの場合に分けて解析する必要がある。

$k = 1$ の場合

1）$H_1'(R_1) > 0$

$k = 2$ の場合

1）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0$

2）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0$

$k \geq 3$ の場合は，$F_{k-1}^2(x)$ は $f_{k-1}(x)$（$(k-1)$ 個の場合に分かれる）に依存してきまるので，あらためて定義する。

$k = 3$ の場合

1）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) > 0$

2）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0$

条件 2）の下での $F_2^2(x)$ を $F_{22}^2(x)$, $F_{22}^{2\prime}(x) = 0$ の唯一の根を $\bar{x}_{32}^2$ とする。

3）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0$

条件 3）の下での $F_2^2(x)$ を $F_{21}^2(x)$, $F_{21}^{2\prime}(x) = 0$ の唯一の根を $\bar{x}_{31}^2$ とする。

$k = 4$ の場合

1）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_3^{1\prime}(R_1) > 0$

2）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_3^{1\prime}(R_1) \leq 0$

条件 2）の下での $F_3^2(x)$ を $F_{33}^2(x)$, $F_{33}^{2\prime}(x) = 0$ の唯一の根を $\bar{x}_{43}^2$ とする。

3）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0, \quad F_3^{1\prime}(R_1) \leq 0$

条件 3）の下での $F_3^2(x)$ を $F_{32}^2(x)$, $F_{32}^{2\prime}(x) = 0$ の唯一の根を $\bar{x}_{42}^2$ とする。

4）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0, \quad F_3^{1\prime}(R_1) \leq 0$

条件 4）の下での $F_3^2(x)$ を $F_{31}^2(x)$, $F_{31}^{2\prime}(x) = 0$ の唯一の根を $\bar{x}_{41}^2$ とする。

⋮

$k = N$ の場合

1）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) > 0, \cdots, F_{N-2}^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_{N-1}^{1\prime}(R_1) > 0$

2）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) > 0, \cdots, F_{N-2}^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_{N-1}^{1\prime}(R_1) \leq 0$

条件 2）の下での $F_{N-1}^2(x)$ を $F_{N-1N-1}^2(x)$, $F_{N-1N-1}^{2\prime}(x) = 0$ の唯一の根を $\bar{x}_{NN-1}^2$ とする。

⋮

N-1）$H_1'(R_1) > 0, \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0, \quad F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0, \cdots, F_{N-2}^{1\prime}(R_1) \leq 0, \quad F_{N-1}^{1\prime}(R_1) \leq 0$

条件 N-1）の下での $F_{N-1}^2(x)$ を $F_{N-12}^2(x)$, $F_{N-12}^{2\prime}(x) = 0$ の唯一の根を $\bar{x}_{N2}^2$ とする。

N） $H_1'(R_1) > 0,\quad F_1^{1\prime}(R_1) \le 0,\quad F_2^{1\prime}(R_1) \le 0, \cdots, F_{N-2}^{1\prime}(R_1) \le 0,\quad F_{N-1}^{1\prime}(R_1) \le 0$

条件N）の下での $F_{N-1}^2(x)$ を $F_{N-11}^2(x)$，$F_{N-11}^{2\prime}(x) = 0$ の唯一の根を $\bar{x}_{N1}^2$ とする。

4. 具　　体　　解

前節では $f_k(x)$ $(k = 1,\cdots, N)$ を再帰式で表現することを考察したが，本節では $f_k(x)$，$f_k'(x)$，$F_k^i(x)$，$F_k^{i\prime}(x)$ $(k = 1,\ldots, N;\ i = 1, 2)$ を既知の関数 $H_i(x)$ $(i = 1, 2)$ で表現することを考えよう。$f_k(x)$ および $f_k'(x)$ はそれぞれ $F_k^i(x)$ および $F_k^{i\prime}(x)$ が与えられれば，ただちに求まるので $\bar{x}_k^i$ に関係がある $F_k^{i\prime}(x)$ を求めておく。

$k = 1$ の場合

すべて，既知の関数 $H_1(x)$，$H_2(x)$ で表現されている（定理3.1の $k = 1$ の場合）

$k = 2$ の場合

1） $H_1'(R_1) > 0,\quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0$

$$\begin{aligned}F_1^{1\prime}(x) &= H_1'(x) + \alpha \int_0^{\infty} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_1'(x) + \alpha \left\{ \int_0^{x-\bar{x}_1^1} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db + \int_{x-\bar{x}_1^1}^{\infty} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db \right\} \\ &= H_1'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}_1^1} H_1'(x-b)\,\phi(b)\,db \qquad (\because (8), \phi(b) = 0 \quad b < 0 \text{ より})\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}F_1^{2\prime}(x) &= H_2'(x) + \alpha \int_0^{\infty} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_2'(x) + \alpha \left\{ \int_0^{x-R_1} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db + \int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_1^1} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db + \int_{x-\bar{x}_1^1}^{\infty} f_1'(x-b)\,\phi(b)\,db \right\} \\ &= H_2'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-R_1} H_2'(x-b)\,\phi(b)\,db + \alpha \int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_1^1} H_1'(x-b)\,\phi(b)\,db\end{aligned} \tag{24}$$

$(\because (8),\quad \phi(b) = 0 \quad b < 0 \text{ より})$

2） $H_1'(R_1) > 0 \quad F_1^{1\prime}(R_1) \le 0$

$F_1^{2\prime}(x)$ は（24）と一致する。

$k = 3$ の場合

1） $H_1'(R_1) > 0 \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0 \quad F_2^{1\prime}(R_1) > 0$

$$\begin{aligned}F_2^{1\prime}(x) &= H_1'(x) + \alpha \int_0^{\infty} f_2'(x-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_1'(x) + \alpha \left\{ -c + \int_0^{x-\bar{x}_2^1} F_1^{1\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db \right\} \qquad (\because (9),\quad \phi(b) = 0 \quad b < 0) \\ &= H_1'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}_2^1} (H_1'(x-b_1) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1\end{aligned}$$

$$+\alpha^2\int_0^{x-\bar{x}_2^1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1}H_1'(x-b_1-b_2)\,\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1 \tag{25}$$

（∵（23）より）

$$F_{22}^{2\prime}(x)=H_2'(x)+\alpha\int_0^{\infty}f_2'(x-b)\,\phi(b)\,db$$

$$=H_2'(x)+\alpha\left\{-c+\int_0^{x-R_1}F_1^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db+\int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_2^1}F_1^{1\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db\right\}\qquad(\because (9)\text{ より})$$

$$=H_2'(x)-\alpha c+\alpha\int_0^{x-R_1}(H_2'(x-b_1)-\alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1+\alpha\int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_2^1}(H_1'(x-b_1)-\alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^2\int_0^{x-R_1}\left(\int_0^{x-R_1-b_1}H_2'(x-b_1-b_2)\,\phi(b_2)\,db_2+\int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_1^1-b_1}H_1'(x-b_1-b_2)\,\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^2\int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_2^1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1}H_1'(x-b_1-b_2)\,\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1 \tag{26}$$

（∵（23），（24）より）

2）$H_1'(R_1)>0\quad F_1^{1\prime}(R_1)>0\quad F_2^{1\prime}(R_1)\leq 0$
$F_{22}^{2\prime}(x)$ は（26）に一致する。

3）$H_1'(R_1)>0\quad F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0\quad F_2^{1\prime}(R_1)\leq 0$

$$F_{21}^{2\prime}(x)=H_2'(x)+\alpha\int_0^{\infty}f_2'(x-b)\,\phi(b)\,db$$

$$=H_2'(x)+\alpha\left\{-c+\int_0^{x-\bar{x}_2^2}F_1^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db\right\}\qquad(\because (12)\text{ より})$$

$$=H_2'(x)-\alpha c+\alpha\int_0^{x-\bar{x}_2^2}(H_2'(x-b_1)-\alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^2\int_0^{x-\bar{x}_2^2}\left(\int_0^{x-R_1-b_1}H_2'(x-b_1-b_2)\,\phi(b_2)\,db_2+\int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_1^1-b_1}H_1'(x-b_1-b_2)\,\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1 \tag{27}$$

従って 1)，2)，3）の場合の $f_3'(x)$ はそれぞれ次式で与えられる。

1）$f_3'(x)=-c\quad x<\bar{x}_3^1$
$\quad=-c+F_2^{1\prime}(x)\qquad \bar{x}_3^1\leqq x<R_1$ (28)
$\quad=-c+F_{22}^{2\prime}(x)\qquad x\geqq R_1$

2）$f_3'(x)=-c\qquad x<\bar{x}_{32}^2$
$\quad=-c+F_{22}^{2\prime}(x)\qquad x\geq\bar{x}_{32}^2$ (29)

3）$f_3'(x)=-c\qquad x<\bar{x}_{31}^2$
$\quad=-c+F_{21}^{2\prime}(x)\qquad x\geq\bar{x}_{31}^2$ (30)

$k=4$ の場合

1）$H_1'(R_1)>0\quad F_1^{1\prime}(R_1)>0\quad F_2^{1\prime}(R_1)>0\quad F_3^{1\prime}(R_1)>0$

$$
\begin{aligned}
F_3^{1\prime}(x) &= H_1'(x) + \alpha \int_0^{\infty} f_3'(x-b)\,\phi(b)\,db \\
&= H_1'(x) + \alpha \left\{ -c + \int_0^{x-\bar{x}_3^1} F_2^{1\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db \right\} \qquad (\because (28),\ \phi(b)=0 \quad b<0 \text{ より}) \\
&= H_1'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}_3^1} (H_1'(x-b_1) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^2 \int_0^{x-\bar{x}_3^1} \left[\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1} (H_1'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \right] \phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^3 \int_0^{x-\bar{x}_3^1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2} H_1'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1
\end{aligned}
$$

(∵ (25) より) (31)

$$
\begin{aligned}
f_4'(x) &= -c && x < \bar{x}_4^1 \\
&= -c + F_3^{1\prime}(x) && \bar{x}_4^1 \le x < R_1 \\
&= -c + F_{33}^{2\prime}(x) && x \ge R_1
\end{aligned}
\qquad (32)
$$

2) $H_1'(R_1) > 0 \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0 \quad F_2^{1\prime}(R_1) > 0 \quad F_3^{1\prime}(R_1) \le 0$

$$
\begin{aligned}
F_{33}^{2\prime}(x) &= H_2'(x) + \alpha \int_0^{\infty} f_3'(x-b)\,\phi(b)\,db \\
&= H_2'(x) = \alpha \left\{ -c + \int_0^{x-R_1} F_{22}^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db + \int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_3^1} F_2^{1\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db \right\} \\
&= H^1_2(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-R_1} (H_2'(x-b_1) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^2 \int_0^{x-R_1} \bigg(\int_0^{x-R_1-b_1} (H_2'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \\
&\qquad + \int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_2^1-b_1} (H_1'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \bigg) \phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^3 \int_0^{x-R_1} \bigg(\int_0^{x-R_1-b_1} \bigg(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2} H_2'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \\
&\qquad + \int_{x-R_1-b_1-b_2}^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2} H_1'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \bigg) \phi(b_2)\,db_2 \\
&\qquad + \int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_2^1-b_1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2} H_1'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2 \bigg) \phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha \int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_3^1} (H_1'(x-b) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^2 \int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_3^1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1} (H_1'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^3 \int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_3^1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2} H_1'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \qquad (33)
\end{aligned}
$$

(∵ (25), (26) より)

$$f_4'(x) = -c \qquad x < \bar{x}_{43}^2$$
$$= -c + F_{33}^{2\prime}(x) \qquad x \geq \bar{x}_{43}^2 \tag{34}$$

3) $H_1'(R_1) > 0 \quad F_1^{1\prime}(R_1) > 0 \quad F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0 \quad F_3^{1\prime}(R_1) \leq 0$

$$F_{32}^{2\prime}(x) = H_2'(x) + \alpha \int_0^\infty f_3'(x-b)\,\phi(b)\,db$$
$$= H_2'(x) + \alpha\left\{-c + \int_0^{x-\bar{x}_{32}^2} F_{22}^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db\right\}$$
$$= H_2'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}_{32}^2} (H_2'(x-b_1) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1$$
$$+ \alpha^2 \int_0^{x-\bar{x}_{32}^2} \left(\int_0^{x-R_1-b_1} (H_2'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \right.$$
$$\left. + \int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_2^1-b_1} (H_1'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1$$
$$+ \alpha^3 \int_0^{x-\bar{x}_{32}^2} \left(\int_0^{x-R_1-b_1} \left(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2} H_2'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \right.\right.$$
$$\left. + \int_{x-R_1-b_1-b_2}^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2} H_1'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2$$
$$\left. + \int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_2^1-b_1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2} H_1'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \tag{35}$$

$$f_4'(x) = -c \qquad x < \bar{x}_{42}^2$$
$$= -c + F_{32}^{2\prime}(x) \qquad x \geq \bar{x}_{42}^2 \tag{36}$$

4) $H_1'(R_1) > 0 \quad F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0 \quad F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0 \quad F_3^{1\prime}(R_1) \leq 0$

$$F_{31}^{2\prime}(x) = H_2'(x) + \alpha \int_0^\infty f_3'(x-b)\,\phi(b)\,db$$
$$= H_2'(x) + \alpha\left\{-c + \int_0^{x-\bar{x}_{31}^2} F_{21}^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db\right\} \qquad (\because (30),\ \phi(b) = 0 \quad b < 0 \text{ より})$$
$$= H_2'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}_{31}^2} (H_2'(x-b_1) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1$$
$$+ \alpha^2 \int_0^{x-\bar{x}_{31}^2} \left(\int_0^{x-\bar{x}_2^2-b_1} (H_2'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1$$
$$+ \alpha^3 \int_0^{x-\bar{x}_{31}^2} \left(\int_0^{x-\bar{x}_2^2-b_1} \left(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2} H_2'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{x-R_1-b_1-b_2}^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2} H_1'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1$$
$$(\because (27),\ \phi(b) = 0 \quad b < 0 \text{ より}) \tag{37}$$

$$
\begin{aligned}
f_4'(x) &= -c \qquad & x < \bar{x}_{41}^2 \\
&= -c + F_{31}^{2\prime}(x) \qquad & x \geq \bar{x}_{41}^2
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$k=5$ の場合

1) $H_1'(R_1)>0 \quad F_1^{1\prime}(R_1)>0 \quad F_2^{1\prime}(R_1)>0 \quad F_3^{1\prime}(R_1)>0 \quad F_4^{1\prime}(R_1)>0$

$$F_4^{1\prime}(x) = H_1'(x) + \alpha\int_0^{\infty} f_4'(x-b)\,\phi(b)\,db$$

$$= H_1'(x) + \alpha\left\{-c + \int_0^{x-\bar{x}_4^1} F_3^{1\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db\right\} \qquad (\because (32),\ \phi(b)=0 \quad b<0 \text{ より})$$

$$= H_1'(x) - \alpha c + \alpha\int_0^{x-\bar{x}_4^1} (H_1'(x-b_1)-\alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1$$

$$+ \alpha^2\int_0^{x-\bar{x}_4^1}\Bigg(\int_0^{x-\bar{x}_3^1-b_1}(H_1'(x-b_1-b_2)-\alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2\Bigg)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+ \alpha^3\int_0^{x-\bar{x}_4^1}\Bigg(\int_0^{x-\bar{x}_3^1-b_1}\Bigg(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}(H_1'(x-b_1-b_2-b_3)-\alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3\Bigg)\phi(b_2)\,db_2\Bigg)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+ \alpha^4\int_0^{x-\bar{x}_4^1}\Bigg(\int_0^{x-\bar{x}_3^1-b_1}\Bigg(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}\Bigg(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\Bigg)$$

$$\cdot\,\phi(b_3)\,db_3\Bigg)\phi(b_2)\,db_2\Bigg)\phi(b_1)\,db_1$$

$$(\because (31)\text{ より}) \tag{39}$$

$$F_{44}^{2\prime}(x) = H_2'(x) + \alpha\int_0^{\infty} f_4'(x-b)\,\phi(b)\,db$$

$$= H_2'(x) + \alpha\left\{-c + \int_0^{x-R_1} F_{33}^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db + \int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_4^1} F_3^{1\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db\right\}$$

$$= H_2'(x) - \alpha c + \alpha\int_0^{x-R_1}(H_2'(x-b_1)-\alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1$$

$$+ \alpha^2\int_0^{x-R_1}\Bigg(\int_0^{x-R_1-b_1}(H_2'(x-b_1-b_2)-\alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2\Bigg)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+ \alpha^3\int_0^{x-R_1}\Bigg(\int_0^{x-R_1-b_1}\Bigg(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2}(H_2'(x-b_1-b_2-b_3)-\alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3$$

$$+ \int_{x-R_1-b_1-b_2}^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}(H_1'(x-b_1-b_2-b_3)-\alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3\Bigg)\phi(b_2)\,db_2\Bigg)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+ \alpha^4\int_0^{x-R_1}\Bigg(\int_0^{x-R_1-b_1}\Bigg(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2}\Bigg(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2-b_3}H_2'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4$$

$$+ \int_{x-R_1-b_1-b_2-b_3}^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\Bigg)\phi(b_3)\,db_3$$

$$+ \int_{x-R_1-b_1-b_2}^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}\Bigg(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\Bigg)\phi(b_3)\,db_3\Bigg)\phi(b_2)\,db_2\Bigg)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+ \alpha^2\int_0^{x-R_1}\Bigg(\int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_3^1-b_1}(H_1'(x-b_1-b_2)-\alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2\Bigg)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^3\int_0^{x-R_1}\left(\int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_3^1-b_1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}H_1'(x-b_1-b_2-b_3)\,\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^4\int_0^{x-R_1}\left(\int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_3^1-b_1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}\left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\,\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha\int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_4^1}(H_1'(x-b_1)-\alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^2\int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_4^1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_3^1-b_1}(H_1'(x-b_1-b_2)-\alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^3\int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_4^1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_3^1-b_1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}(H_1'(x-b_1-b_2-b_3)-\alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^4\int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_4^1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_3^1-b_1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}\left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\,\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1 \qquad (40)$$

(∵ (32) より)

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= -c & x &< \bar{x}_5^1 \\ &= -c + F_4^{1\prime}(x) & \bar{x}_3^1 &\le x < R_1 \\ &= -c + F_{44}^{2\prime}(x) & x &\ge R_1 \end{aligned} \qquad (41)$$

2) $H_1'(R_1)>0 \quad F_1^{1\prime}(R_1)>0 \quad F_2^{1\prime}(R_1)>0 \quad F_3^{1\prime}(R_1)>0 \quad F_4^{1\prime}(R_1)\le 0$

$F_{44}^{2\prime}$ は (40) と一致する。

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= -c & x &\le \bar{x}_{54}^2 \\ &= -c + F_{44}^{2\prime}(x) & x &\ge \bar{x}_{54}^2 \end{aligned} \qquad (42)$$

3) $H_1'(R_1)>0 \quad F_1^{1\prime}(R_1)>0 \quad F_2^{1\prime}(R_1)>0 \quad F_3^{1\prime}(R_1)\le 0 \quad F_4^{1\prime}(R_1)\le 0$

$$F_{43}^{2\prime}(x) = H_2'(x) + \alpha\int_0^{\infty} f_4'(x-b)\,\phi(b)\,db$$

$$= H_2'(x) + \alpha\left\{-c + \int_0^{x-\bar{x}_{43}^2} F_{33}^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db\right\}$$

$$= H_2'(x) - \alpha c + \alpha\int_0^{x-\bar{x}_{43}^2}(H_2'(x-b_1)-\alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^2\int_0^{x-\bar{x}_{43}^2}\left(\int_0^{x-R_1-b_1}(H_2'(x-b_1-b_2)-\alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1\right)\phi(b_2)\,db_2$$

$$+\alpha^3\int_0^{x-\bar{x}_{43}^2}\left(\int_0^{x-R_1-b_1}\left(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2}(H_2'(x-b_1-b_2-b_3)-\alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{x-R_1-b_1-b_2}^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}(H_1'(x-b_1-b_2-b_3)-\alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha^4\int_0^{x-\bar{x}_{43}^2}\left(\int_0^{x-R_1-b_1}\left(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2}\left(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2-b_3}H_2'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\right.\right.\right.\\
&\quad\left.+\int_{x-R_1-b_1-b_2-b_3}^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\right)\phi(b_3)\,db_3\\
&\quad\left.\left.+\int_{x-R_1-b_1-b_2}^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}\left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\right)\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1\\
&+\alpha^2\int_0^{x-\bar{x}_{43}^2}\left(\int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_3^1}(H_1'(x-b_1-b_2)-\alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1\\
&+\alpha^3\int_0^{x-\bar{x}_{43}^2}\left(\int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_3^1-b_1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}(H_1'(x-b_1-b_2-b_3)-\alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1\\
&+\alpha^4\int_0^{x-\bar{x}_{43}^2}\left(\int_{x-R_1-b_1}^{x-\bar{x}_3^1-b_1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}\left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\right)\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.\cdot\,\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1 \qquad (43)
\end{aligned}
$$

(∵ (34) より)

$$
\begin{aligned}
f_5'(x) &= -c & x &< \bar{x}_{53}^2\\
&= -c + F_{43}^{2\prime}(x) & x &\geq \bar{x}_{53}^2
\end{aligned}
\qquad (44)
$$

4) $H_1'(R_1)>0 \quad F_1^{1\prime}(R_1)>0 \quad F_2^{1\prime}(R_1)\leq 0 \quad F_3^{1\prime}(R_1)\leq 0 \quad F_4^{1\prime}(R_1)\leq 0$

$$
\begin{aligned}
F_{42}^{2\prime}(x) &= H_2'(x)+\alpha\int_0^{\infty}f_4'(x-b)\,\phi(b)\,db\\
&= H_2'(x)+\alpha\left\{-c+\int_0^{x-\bar{x}_{42}^2}F_{32}^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db\right\}\\
&= H_2'(x)-\alpha c+\alpha\int_0^{x-\bar{x}_{42}^2}(H_2'(x-b_1)-\alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1\\
&\quad+\alpha^2\int_0^{x-\bar{x}_{42}^2}\left(\int_0^{x-\bar{x}_{32}^2-b_1}(H_2'(x-b_1-b_2)-\alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1\\
&\quad+\alpha^3\int_0^{x-\bar{x}_{42}^2}\left(\int_0^{x-\bar{x}_{32}^2-b_1}\left(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2}(H_2'(x-b_1-b_2-b_3)-\alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\int_{x-R_1-b_1-b_2}^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}(H_1'(x-b_1-b_2-b_3)-\alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1\\
&\quad+\alpha^4\int_0^{x-\bar{x}_{42}^2}\left(\int_0^{x-\bar{x}_{32}^2-b_1}\left(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2}\left(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2-b_3}H_2'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.+\int_{x-R_1-b_1-b_2-b_3}^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\right)\phi(b_3)\,db_3\\
&\qquad\left.\left.+\int_{x-R_1-b_1-b_2}^{x-\bar{x}_2^1-b_1-b_2}\left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-b_2-b_3}H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4\right)\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1
\end{aligned}
\qquad (45)
$$

$$
\begin{aligned}
f_5'(x) &= -c & x &< \bar{x}_{52}^{2} \\
&= -c + F_{42}^{2\prime}(x) & x &\geq \bar{x}_{52}^{2}
\end{aligned} \tag{46}
$$

5）$H_1'(R_1) > 0 \quad F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0 \quad F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0 \quad F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0 \quad F_3^{1\prime}(R_1) \leq 0 \quad F_4^{1\prime}(R_1) \leq 0$

$$
\begin{aligned}
F_{41}^{2\prime}(x) &= H_2'(x) + \alpha \int_0^{\infty} f_4'(x-b)\,\phi(b)\,db \\
&= H_2'(x) + \alpha \left\{ -c + \int_0^{x-\bar{x}_{41}^{2}} F_{31}^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db \right\} \\
&= H_2'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}_{41}^{2}} (H_2'(x-b_1) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^2 \int_0^{x-\bar{x}_{41}^{2}} \left(\int_0^{x-\bar{x}_{31}^{2}-b_1} (H_2'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^3 \int_0^{x-\bar{x}_{41}^{2}} \left(\int_0^{x-\bar{x}_{31}^{2}-b_1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_{2}^{2}-b_1-b_2} (H_2'(x-b_1-b_2-b_3) - \alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^4 \int_0^{x-\bar{x}_{41}^{2}} \left(\int_0^{x-\bar{x}_{31}^{2}-b_1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_{2}^{2}-b_1-b_2} \left(\int_0^{x-R_1-b_1-b_2-b_3} H_2'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4 \right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. + \int_{x-R_1-b_1-b_2-b_3}^{x-\bar{x}_1^{1}-b_1-b_2-b_3} H_1'(x-b_1-b_2-b_3-b_4)\,\phi(b_4)\,db_4 \right) \phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1
\end{aligned}
$$

（∵ (37), (38) より）　(47)

$$
\begin{aligned}
f_5'(x) &= -c & x &< \bar{x}_{51}^{2} \\
&= -c + F_{41}^{2\prime}(x) & x &\geq \bar{x}_{51}^{2}
\end{aligned}
$$

5. 一　般　解

$k = m + 1$ の場合

1）$H_1'(R_1) > 0,\ F_1^{1\prime}(R_1) > 0, \ldots, F_m^{1\prime}(R_1) > 0$

$$
F_1^{1\prime}(x) = H_1'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}_1^{1}} H_1'(x-b)\,\phi(b)\,db
$$

$$
\begin{aligned}
F_m^{1\prime}(x) &= H_1'(x) + \alpha \int_0^{\infty} f_m'(x-b)\,\phi(b)\,db \\
&= H_1'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-x_m^{1}} F_{m-1}^{1\prime}(x-b_1)\,\phi(b)\,db \\
&= H_1'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}_m^{1}} (H_1'(x-b_1) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^2 \int_0^{x-\bar{x}_m^{1}} \left(\int_0^{x-\bar{x}_{m-1}-b_1} (H_1'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \\
&\quad + \alpha^3 \int_0^{x-\bar{x}_m^{1}} \left(\int_0^{x-\bar{x}_{m-1}-b_1} \left(\int_0^{x-\bar{x}_{m-2}^{1}-b_1-b_2} (H_1'(x-b_1-b_2-b_3) - \alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \right. \\
&\qquad \left. \cdot\,\phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 + \cdots
\end{aligned}
$$

$$+\alpha^{m-1}\int_0^{x-\bar{x}_m^1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_{m-1}-b_1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_{m-2}^1-b_1-b_2}\left(\cdots\left(\int_0^{x-\bar{x}_2^1-b_1-\cdots-b_{m-2}}(H_1'(x-b_1-\cdots-b_{m-1})-\alpha c)\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\cdot\phi(b_{m-1})\,db_{m-1}\right)\cdots\right)\phi(b_3)\,db_3\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^m\int_0^{x-\bar{x}_m^1}\left(\int_0^{x-\bar{x}_{m-1}^1-b_1}\left(\cdots\left(\int_0^{x-\bar{x}_1^1-b_1-\cdots-b_{m-1}}H_1'(x-b_1-\cdots-b_m)\,\phi(b_m)\,db_m\right)\cdots\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$m=2,\cdots,N-1 \qquad (48)$$

$$\begin{aligned} f_{m+1}'(x) &= -c & x &< \bar{x}_{m+1}^1 \\ &= -c + F_m^{1\prime}(x) & \bar{x}_{m+1}^1 &\le x < R_1 \\ &= -c + F_{mm}^{2\prime}(x) & x &\ge R_1 \end{aligned} \qquad (49)$$

2) $H_1'(R_1)>0,\quad F_1^{1\prime}(R_1)>0,\cdots,F_{m-1}^{1\prime}(R_1)>0,\quad F_m^{1\prime}(R_1)\le 0$

$$F_{11}^{2\prime}(x)=F_1^{2\prime}(x)=H_2'(x)-\alpha c+\alpha\left\{\int_0^{x-R_1}H_2'(x-b)\,\phi(b)\,db+\int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_1^1}H_1'(x-b)\,\phi(b)\,db\right\} \qquad (50)$$

$$F_1^{1\prime}(x)=H_1'(x)-\alpha c+\alpha\int_0^{x-\bar{x}_1^1}H_1'(x-b)\,\phi(b)\,db \qquad (51)$$

$$\begin{aligned} F_{mm}^{2\prime}(x) &= H_2'(x)+\alpha\int_0^{\infty}f_m'(x-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_2'(x)-\alpha c+\alpha\left\{\int_0^{x-R_1}F_{m-1m-1}^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db+\int_{x-R_1}^{x-\bar{x}_m^1}F_{m-1}^{1\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db\right\}, \end{aligned}$$

$$m=2,\cdots,N-1 \qquad (52)$$

(50), (51) を用いて $F_{mm}^{2\prime}(x)$ を既知の関数 $H_1'(x), H_2'(x)$ で表現できる。$m=2,3,4$ についてはそれぞれ (26), (33), (40) で与えたが，$m\geqq 5$ の場合は可成り複雑な式となるので省略する。

$$\begin{aligned} f_{m+1}'(x) &= -c & x &< \bar{x}_{m+1m}^2 \\ &= -c+F_{mm}^{2\prime}(x) & x &\ge \bar{x}_{m+1m}^2 \end{aligned} \qquad (53)$$

3) $H_1'(R_1)>0,\quad F_1^{1\prime}(R_1)>0,\cdots,F_{m-2}^{1\prime}(R_1)>0,\quad F_{m-1}^{1\prime}(R_1)\le 0,\quad F_m^{1\prime}(R_1)\le 0$

$$\begin{aligned} F_{mm-1}^{2\prime}(x) &= H_2'(x)+\alpha\int_0^{\infty}f_m'(x-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_2'(x)-\alpha c+\alpha\int_0^{x-\bar{x}_{mm-1}^2}F_{m-1m-1}^{2\prime}(x-b)\,\phi(b)\,db \qquad m=2,\cdots,N-1 \end{aligned} \qquad (54)$$

(50), (51), (52) を用いて $F_{mm-1}^{2\prime}(x)$ を既知の関数 $H_1'(x)$, $H_2'(x)$ で表現できる。$m=2,3,4$ の場合はそれぞれ (27), (35), (43) で与えたが，$m\geqq 5$ の場合は省略する。

$$\begin{aligned} f_{m+1}'(x) &= -c & x &< \bar{x}_{m+1m-1}^2 \\ &= -c+F_{mm-1}^{2\prime}(x) & x &\ge \bar{x}_{m+1m-1}^2 \end{aligned} \qquad (55)$$

4) $H_1'(R_1)>0,\quad F_1^{1\prime}(R_1)>0,\cdots,F_{m-3}^{1\prime}(R_1)>0,\quad F_{m-2}^{1\prime}(R_1)\le 0,\quad F_{m-1}^{1\prime}(R_1)\le 0,\quad F_m^{1\prime}(R_1)\le 0$

$$F_{mm-2}^{2\prime}(x)=H_2'(x)+\alpha\int_0^{\infty}f_m'(x-b)\,\phi(b)\,db$$

$$= H_2'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}^2_{mm-2}} F^{2\prime}_{m-1m-2}(x-b)\,\phi(b)\,db, \qquad m = 3,\cdots, N-1 \tag{56}$$

（54）を用いて $F^{2\prime}_{mm-2}(x)$ を既知の関数 $H_1'(x)$, $H_2'(x)$ で表現できる。$m = 3, 4$ の場合はそれぞれ（37），（45）で与えたが，$m \geqq 5$ の場合は省略する。

$$\begin{aligned} f'_{m+1}(x) &= -c & x &< \bar{x}^2_{m+1m-2} \\ &= -c + F^{2\prime}_{mm-2}(x) & x &\geq \bar{x}^2_{m+1m-2} \end{aligned} \tag{57}$$

⋮

m) $H_1'(R_1) > 0$, $F_1^{1\prime}(R_1) > 0$, $F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0, \cdots, F^{1\prime}_{m-1}(R_1) \leq 0$, $F^{1\prime}_m(R_1) \leq 0$

$$\begin{aligned} F^{2\prime}_{m2}(x) &= H_2'(x) + \alpha \int_0^{\infty} f'_m(x-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_2'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}^2_{m2}} F^{2\prime}_{m-12}(x-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_2'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}^2_{m2}} (H_2'(x-b_1) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1 \\ &\quad + \alpha^2 \int_0^{x-\bar{x}^2_{m2}} \left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{m-12}-b_1} (H_2'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \\ &\quad + \alpha^3 \int_0^{x-\bar{x}^2_{m2}} \left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{m-12}-b_1} \left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{m-22}-b_1-b_2} (H_2'(x-b_1-b_2-b_3) - \alpha c)\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 + \cdots \\ &\quad + \alpha^{m-3} \int_0^{x-\bar{x}^2_{m2}} \left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{m-12}-b_1} \left(\cdots \left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{42}-b_1-\cdots-b_{m-4}} (H_2'(x-b_1-\cdots-b_{m-4}-b_{m-3}) - \alpha c)\,\phi(b_{m-3})\,db_{m-3} \right) \cdots \right) \right. \\ &\qquad \left. \cdot\,\phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \\ &\quad + \alpha^{m-2} \int_0^{x-\bar{x}^2_{m2}} \left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{m-12}-b_1} \left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{m-22}-b_1-b_2} \left(\cdots \left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{32}-b_1-\cdots-b_{m-3}} F^{2\prime}_{22}(\boldsymbol{x}-b_1-\cdots-b_{m-2})\,\phi(b_{m-2})\,db_{m-2} \right) \cdots \right) \right. \right. \\ &\qquad \left. \left. \cdot\,\phi(b_3)\,db_3 \right) \phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \qquad m = 3, 4, \cdots N-1 \end{aligned} \tag{58}$$

$F^{2\prime}_{22}(x)$ は（26）で与えられる。

$$\begin{aligned} f'_{m+1}(x) &= -c & x &< \bar{x}^2_{m+12} \\ &= -c + F^{2\prime}_{m2}(x) & x &\geq \bar{x}^2_{m+12} \end{aligned} \tag{59}$$

m+1) $H_1'(R_1) > 0$, $F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0$, $F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0, \cdots, F^{1\prime}_{m-1}(R_1) \leq 0$, $F^{1\prime}_m(R_1) \leq 0$

$$\begin{aligned} F^{2\prime}_{m1}(x) &= H_2'(x) + \alpha \int_0^{\infty} f'_m(x-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_2'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}^2_{m1}} F^{2\prime}_{m-11}(x-b)\,\phi(b)\,db \\ &= H_2'(x) - \alpha c + \alpha \int_0^{x-\bar{x}^2_{m1}} (H_2'(x-b_1) - \alpha c)\,\phi(b_1)\,db_1 \\ &\quad + \alpha^2 \int_0^{x-\bar{x}^2_{m1}} \left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{m-11}-b_1} (H_2'(x-b_1-b_2) - \alpha c)\,\phi(b_2)\,db_2 \right) \phi(b_1)\,db_1 \end{aligned}$$

$$+\cdots+\alpha^{m-1}\int_0^{x-\bar{x}^2_{m1}}\left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{m-11}-b_1}\left(\cdots\left(\int_0^{x-\bar{x}^2_2-b_1-\ldots-b_{m-2}}(H_2'(x-b_1-\cdots-b_{m-1})-\alpha c)\,\phi(b_{m-1})\,db_{m-1}\right)\cdots\right)\right.$$

$$\left.\cdot\,\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$+\alpha^m\int_0^{x-\bar{x}^2_{m1}}\left(\int_0^{x-\bar{x}^2_{m-11}-b_1}\left(\cdots\left(\int_0^{x-\bar{x}^2_2-b_1-\cdots-b_{m-2}}\left(\int_0^{x-R_1-b_1-\cdots-b_{m-1}}(H_2'(x-b_1-\cdots-b_m)\,\phi(b_m)\,db_m\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\int_{x-R_1-b_1-\cdots-b_{m-1}}^{x-\bar{x}^1_1-b_1-\cdots-b_{m-1}}H_1'(x-b_1-\cdots-b_m)\,\phi(b_m)\,d_m\right)\phi(b_{m-1})\,db_{m-1}\right)\cdots\right)\phi(b_2)\,db_2\right)\phi(b_1)\,db_1$$

$$m=2,\cdots N-1 \qquad (60)$$

ただし，$\bar{x}^2_{21}=\bar{x}^2_2$，$\mathrm{F}(x)=F_1^{2\prime}(x)$

$$\begin{aligned} f'_{m+1}(x) &= -c & x &< \bar{x}^2_{m+11} \\ &= -c+F^{2\prime}_{m1}(x) & x &\geq \bar{x}^2_{m+11} \end{aligned} \qquad (61)$$

次に $\bar{x}^1_k\ (k=1,2,\cdots,N)$, $\bar{x}^2_{ki}\ (k=2,3,\ldots,N;\ i=1,2,\ldots,k-1)$ の間の単調性については，仮定2.1，2.2の下で定理5.1が成立する。

定理5.1

$$\bar{x}^1_k \leq \bar{x}^1_{k+1} \qquad k=1,2,\cdots,N-1 \qquad (62)$$

$$\bar{x}^1_k \leq \bar{x}^2_{k+1k} \qquad k=1,2,\cdots,N-1 \qquad (63)$$

$$\bar{x}^2_{ki} \leq \bar{x}^2_{k+1i} \qquad k=2,3,\cdots,N-1;\ i=1,2,\cdots,k-1 \qquad (64)$$

証明　上の定理の内容を図示すると，図5.1即ち，図5.2のようになる。

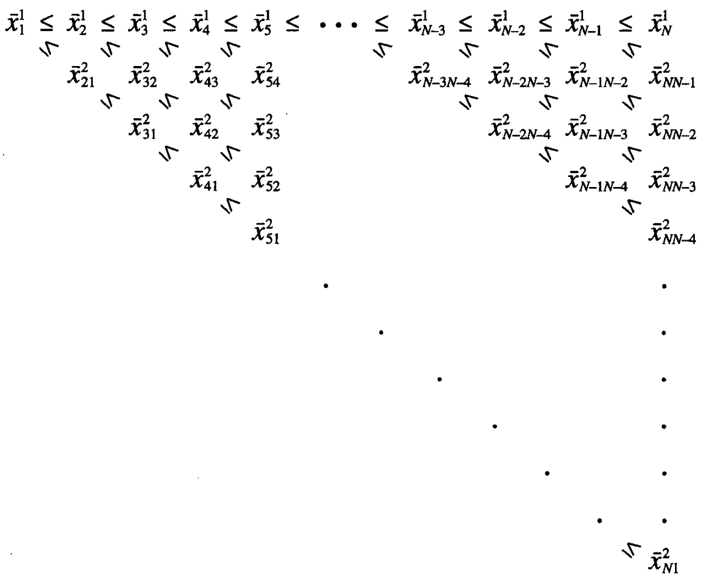

図5.1

$$
\begin{array}{lllllllllllllllllll}
\bar{x}_1^1 & \le & \bar{x}_2^1 & \le & \bar{x}_3^1 & \le & \bar{x}_4^1 & \le & \cdots & \le & \bar{x}_{N-4}^1 & \le & \bar{x}_{N-3}^1 & \le & \bar{x}_{N-2}^1 & \le & \bar{x}_{N-1}^1 & \le & \bar{x}_N^1 \\
\bar{x}_1^1 & \le & \bar{x}_2^1 & \le & \bar{x}_3^1 & \le & \bar{x}_4^1 & \le & \cdots & \le & \bar{x}_{N-4}^1 & \le & \bar{x}_{N-3} & \le & \bar{x}_{N-2} & \le & \bar{x}_{N-1}^1 & \le & \bar{x}_{NN-1}^2 \\
\bar{x}_1^1 & \le & \bar{x}_2^1 & \le & \bar{x}_3^1 & \le & \bar{x}_4^1 & \le & \cdots & \le & \bar{x}_{N-4}^2 & \le & \bar{x}_{N-3}^2 & \le & \bar{x}_{N-2}^2 & \le & \bar{x}_{N-1N-2}^2 & \le & \bar{x}_{NN-2}^2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\bar{x}_1^1 & \le & \bar{x}_2^1 & \le & \bar{x}_3^1 & \le & \bar{x}_{43}^2 & \le & \cdots & \le & \bar{x}_{N-43}^2 & \le & \bar{x}_{N-33}^2 & \le & \bar{x}_{N-23}^2 & \le & \bar{x}_{N-13}^2 & \leqq & \bar{x}_{N3}^2 \\
\bar{x}_1^1 & \le & \bar{x}_2^1 & \le & \bar{x}_{32}^2 & \le & \bar{x}_{42}^2 & \le & \cdots & \le & \bar{x}_{N-42}^2 & \le & \bar{x}_{N-32}^2 & \le & \bar{x}_{N-22}^2 & \le & \bar{x}_{N-12}^2 & \le & \bar{x}_{N2}^2 \\
\bar{x}_1^1 & \le & \bar{x}_{21}^2 & \le & \bar{x}_{31}^2 & \le & \bar{x}_{41}^2 & \leqq & \cdots & \le & \bar{x}_{N-41}^2 & \le & \bar{x}_{N-31}^2 & \le & \bar{x}_{N-21}^2 & \le & \bar{x}_{N-11}^2 & \le & \bar{x}_{N1}^2
\end{array}
$$

図5.2

$F_m^{1\prime}(x)\ (m = 1, 2, \cdots, N-1)$ は非減少関数で $F_m^{1\prime}(\bar{x}_{m+1}) = 0$，$k = m-1$ に対して（62）が成立していると仮定しよう。また

$$
\begin{aligned}
F_m^{1\prime}(\bar{x}_m^1) &= H_1'(\bar{x}_m^1) + \alpha \int_0^\infty f_m'(\bar{x}_m^1 - b)\, \phi(b)\, db \\
&= H_1'(\bar{x}_m^1) - \alpha c \qquad (\because (49) \text{ より } f_m'(x) = -c \quad x < \bar{x}_m^1) \\
&= -\alpha \int_0^{\bar{x}_m^1 - \bar{x}_{m-1}^1} F_{m-2}^{1\prime}(\bar{x}_m^1 - b)\, \phi(b)\, db \qquad (\because (48),\ F_{m-1}^{1\prime}(\bar{x}_m^1) = 0, \quad \bar{x}_m^1 \ge \bar{x}_{m-1}^1) \\
&\le 0 \qquad (\because 0 = F_{m-2}^{1\prime}(\bar{x}_{m-1}^1) \le F_{m-2}^{1\prime}(\bar{x}_m^1 - \mathrm{b}) \le F_{m-2}^{1\prime}(\bar{x}_m^1) \quad \bar{x}_{m-1}^1 \le \bar{x}_m^1 - b \le \bar{x}_m^1)
\end{aligned}
$$

よって $\bar{x}_m^1 \le \bar{x}_{m+1}^1$

また，$\bar{x}_1^1 \le \bar{x}_2^1$ は $F_1^{1\prime}$ が非減少関数であること，$H_1'(\bar{x}_1^1) = 0$，$F_1^{1\prime}(\bar{x}_2^1) = 0$，$F_1^{1\prime}(\bar{x}_1^1) = -\alpha c$ より容易に示される。

$\bar{x}_k^1 \le R_1$，$\bar{x}_{k+1k}^2 \ge R_1\ (k = 1, 2, \cdots, N-1)$ より $\bar{x}_k^1 \le \bar{x}_{k+1k}^2$ は明らかである。

（64）が $k = m-1$ に対して成立していると仮定しよう。

$F_{ki}^{2\prime}(x)\ (k = 2, 3, \cdots, N-1;\ i = 1, 2, \cdots, k)$ は非減少関数で，$F_{ki}^{2\prime}(\bar{x}_{k+1i}^2) = 0$，また

$$
\begin{aligned}
F_{mi}^{2\prime}(\bar{x}_{mi}^2) &= H_2'(\bar{x}_{mi}^2) + \alpha \int_0^\infty f_m'(\bar{x}_{mi}^2 - b)\, \phi(b)\, db \\
&= H_2'(\bar{x}_{mi}^2) - \alpha c \qquad (\because (53), (55), (57), (59), (61) \text{ より } x < \bar{x}_{mi}^2 \Rightarrow f_m'(x) = -c) \\
&= -\alpha \int_0^{\bar{x}_{mi}^2 - \bar{x}_{m-1i}^2} F_{m-2j}^{2\prime}(\bar{x}_{mi}^2 - b)\, \phi(b)\, db \\
&\le 0 \qquad (\because 0 = F_{m-2i}^{2\prime}(\bar{x}_{m-1i}^2) \le F_{m-2i}^{2\prime}(\bar{x}_{mi}^2 - b) \le F_{m-2i}^{2}(\bar{x}_{mi}^2) \quad \bar{x}_{m-1i}^2 \le \bar{x}_{mi}^2 - b < \bar{x}_{mi}^2)
\end{aligned}
$$

よって $\bar{x}_{mi}^2 \le \bar{x}_{m+1i}^2$，また $\bar{x}_{21}^2 \le \bar{x}_{31}^2$ も同様に示される。

一般に $k = m$ のとき，m 個の場合分けが必要であったが，m 個のいずれかが起こる十分条件を与えておこう。仮定2.1，2.2の下で次の定理が成立する。

定理5.2

$H_1'(R_1) > \alpha c$ ならば $H_1'(R_1) > 0,\ F_m^{1\prime}(R_1) > 0 \qquad (m = 1, 2, \cdots, N-1)$

$0 < H_1'(R_1) \le \dfrac{\alpha c}{(1+\alpha)}$ ならば $H_1'(R_1) > 0,\ F_m^{1\prime}(R_1) \le 0 \qquad (m = 1, 2, \cdots, N-1)$

証明 $F_m^{1\prime}(x)$ は非減少関数で，$F_{m-1}^{1\prime}(\bar{x}_m^1)=0$ であるから

$$
\begin{aligned}
F_m^{1\prime}(R_1) &= H_1'(R_1) - \alpha c + \alpha\int_0^{R_1-\bar{x}_m^1} F_{m-1}^{1\prime}(R_1-b)\,\phi(b)\,db \\
&\geq H_1'(R_1) - \alpha c \quad (\because\ 0 = F_{m-1}^{1\prime}(\bar{x}_m^1) \leqq F_{m-1}^{1\prime}(R_1-b) \leqq F_{m-1}^{1\prime}(R_1),\ \bar{x}_m^1 \leqq R_1 - b \leqq R_1,\ R_1 > \bar{x}_m^1) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
F_1^{1\prime}(R_1) &= H_1'(R_1) - \alpha c + \alpha\int_0^{R_1-\bar{x}_1^1} H_1'(R_1-b)\,\phi(b)\,db \\
&\leq H_1'(R_1) - \alpha c + \alpha H_1'(R_1)\int_0^{R_1-\bar{x}_1^1} \phi(b)\,db \\
&\leq H_1'(R) - \alpha c + \alpha H_1'(R_1) = H_1'(R_1)(1+\alpha) - \alpha c
\end{aligned}
$$

したがって $H_1'(R_1) \leq \alpha c/(1+\alpha)$ ならば $F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0$ となる。$H_1'(R_1) > 0$ より $0 < H_1'(R_1) \leq \alpha c/(1+\alpha)$ ならば $F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0$ となり，推移図3.2を求めた方法と同様にして $F_m^{1\prime}(R_1) \leqq 0$ $(m=2,3,\cdots,N-1)$ をうる。$\alpha c/(1+\alpha) < H_1'(R_1) \leqq \alpha c$ の場合については，さらなる検討が必要である。

（以下次号）