

環境制約の下の最適経済成長について

時 政 昂

(受付 1997年10月14日)

第1節. はじめに

資本ストックの蓄積は、経済の生産可能フロンティアを拡張し、人々の生活水準を上昇させる。しかし、経済成長に伴って発生する地球環境の劣悪化は、いまや90年代の世界における政治・経済問題の中心となった。各国政府は、経済活動を抑制して、清浄な水、清浄な空気などの環境ストックを維持する政策をとることが、何より期待されている。

本論文では、政府が（国民1人当たり）消費フローや、環境ストックからもたらされる社会的厚生を最大化する政策をとると想定する。そして、その際政府は、環境ストックの増加が直接国民の効用水準を高めるだけでなく、農林水産業など第一次産業に見られるように、生産水準をも高めると考えているとする。

このときどの程度の消費、人工資本ストックへの投資、環境保全投資に関する政策がとられるべきか、これらが本論文で考察する問題である。

以下、この問題を集計的最適経済成長モデルの枠組みの中で考えていく。第2節において、環境保全投資を含む最適成長モデルを定式化する。次いで第3節において、そのモデルの動学分析を、とくに消費率がプラスの場合について提示する。第4節において、消費率がゼロとなるケース（そのとき、国民経済は環境保全的最低水準で消費生活をしている）の動学分析を示す。最後に第5節で長期的な政策選択について導かれた結果を示す。

第2節. モデル

環境保全への投資を含む最適経済成長モデルを定義しよう。

記号を以下のようにする。

y : 1人当たり産出

k_g : 1人当たり環境ストック

k_p : 1人当たり資本ストック

c : 1人当たり消費

i_p : 生産能力への1人当たり投資

i_g : 環境保全への1人当たり投資

y は次のような生産関数で示される。

$$y = f(k_p, k_g) \quad f(0, 0) \geq \bar{c}$$

ここで f は以下のような新古典派的性質を持つ。 $f_p > 0$, $f_g > 0$, $f_{pp} < 0$, $f_{gg} < 0$, $f_{gp} > 0$, 産出 y は消費ならびに2種類の投資 i_p , i_g に使われる。

$$y = c + i_g + i_p$$

さて社会の人々が環境を保全しつつ最低水準の生活を営みうる、1人当たり消費の最低値があると

仮定する。

\bar{c} : 環境保全的最低生活水準を維持する 1 人当たり消費。

以下の方程式が成立するので、

$$c - \bar{c} + i_g + i_p = f - \bar{c}$$

もし、3つの比率変数を以下のように定義するなら、すなわち $f > \bar{c}$ のとき

$$(c - \bar{c}) / (f - \bar{c}) = e, i_g / (f - \bar{c}) = x, i_p / (f - \bar{c}) = z$$

もし $f = \bar{c}$ なら e, x, z は任意、¹⁾

次の関係式がえられる。

$$e + z + x = 1, e, z, x \geq 0$$

新変数を以下のように定義する。

$$F = f - \bar{c}$$

すると、1人当たり消費に関する以下の方程式をうる。

$$\begin{aligned} c &= e(f - \bar{c}) + \bar{c} \\ &= eF + \bar{c} \end{aligned}$$

ここで資本ストックの減耗はないと仮定する。したがって、資本は以下の方程式に従って成長する。

$$\dot{k}_p = i_p = z(f - \bar{c}) = zF$$

環境ストック(清浄な空気, 水)は、経済が産出を環境保全的最低生活消費水準に維持する限り減耗しないとする。

しかし、環境劣悪化は産出が \bar{c} 水準を超えると始まると想定し、劣悪化の程度は $f - \bar{c}$ に比例する(比例定数 δ)と仮定する。

他方、環境保全は(比例定数 σ をもって)環境保全投資に比例して起こると仮定する。

すなわち、環境ストックは以下の方程式に従う。

$$\begin{aligned} \dot{k}_g &= \sigma i_g - \delta(f - \bar{c}) \\ &= (\sigma x - \delta)(f - \bar{c}) = (\sigma x - \delta)F \end{aligned}$$

ただし $\sigma > \delta$ と仮定する。

さらに、環境保全に対するある期の投資は、その期の生産によってもたらされる廃棄物や、環境負荷因子を除去するまでの効果しか持ち得ず、環境ストックを増大させる効果はないと考えよう。これは環境保全投資が、高々環境を先の時点から受け継いだ一定に維持するだけであって、一たん劣悪化した環境を、より良質なものに改良する力がないと想定することである。すなわち、環境保全投資率は δ/σ という最大値を持つ。

$$0 \leq x \leq \delta/\sigma$$

次に、社会的厚生は消費からの効用 $U(c)$ と環境ストックからの効用 $V(k_g)$ からなるでしょう。さらに、2つの効用は separably に加法的であるとする。効用関数 U, V とともに限界効用逓減という性質を持つとする。

$$U' > 0, U'' < 0, V' > 0, V'' < 0.$$

こうして、無限時間区間にわたる社会的厚生の値は、以下のように示される。

1) このとき、システムの定常点が $f = \bar{c}$ または $F = 0$ で成立するなら、 e^*, z^*, x^* の値が何であっても

$$c - \bar{c} = e^*F = 0, i_g = x^*F = 0, i_p = z^*F = 0$$

のように、システムの数量変数の値は確定される。

$$\int_0^{\infty} [U(c) + V(k_g)] e^{-\delta t} dt$$

ここで、 δ は時間選好率を示す定数。

こうして以下の計画問題を定義することができる。

$$\max \rightarrow \int_0^{\infty} [U(eF + \bar{c}) + V(k_g)] e^{-\delta t} dt \quad (1)$$

$$0 \leq e, x, z \leq 1$$

$$x \leq \delta/\sigma$$

$$e + x + z = 1$$

s.t.

$$\dot{k}_p = zF = (1 - e - x)F \quad (2)$$

$$\dot{k}_g = (\alpha x - \delta)F \quad (3)$$

上の計画問題をポントリヤーチンの最大原理を用いて解こう。最初に、經常価値ラグランジアンを導入する。

p_p, p_g を微分方程式(2), (3)の補助変数とし $\lambda, \theta, \xi, \eta, v$ をラグランジュ乗数とする。ラグランジアンは以下のように書ける。

$$\begin{aligned} L &= U(eF + \bar{c}) + V(k_g) + p_p(zF) + p_g[(\alpha x - \delta)F] + \lambda(1 - e - x - z) + \theta[(\delta/\sigma) - x] + \xi x + \eta e + v z \\ &= H + \lambda(1 - e - x - z) + \theta[(\delta/\sigma) - x] + \xi x + \eta e + v z \end{aligned} \quad (4)$$

ここで上の第1の方程式右辺の4つの項の和である H はしばしば經常価値ハミルトニアンと呼ばれる。 L を e, x, z に関し最大化することにしよう。

$L_e = 0$ より、 $H_e = \lambda - \eta$ をうる。そして次の関係が成り立つ。

$$U^*F = \lambda \quad \text{if } e^* > 0$$

$$U^*F \leq \lambda \quad \text{if } e^* = 0$$

$L_x = 0$ より、 $H_x = \lambda - \xi + \theta$ をうる。そして次の関係が成り立つ。

$$\sigma p_g F = \lambda \quad \text{のとき } 0 < x^* < \delta/\sigma$$

$$\sigma p_g F \geq \lambda \quad \text{のとき } x^* = \delta/\sigma$$

$$\sigma p_g F \leq \lambda \quad \text{のとき } x^* = 0$$

$L_z = 0$ より、 $H_z = \lambda - v$ をうる。そして次の関係が成り立つ。

$$p_p F = \lambda \quad \text{のとき } z^* > 0$$

$$p_p F \leq \lambda \quad \text{のとき } z^* = 0$$

こうして、われわれは e^*, z^*, x^* の最適値のケースに関する次の表を得る。

ケース (A) 消費率、環境投資率、資本投資率いずれもが内点最適

$$e^*, z^* > 0, \delta/\sigma > x^* > 0$$

$$\text{ただし, } U^*F = \sigma p_g F = p_p F \text{ のとき} \quad (5)$$

ケース (B) 消費率、資本投資率が内点最適、環境投資率が上限値 (δ/σ)

$$e^*, z^* > 0, x^* = \delta/\sigma$$

$$\text{ただし, } \sigma p_g F \geq p_p F \text{ かつ} \quad (6)$$

$$U^*(eF + \bar{c})F = p_p F \text{ のとき} \quad (7)$$

ケース (C) 消費率、環境投資率が内点最適、資本ストック投資率が下限値 (0)

$$e^* > 0, z^* = 0, 0 < x^* < \delta/\sigma$$

$$\text{ただし, } U^*F = \sigma p_g F \geq p_p F \text{ のとき} \quad (8)$$

ケース (D) 消費率が内点最適、資本ストック投資率が下限値 (0)、環境投資率が上限値 (δ/σ)

$$e^* > 0, z^* = 0, x^* = \delta/\sigma$$

ただし, $UF \leq \sigma p_g F, UF \geq p_p F$ のとき

$$(9) (10)$$

ケース (E) 消費率, 資本投資率が内点最適, 環境投資率が下限値 (0)

$$e^*, z^* > 0, x^* = 0$$

ただし, $p_p F = UF \geq \sigma p_g F$ のとき

$$(11)$$

ケース (F) 産出が \bar{c} に等しかろうと, それ以上であろうと消費のみに向けられるシステム

$$e^* = 1, x^* = z^* = 0$$

ただし, $\sigma p_g F \leq UF$

$$(12)$$

および, $p_p F \leq UF$ のとき

$$(13)$$

ケース (G) 消費は環境保全的最低水準であり, 残りの産出からの資本投資, 環境保全投資ともに内点最適

$$e^* = 0, z^* > 0, 0 < x^* < \delta/\sigma$$

ただし $\sigma p_g F = p_p F \geq UF$ のとき

$$(14)$$

ケース (H) 消費は環境保全的最低水準であり, 環境保全への最大限投資を行って, 残りを資本投資に向ける, 環境保全指向的システム

$$e^* = 0, z^* > 0, x^* = \delta/\sigma$$

ただし, $UF \leq p_p F$ および $\sigma p_g F \geq p_p F$ のとき

$$(15) (16)$$

ケース (I) 消費は環境保全的最低水準, 環境保全投資はゼロで, 産出は資本設備投資にのみ向けられる, 資本蓄積指向的システム

$$e^* = x^* = 0, z^* = 1$$

ただし, $UF \leq p_p F$

$$(17)$$

および $\sigma p_g F \leq p_p F$ のとき

$$(18)$$

ケース (A) は, 内点最大である。しかし他のケースは e, x, z のいずれかがゼロかまたは $x = \delta/\sigma$ となる端点最大である。²⁾

随伴変数の微分方程式は以下のように与えられる。ここで $F_p = \partial F / \partial k_p, F_g = \partial F / \partial k_g,$

$$\dot{p}_p = \rho p_p - \partial H / \partial k_p = \rho p_p - U e F_p - p_p \{ z F_p \} - p_g \{ (\alpha x - \delta) F_p \} \quad (19)$$

$$\dot{p}_g = \rho p_g - \partial H / \partial k_g = \rho p_g - U e F_g - V - p_p \{ z F_g \} - p_g \{ (\alpha x - \delta) F_g \} \quad (20)$$

コントロール変数の最適値を (19), (20) の右辺に代入して (A) システムから (I) システムの下での (p_p, p_g) の挙動を検討する。 (k_p, k_g) の動きは, ケース (A) から (I) の e^*, z^*, x^* の値を (2), (3) の右辺に代入して知られる。さらに横断条件として次式が必要である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} p_p k_p^* = 0 \quad (*)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} p_g k_g^* = 0 \quad (**)$$

2) 環境を含まない最適成長モデルにおいて, システムの1人当り消費が最低生活水準 \bar{c} に等しい値をとらないようにするため

$$U'(\bar{c}) = \infty$$

という前提を導入して, 端点最適のケースを扱う煩わしさを避けてきた。本論文では, 環境保全型生産体系 $f = \bar{c}$ のもつ意味を明確にする必要から, $U'(\bar{c}) = \infty$ という仮定を導入しない。

3) $F = 0$ なら $f = \bar{c}$ であり,

$$c - \bar{c} = e^* \times 0 = 0, i_p = z^* \times 0 = 0, U_g = x^* \times 0 = 0$$

となるので, すべての産出が, 環境保全的最低生活水準消費に向けられる。この場合, 環境保全投資がゼロ, 資本投資がゼロであり, 環境ストック資本ストックともに一定に維持される。

以下の3, 4節において (A) から (I) システムの動学分析を検討する。

第3節. 動学分析——正の消費率の場合

本節において、正の消費率 $e^* > 0$ をもつシステム ((A), (B), (C), (D), (E), (F)) の行動を分析する。

(A) システム

このシステムは正の消費率と資本形成および環境保全の両方に対して正の投資率をもつシステムである。

本システムにおいて、関係式 $U = p_p, p_g = (1/\sigma) p_p$ および $z = 1 - e - x$ を用いて、随伴変数に関する微分方程式を以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \dot{p}_p &= \rho p_p - p_p e F_p - p_p (1 - x - e) F_p - (1/\sigma) p_p (\alpha x - \delta) F_p \\ &= [\rho - (1 - \delta/\sigma) F_p] p_p \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_g &= \rho p_g - p_p e F_g - V - p_p \{(1 - x - e) F_g\} - p_p / \sigma \{\alpha x - \delta\} F_g \\ &= [\rho - (\sigma - \delta) F_g] p_g - V \end{aligned} \quad (22)$$

最適消費率 e^* は、以下の関係から導かれる。

$$U'(e^* F + \bar{c}) = p_p \quad (23)$$

$$\text{それゆえ } e^* = (U'^{-1}(p_p) - \bar{c})/F \quad (24)$$

(24) を (2) に代入して次式を得る。

$$\dot{k}_p = (1 - x^*) F - U'^{-1}(p_p) + \bar{c} \quad (25)$$

次に、環境保全への最適投資率 x^* を導く。

ケース (A) の下で成り立つ方程式 $\sigma p_g = p_p$ の両辺を t で微分して、

$$\sigma \dot{p}_g = \dot{p}_p$$

を得る。(21) と (22) を上の関係に代入して次式を得る。

$$p_p = \sigma^2 V'(k_g) / [(\sigma - \delta)(F_p - \sigma F_g)] = \phi(k_p, k_g) \quad (26)$$

これは図-2の曲面を与える。 $p_p > 0$ のため、次の関係が成立しなければならない。

$$F_p > \sigma F_g$$

(26) の両辺を t で微分して次式を得る。

$$\dot{p}_p = \phi_1 \dot{k}_p + \phi_2 \dot{k}_g$$

ここで $\phi_1 = \partial\phi/\partial k_p$, $\phi_2 = \partial\phi/\partial k_g$

(21), (25), (3) を上の方程式に代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} &[\rho - (1 - \delta/\sigma) F_p] p_p \\ &= \phi_1 \{(1 - x^*) F - U'^{-1}(p_p) + \bar{c}\} + \phi_2 \{(\alpha x^* - \delta) F\} \end{aligned}$$

これから、環境保全に対する最適投資率 x^* を導くことができる。最適値 x^* の表現は複雑である。そこで定常点の x^* の値を考察してみよう。

定常点において $\dot{p}_p = 0$ だから、

$$\rho - (1 - \delta/\sigma) F_p = 0 \quad (26)$$

さらに、定常点では $\dot{k}_g = 0$ より $0 < x^* < 1$ 政策の下では $F = 0$ を意味する。したがって、(23) より

$$U'^{-1}(p_p) = \bar{c} \quad (27)$$

も成立しなければならない。³⁾

さて、(A) システムの定常点の近くでの (k_g, k_p, p_p) の動きを調べよう。(A) システムの方程式を再掲するとつぎのようである。

$$\dot{k}_g = (\sigma x^* - \delta) F \quad (3)$$

$$\dot{k}_p = (1 - x^*) F - U'^{-1}(p_p) + \bar{c} \quad (25)$$

$$\dot{p}_p = [\rho - (1 - \delta/\sigma) F_p] p_p \quad (21)$$

$$\sigma p_g = p_p$$

定常点では次の関係を与える。

$$F = 0$$

$$U'^{-1}(p_p) = \bar{c}$$

$$\rho - (1 - \delta/\sigma) F_p = 0$$

それ故 (3) (25) (21) の定常点の回りの線形近似式は、次のように示される。

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_g \\ \dot{k}_p \\ \dot{p}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma x^* - \delta) F_g, (\sigma x^* - \delta) (\sigma p/\sigma - \delta), 0 \\ (1 - x^*) F_g, (1 - x^*) (\sigma p/\sigma - \delta), -U''^{-1} \\ -(1 - \delta/\sigma) F_{pg} U'(\bar{c}), -(1 - \delta/\sigma) F_{pp} U'(\bar{c}), 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_g - \bar{k}_g \\ k_p - \bar{k}_p \\ p_p - \bar{p}_p \end{bmatrix} \quad (29)$$

右辺のヤコビ行列 J^* の固有方程式は以下ようになる。

$$\lambda^3 - \text{tr} J^* \lambda^2 - [(\sigma - \delta)/\sigma] F_{pp} U'(\bar{c})/U''(\bar{c}) \lambda - \det J^* = 0 \quad (30)$$

ここで $\det J^* = [U'(\bar{c})/U''(\bar{c})] [(\sigma - \delta)/\sigma]$

$$\times \{(\sigma - \delta)[F_{pp} - \sigma F_{gg}]/[F_{pp} - 2\sigma F_{pg} + \sigma^2 F_{gg}]\}$$

$$\times [(\sigma p/\sigma - \delta) F_{pg} - F_g F_{pp}] < 0$$

この関係式より (30) の 3 次方程式は縦軸切片がマイナスゆえ、少なくとも一つ正根をもつ。その根を λ_3 とする。他の 2 根の性質を調べるため根と係数の関係から

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr} J^* > 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2) = -[(\sigma - \delta)/\sigma] F_{pp} (U'/U'') < 0 \quad (31)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = [\text{Re}(\lambda_1)]^2 + [\text{Im}(\lambda_1)]^2 > 0, \text{ ゆえに (31) の第 2 の関係式から次の式を得る。}$$

$$\lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2) < 0$$

$\lambda_3 > 0$ としたので

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \text{Re}(\lambda_1) < 0$$

こうして、固有方程式の共役根は負の実部をもつ。

上の議論から、固有方程式は (1) 2 つの負の実根と一つの正の実根か (2) 負の実部をもつ共役複素根と正の実根をもつ。⁴⁾

<命題>

システム (A) に定常解が存在するなら

(i) (k_p, k_g, p_p) 空間において二次元多様体が存在して、この多様体上の点から出発するトラジェクトリーは、定常点に収束するが、この多様体から出発しない他のトラジェクトリーは、定常点に収束しない。あるいは、(ii) 二次元多様体が存在して、この多様体上の点から出発するトラジェクトリーは定常点に渦を描きながら収束する。多様体以外の点は収束しない。

さらに上述したシステムに定常解が存在するための次の命題も得る。

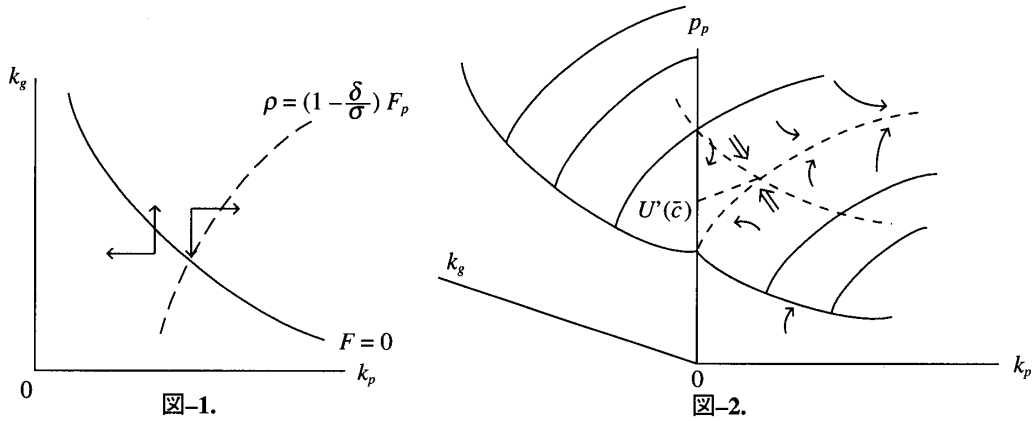
4) M, Urabe [4] p. 70 参照。

5) $F=0, p=(1-\delta/\sigma)F_p$ の交点の k_p^*, k_g^* において

$$p_p = \phi(k_p^*, k_g^*) = \sigma^2 V'(k_g^*)/[(\sigma - \delta)(F_p - \sigma F_g)]$$

$$= \sigma V'/(\rho - (\sigma - \delta)F_g) = U'(\bar{c})$$

なら、(A) システムに定常解が存在する。



<命題>

システム (A) に定常解が存在するために、次式が成立せねばならない。⁵⁾

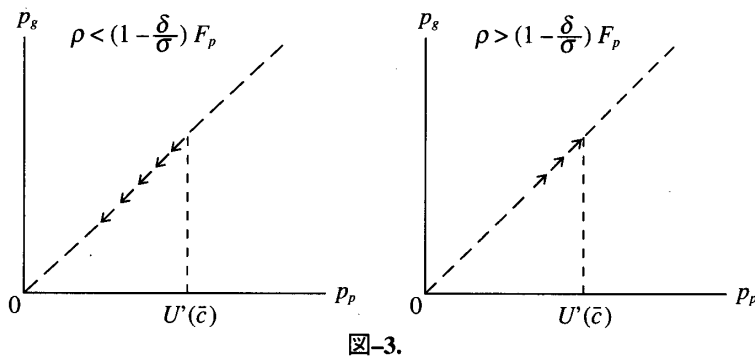
$$\frac{\sigma V(\bar{k}_g^*)}{\rho - (\sigma - \delta) F_g(\bar{k}_p^*, \bar{k}_g^*)} = U(\bar{c})$$

つぎに三次元空間のトラジェクトリーを図示する。最初に (k_p, k_g) 平面の挙動を見る。図-1のよ
うにケース (A) の場合は、 $0 < x^* < \delta/\sigma$ ((3), (25) より) なので (k_p, k_g) の挙動は矢印のように $F >$
 0 で南東方向を向いている。⁶⁾

p_p は $p_p = \phi(k_p, k_g)$ 平面上を (21) にしたがって動くので、 $\rho > (\sigma - \delta/\sigma) F_p$ なら $\dot{p}_p > 0$ 、 $\rho < (\sigma - \delta/\sigma) F_p$ なら $\dot{p}_p < 0$ なる。

この場合 (k_p, k_g, p_p) 空間の定常点は鞍点的に安定である。

すなわち1次元多様体が存在して、この多様体上の解は定常点に収束するが他の解は発散する。
ところで、 $p_p = U(\bar{c})$ に到ったとき、 k_p は上昇をやめるので、 k_p は有界。 p_p も有界だから、横断条
件 (*) が成立する。また k_g は減少関数だから有界。 $p_g = \frac{1}{\sigma} p_p$ より p_g も有界。よって横断条件 (**) も成立する。こうして定常点に収束する解は、無限時間最適経路である。



6) $\dot{k}_p > 0$ については、以下の議論より明らかになる。
 $1 - x^* = e^* + z^* > e^*$, したがって $(1 - x^*) F > e^* F$
 $(1 - x^*) F + \bar{c} > e^* F + \bar{c}$
 $\therefore U[(1 - x^*) F + \bar{c}] < U[e^* F + \bar{c}] = p_p$
 ゆえに $(1 - x^*) F + \bar{c} > U^{-1}(p_p)$ より $\dot{k}_p > 0$ 。

最後に定常均衡解に収束しない (A) システムの動きをみるため (p_p, p_g) 空間のトラジェクトリーを計算しなければならない。(A) システムが選ばれるためには、次式が成立せねばならない。

$$p_p = \sigma p_g = U'(e^*F + \bar{c})$$

(21) より, $\rho > (1 - \delta/\sigma)F_p$ のとき $\dot{p}_p > 0$ (逆は逆)。

$p_g = 1/\sigma p_p$ 上のトラジェクトリーは, $\rho > (1 - \delta/\sigma)F_p$ のとき北東を向いて, $p_g = 1/\sigma p_p$ 上を移動し $p_p = U'(\bar{c})$ を越える。 $\rho < (1 - \delta/\sigma)F_p$ のとき逆向きに移動するが途中 $\rho < (1 - \frac{\delta}{\sigma})F_p$ の領域に入ると反転して上方に移動し, $p_p = U'(\bar{c})$ を越える。どちらの場合にも (p_p, p_g) のトラジェクトリーは, ケース (A) のコントロール変数の値を選択させる条件 $U'(\bar{c}) = p_p$ を破壊する。

こうして次の命題をうる

<命題>

前述定常解の存在条件をみたすとき, (A) システムは, 無限時間最適経路を含む。そうでないとき, (A) システムが, 選択されるのは, 一時的である。

(B) システム

このシステムは, ある期の生産活動によりもたらされる廃棄物など環境劣化因子をすべてちょうど浄化するだけの環境保全投資 $x^* = \delta/\sigma$ を行い, 消費率も資本投資率も正となるものである。この場合 e^* は

$$U'(e^*F + \bar{c}) = p_p$$

から決まり, 最適投資率はこの e^* を用いて $z^* = 1 - e^* - \delta/\sigma$ で与えられる。

随伴変数の微分方程式は (A) システムと同じようにしてえられる。こうして, このシステムはつぎの微分方程式をもつ。

$$\dot{k}_p = (1 - \delta/\sigma)F - U^{-1}(p_p) + \bar{c} \tag{32}$$

$$\dot{k}_g = 0$$

$$\dot{p}_p = [\rho - (1 - \delta/\sigma)F_p] p_p \tag{21}$$

$$\dot{p}_g = \rho p_g - V - p_p(1 - \delta/\sigma)F_g \tag{34}$$

$k_g = \text{const}$ であるから, このシステムは (32), (21) で構成される (k_p, p_p) システムに帰着される。 (k_p, p_p) システムの定常点を見つけるため, $\dot{k}_p = 0$ とおく。これはつぎの関係式を与える (図4の右下がり曲線)

$$p_p = U'[(1 - \delta/\sigma)F + \bar{c}] \tag{35}$$

$\dot{p}_p = 0$ の点では次式が成立する。(図4の垂直線)

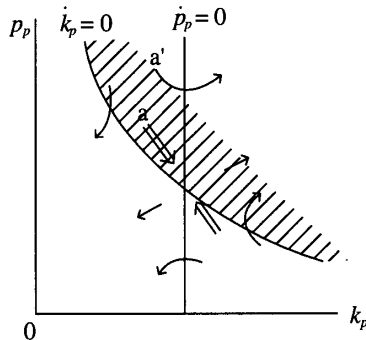


図-4.

$$\rho = (1 - \delta/\sigma) F_p$$

位相図を描くことで、定常点は鞍点となることがわかる。

位相図は、資本ストックだけを含む（そして環境ストックを含まない）最適成長モデルと同一である。

$F > 0$ のとき、 $0 < e^* < 1 - \delta/\sigma$ なる関係は次式を意味する。

$$0 < \{U^{-1}[p_p] - \bar{c}\}/F < 1 - \delta/\sigma$$

そしてつぎの関係が成立しなければならない。

$$p_p \geq U[(1 - \delta/\sigma) F + \bar{c}]$$

これはケース (B) では、図-4で斜線を付した領域が妥当することを意味する。（もし $F < 0$ なら、シェードの付けられない領域が妥当する）

つぎに、随伴変数 (p_p, p_g) の挙動を吟味する。

$\rho > (1 - \delta/\sigma) F_p$ のとき、 (p_p, p_g) 変数のトラジェクトリーは図-5に示されるようなものである。

$\rho < (1 - \delta/\sigma) F_p$ なら、図-6に示されるトラジェクトリーになる。

(k_p, k_g) 空間に、図-4の定常点に収束する一意の軌道が存在する（図-4 (a)）。この軌道は $\rho < (1 - \delta/\sigma) F$ の領域にとどまる。それゆえ、対応する (p_p, p_g) 変数は図-6のような軌道を持ち、 p_p が図-4の a のように定常点に収束するとき、有界になるが、このとき、 $\dot{p}_p = 0$ より $\frac{dp_g}{dp_p} = \infty$ となり p_g は非有界となり、横断条件 (**) を破壊する。

一方、 (k_p, k_g) 空間で図 (a) のようなトラジェクトリーは、当初は $\rho < (1 - \delta/\sigma) F_p$ 領域にあるが、次いで $\rho > (1 - \delta/\sigma) F_p$ 領域に変わる。それゆえ (B) システムの最適性を保証する条件 $p_g > (1/\sigma) p_p$ は破壊される。こうして (a) のケースは経済は (B) システムを離れる。

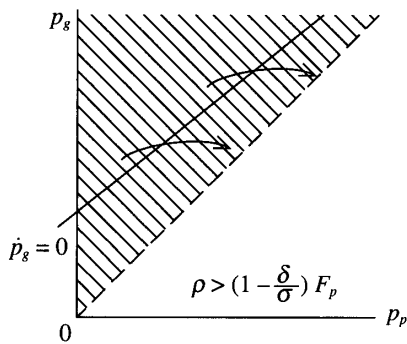


図-5.

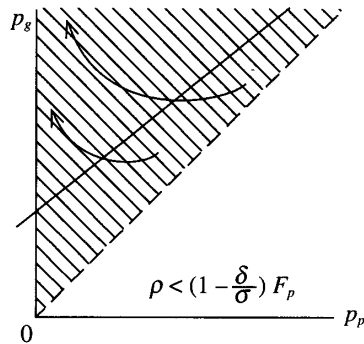


図-6.

<命題>

(B) システムは無限時間最適経路を含まない。

(C) システム

このシステムは、資本ストックへの投資を全く行わず、すべての産出を消費または環境保全にのみ向ける。しかし、環境保全に対する投資は、 δ/σ という最大水準には達していない。（これは、すでに十分な資本蓄積を行った、既発展国で環境保全に向かっている先進国型である）

$$U[eF + \bar{c}] = p_g \sigma$$

から、最適消費率は、つぎのように与えられる。

$$e^* = [U^{-1}(p_g \sigma) - \bar{c}]/F \tag{36}$$

環境保全への投資率は、以下のように与えられる。

$$x^* = 1 - e^* = [F - U^{-1}(p_g \sigma) + \bar{c}] / F$$

状態変数の微分方程式は以下のように示される。

$$\dot{k}_g = (\sigma - \delta) F - \sigma U^{-1}(p_g \sigma) + \sigma \bar{c} \quad (37)$$

$$\dot{k}_p = 0$$

随伴変数の微分方程式は (A) システムと同一の方法で計算される。

$$\dot{p}_p = \rho p_p - (\sigma - \delta) F_p p_g \quad (38)$$

$$\dot{p}_g = \rho p_g - V' - (\sigma - \delta) p_g F_g \quad (22)$$

しかし、 $0 < x^* < \delta / \sigma$ が成立するためには、 $F > 0$ のとき次式が成立せねばならない。(図-7の斜線部)

$$p_g < (1/\sigma) U'[(1 - \delta/\sigma) F + \bar{c}] \quad (39)$$

この微分方程式は (37), (22) という 2 変数 (k_g, p_g) に関し、閉じた方程式を含む。

$\dot{k}_g = 0$ 線はつぎのように書ける。

$$p_g = (1/\sigma) U'[(1 - \delta/\sigma) F + \bar{c}]$$

$\dot{p}_g = 0$ 線はつぎの形で示される。

$$p_g = V' / [\rho - (\sigma - \delta) F_g] \quad (40)$$

こうして位相図は、図-7 のように書ける。

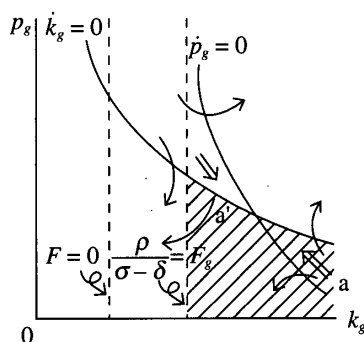


図-7.

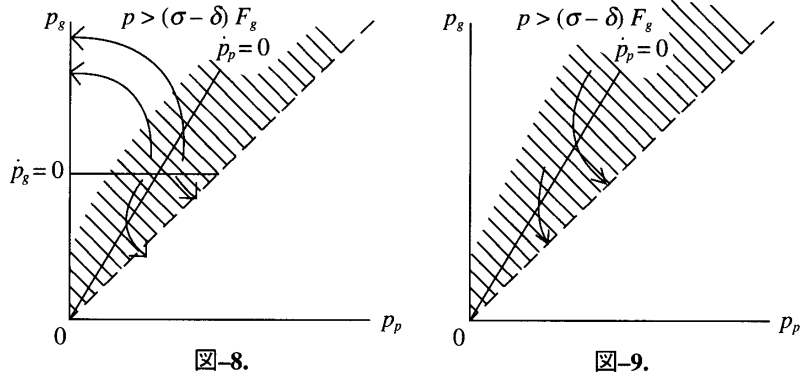
図から、定常点はもし存在するなら鞍点である。

斜線部は条件 (39) が満たされる領域である。しかし、境界線上では $x^* = \delta / \sigma$ を意味する。それゆえ (C) システムには内点の鞍点はない。

随伴変数の微分方程式は図-8, 9 のようなトランジェクトリーを与える。

もし、 (k_p, k_g) 空間の軌道が a のように定常点に収束するものなら、図-7 で示すように、 k_g が $\rho > (1 - \delta/\sigma) F_g$ の範囲にあるので、図-8 の状況が妥当する。トランジェクトリーが北西方向に向かっていて $p_p = 0$ にならない間は、(C) システムは破壊されない。ところで p_g が図-7 の a のように遍増的に定常点に収束するとき $p_p \rightarrow$ 有限になるので $k_p =$ 一定と合わせて、横断条件 (*) が成立する。しかし、 (k_p, k_g) 空間の (a') におけるように $k_g \rightarrow 0$ のときには、 (p_p, p_g) システムのトランジェクトリーは、図8 から図9 になる。こうして、(C) システムを最適にする随伴変数条件は破壊され、他のシステムに変わらねばならないことを意味する。以上まとめて

環境制約の下の最適経済成長について



<命題>

(C) システムは無限時間最適経路を含む。このとき、図-7 からわかるように、定常点に収束する経路は初期点で十分に大きい環境ストックをもっている。

(D) システム

このシステムは、環境ストックを不変に保つよう環境保全投資 δ/σ を行うが、資本形成用の投資は全く行わない。コントロール変数の最適値は、以下の値をもつ。

$$x^* = \delta/\sigma$$

$$e^* = 1 - \delta/\sigma$$

$$z^* = 0$$

このシステムは、つぎの微分方程式をもつ。

$$\dot{k}_p = 0$$

$$\dot{k}_g = 0$$

$$\dot{p}_p = \rho p_p - U'[(1 - \delta/\sigma)F + \bar{c}]F_p(1 - \delta/\sigma) \quad (41)$$

$$\dot{p}_g = \rho p_g - U'[(1 - \delta/\sigma)F + \bar{c}]F_g(1 - \delta/\sigma) - V' \quad (42)$$

最初に k_g, k_p が一定だから、産出 y もまた一定であり、このシステムでは常に定常解になることに注意せよ。つぎに随伴変数の微分方程式を考えよう。 $\dot{p}_p = 0$ とおけば次式をうる。

$$p_p = U'[(1 - \delta/\sigma)F + \bar{c}]F_p(1 - \delta/\sigma)/\rho$$

$\dot{p}_g = 0$ とおけば次式をうる。

$$p_g = \{U'[(1 - \delta/\sigma)F + \bar{c}]F_g(1 - \delta/\sigma) + V'\}/\rho$$

位相図は以下のようなになる。

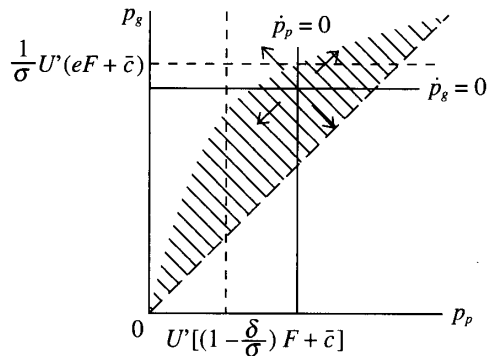


図-10.

定常点は湧点であり、不安定となる。さらに (9), (10) $p_p \leq U'[(1-\delta/\sigma)F + \bar{c}]$, $p_g \geq (1/\sigma)U'(eF + \bar{c})$ を満足する (p_p, p_g) 経路は北西方向のもののみである。(それも $p_p = 0$ にならない限り)。しかし、このとき $p_g \rightarrow \infty$ となり横断条件 (**) を破壊する。

(p_p, p_g) 空間の他の経路は、(D) システムを最適なものとする条件 (9), (10) を破壊する。それゆえ

<命題>

(D) システムは無限的時間最適経路を含まず過渡的システムといえる。

(F) システム

このシステムは、産出を消費のためにのみ用いて、資本ストックへの投資や環境保全投資には向けないものである。 $e^* = 1, z^* = 0, x^* = 0$ だから資本ストックは一定であり、環境ストックは(最低生存水準を超える)生産活動の分だけ減少していく。システムの微分方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{k}_p &= 0 \\ \dot{k}_g &= -\delta F \end{aligned} \tag{43}$$

$$\dot{p}_p = \rho p_p - U'F_p + \delta F_p p_g \tag{44}$$

$$\dot{p}_g = (\rho + \delta F_g)p_g - U'F_g - V \tag{45}$$

位相図は図-11に示される。

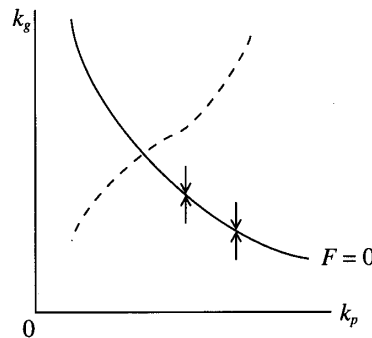


図-11.

任意の所与の k_p に対し、任意の k_g から出発するトラジェクトリーは、 (k_p, k_g) 空間で垂直変動し、純産出 $F=0$ の曲線に近づく。

等量曲線は $F=0$ のそれに近づく。つぎに随伴変数の位相図を考える。 $\dot{p}_g = 0$ 線は以下のような与えられる

$$p_g = (U'F_g + V)/(\rho + \delta F_g)$$

$\dot{p}_p = 0$ 線は以下ようになる。

$$p_g = (U'F_p - \rho p_p)/\delta F_p$$

(p_p, p_g) 空間のトラジェクトリーは図-12の形を取る。

(F) システムを最適にする随伴変数の条件 (12), (13) は、図-12の斜線部が実行可能ということの意味する。

こうして、定常点 (\bar{p}_p, \bar{p}_g) の北西部を指して移るトラジェクトリーだけが $p_p = 0$ とならない限り $[0, \infty)$ の間、条件 (12), (13) を満たしうる。しかし、他のトラジェクトリーは斜線部領域から飛び出す。

定常点の周りの (43), (44), (45) の線形近似は以下のように書ける。

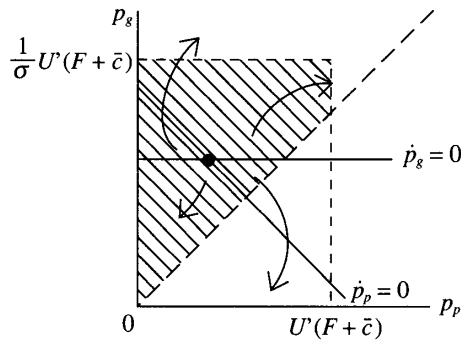


図-12.

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_g \\ \dot{p}_g \\ \dot{p}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta F_g & 0 & 0 \\ \delta p_g F_{gg} - U'' F_g^2 - U' F_{gg} - V & \rho + \delta F_g & 0 \\ -U'' F_g F_p - U' F_{pg} + \delta F_{pg} p_g & \delta F_g & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p - \bar{k}_g \\ p_g - \bar{p}_g \\ p_p - \bar{p}_p \end{bmatrix} \quad (46)$$

(46) のヤコビ行列は 3 角行列だから、その固有値は行列の対角成分で与えられる。

$$-\delta F_g < 0, \quad \rho + \delta F_g > 0, \quad \rho > 0$$

上の固有値の符号をみれば、定常点は鞍点であることがわかる。

さらに、位相図より k_g は収束するが (k_p は一定である)、 p_p および p_g は発散するという意味での鞍点であることもわかる。したがって、 $k_p p_p$ も $k_g p_g$ もときに非有界となり横断条件 (*) (**) をみたさない。こうして

<命題>

(F) システムは、無限時間最適経路を含まない。

(E) システム

このシステムは、環境保全投資を全く行わない。産出は消費および資本ストックへの投資だけに処分される。消費率は (24) によって与えられる。なぜなら、このシステムはケース (A) と同じ条件 (23) をもつ。

資本投資率は

$$z^* = 1 - e^* = (F - U^{-1}[p_p] + \bar{c})/F$$

となる。こうして微分方程式は、つぎのように書ける。

$$\dot{k}_p = (1 - e^*) F = F - U^{-1}[p_p] + \bar{c} \quad (47)$$

$$\dot{k}_g = -\delta F \quad (43)$$

$$\dot{p}_p = (\rho - F_p) p_p + \delta F_p p_g \quad (48)$$

$$\dot{p}_g = (\rho + \delta F_g) p_g - V - F_g p_p \quad (49)$$

$\dot{k}_p = \dot{k}_g = 0$ より、(k_p, k_g) システムの定常状態は $F = 0$, $F = U^{-1}[p_p] - \bar{c}$ 。それゆえ、 $F = 0$ と $p_p = U^{-1}(\bar{c})$ においてである。

位相図は以下の図-13 のようである。

随伴変数の定常点を $\dot{p}_p = 0$, $\dot{p}_g = 0$ とおくことによって、つぎの直線の交点で与えられることがわかる。

$$p_p = (-\delta F_p p_g) / (\rho - F_p)$$

$$p_g = (V + F_g p_p) / (\rho + \delta F_g)$$

位相図は以下のように示される。

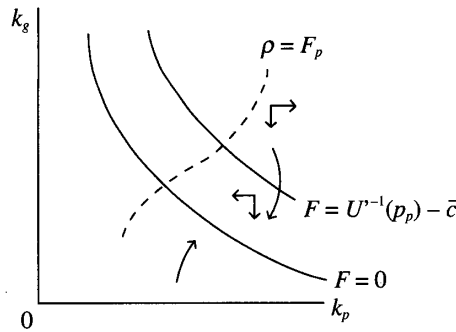


図-13.

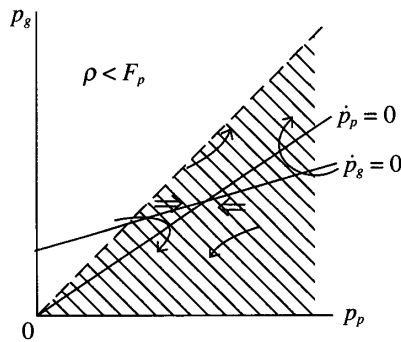


図-14.

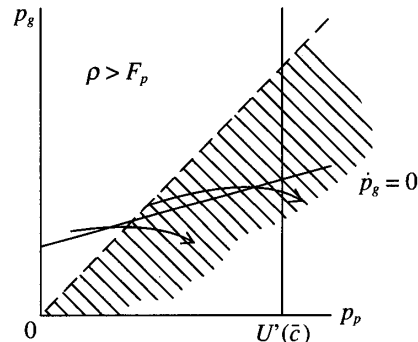


図-15.

それゆえ、もし $\rho < F_p$ かつ $-\delta F_p / (\rho - F_p) < F_g / (\rho + \delta F_g)$ なら、2つの直線は交点を持ち、定常点に収束する解がある。

もし (k_p, k_g) 空間の経路が $F=0$ の等量線に到る前に、 $\rho > F_p$ の範囲にはいるなら、 (p_p, p_g) 空間において定常解は存在しない。

(E) システムが最適になる条件は、図-14のシェードのついた範囲に (p_p, p_g) がとどまる限り維持される。 $\rho < F_p$ なる限り (p_p, p_g) の定常状態に収束するなら、システム (E) の状態は維持される。この定常解に収束する解では、図-13の定常点で (k_p, k_g) が有界、かつ p_p と p_g が収束する鞍点が有界であるので、横断条件 (*) (**) が成立する。こうして、無限時間最適経路となりうる。この経路において、図-13より k_g^0 が大きく、 k_p^0 が小さいことが知れる。しかし、定常状態に収束しない経路は、 $p_p = 0$ または $p_p = U^{-1}(\bar{c})$ に到達すると、他のシステムにスイッチされることとなり (E) システムの維持は不可能となる。

<命題>

初期点における環境ストックが十分で、資本ストックが不足する社会の場合、(E) システムに無限時間最適経路がありうる。

第4節. 動学分析——環境保全的最低生活水準消費をもつ経済の動向

本節において、われわれは消費が人間の生存できる最低生活水準、すなわち $e^* = 0$ (ただし生産は $f > \bar{c}$ であり、産出が一部、資本投資や環境保全投資に回る) に抑制されるケースを考える。

(G) システム

まず最初に (G) システムを取り上げる。このシステムにおいて環境保全への投資率は、可能な

最大レベル δ/σ 以下で最適となっている。

$e^* = 0, \sigma p_g = p_p$ ゆえ、われわれはつぎの微分方程式をうる。

$$\dot{k}_g = (\sigma x^* - \delta) F \quad (3)$$

$$\dot{k}_p = (1 - x^*) F \quad (50)$$

$$\dot{p}_p = [\rho - (1 - \delta/\sigma) F_p] p_p \quad (21)$$

$$\dot{p}_g = [\rho - (\sigma - \delta) F_g] p_g - V \quad (22)$$

x^* を求めるには、(A) システムと同一の手続による。方程式 (14) の両辺を微分して

$$\sigma \dot{p}_g = \dot{p}_p$$

(21), (22) をこの方程式に代入して (26) を得る。 $p_p > 0$ であるから

$$F_p > \sigma F_g$$

となる。(26) を t で微分して、(3), (50) を誘導された方程式に代入して次式をうる。

$$\begin{aligned} & [\rho - (1 - \delta/\sigma) F_p] \sigma V / (\sigma - \delta) \{F_p / \sigma - F_g\} \\ & = \phi_1 (1 - x^*) F + \phi_2 (\sigma x^* - \delta) F \end{aligned}$$

この式から、 x^* を導出することができる。 ϕ_1, ϕ_2 が (k_p, k_g) のみを含むので、 x^* は (k_p, k_g) のみの関数となる。

さらに (G) システムの方程式のうち、(3) と (50) は2変数 (k_p, k_g) に関し閉じている。ここに x^* も (k_p, k_g) のみの関数と与えられているからである。

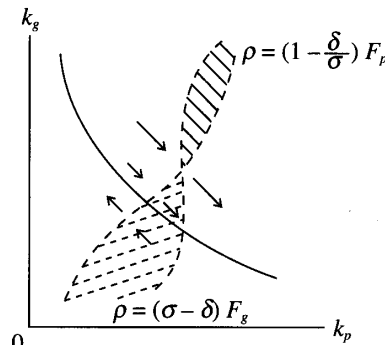


図-16.

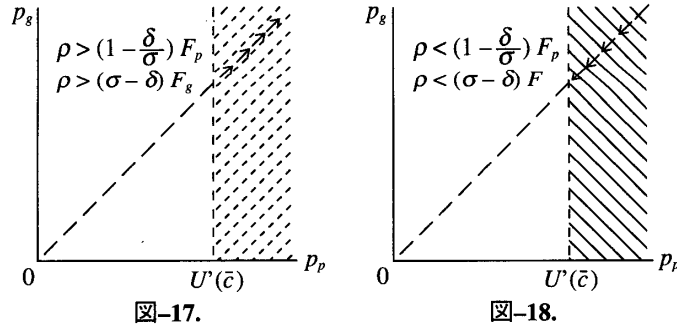
こうして (k_p, k_g) 空間の位相図を描けば図-16のごとくなる。トラジェクトリーは左上から右下領域に動く際に、① $\rho < (1 - \delta/\sigma) F_p, \rho > (\sigma - \delta) F_g$ の領域から ② $\rho < (1 - \delta/\sigma) F_p, \rho < (\sigma - \delta) F_g$ の領域—実線斜線部— (または ③ $\rho > (1 - \delta/\sigma) F_p, \rho > (\sigma - \delta) F_g$ の領域—点線斜線部—) を経て ④ $\rho > (1 - \delta/\sigma) F_p, \rho < (\sigma - \delta) F_g$ の領域に移る。

しかし、① または ④ は $dp_g/dp_p < 0$ にするので、 $p_g = 1/\sigma p_p$ の意味する条件 $dp_g/dp_p > 0$ と両立しない。

こうして ②, ③ に (k_p, k_g) があるときのみが、 $dp_g/dp_p > 0$ と両立する。

両立の場合の (p_p, p_g) 空間の位相図は図-17, 図-18 のようである。

以上のことから (G) システムを最適にする条件 (図-17, 18 の斜線部に (p_p, p_g) がある) は、②, ③ の領域のみであるが、それが保持されるのはトラジェクトリーが ③ の領域—点線斜線部—に入った後、ずっとその領域で $F=0$ の定常点に向かう場合だけである。なお、この場合 $p_p, p_g \rightarrow \infty$ となるので横断条件は満足されないため、無限時間最適経路は含まれない。



また、②の領域に (k_p, k_g) 内のトラジェクトリーが侵入しても、図-18に示すように、やがて (p_p, p_g) 内のトラジェクトリーが境界線を突破するので、(G)を最適にする条件(14)を破壊するので、最適システムとしての(G)システムの採用は一時的である。それ故

<命題> (G)-システムは、一時的にしか成り立たない。

(H) システム

このシステムは、消費率をゼロにして、環境保全投資を最大水準 δ/σ で行う。そして、環境保全に回した残りの産出部分は、資本形成にあてようとするものである。この場合の微分方程式は以下のようなになる。

($e^* = 0, x^* = \delta/\sigma, z^* = 1 - \delta/\sigma$ だから)

$$\dot{k}_p = (1 - \delta/\sigma) F \tag{51}$$

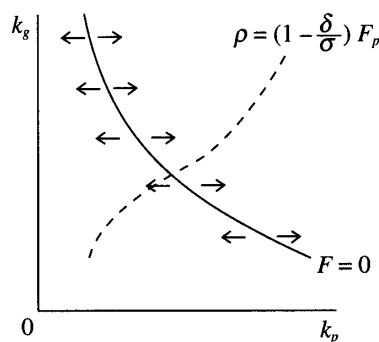
$$\dot{k}_g = 0$$

$$\dot{p}_p = [\rho - (1 - \delta/\sigma) F_p] p_p \tag{21}$$

$$\dot{p}_g = \rho p_g - V - p_p (1 - \delta/\sigma) F_g \tag{34}$$

このシステムは (k_p, k_g) 空間で閉じている。位相図は以下のようなのである。図から明らかなようにこのシステムの定常点 $F=0$ は、不安定である。

さらに (k_p, k_g) 空間の軌道は、① $\rho < (1 - \delta/\sigma) F_p$ 領域から② $\rho > (1 - \delta/\sigma) F_p$ 領域へ移る。



他方、 (p_p, p_g) システムの位相図は図-20 21 のようなのである。しかし、 (k_p, k_g) 空間の軌道から図-21から図20のように移る。こうして、トラジェクトリーが $\rho < (1 - \delta/\sigma) F_p$ のとき $p_p \geq U'(\bar{c})$ 、または $p_p = 0$ 、または $p_g = 1/\sigma p_p$ の境界に衝突しない限り、(H) システムは維持されるように見える。しかし、このシステムにおいて、

$$k_p \rightarrow \infty$$

環境制約の下の最適経済成長について

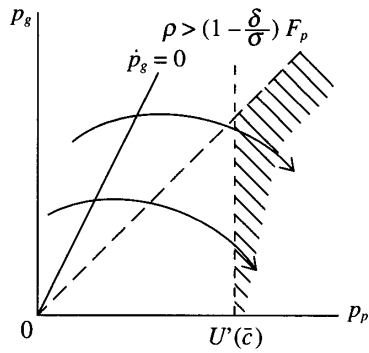


図-20.

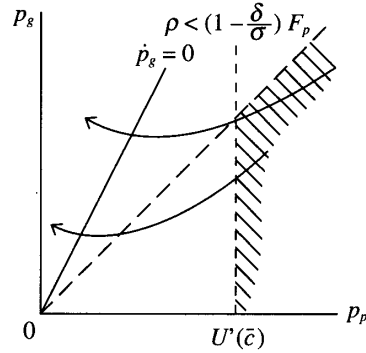


図-21.

となり、横断条件 (*) を満足しない。こうして次の命題をうる

<命題>

(H) システムに無限時間最適経路は含まない。

(I) システム

このシステムはすべての産出を資本形成のみに振り向けるシステムである。

このシステムの微分方程式は以下ようになる。

$$\dot{k}_p = F \tag{52}$$

$$\dot{k}_g = -\delta F \tag{43}$$

$$\dot{p}_p = (\rho - F_p) p_p + \delta F_p p_g \tag{49}$$

$$\dot{p}_g = (\rho + \delta F_g) p_g - V - F_g p_p \tag{50}$$

このシステムの微分方程式は (52), (43) だけで (k_p, k_g) に関し閉じている。

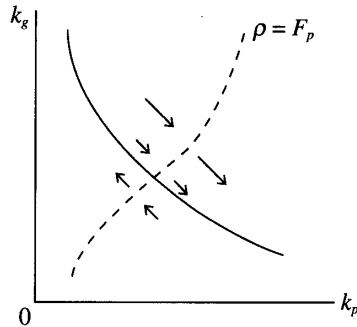


図-22.

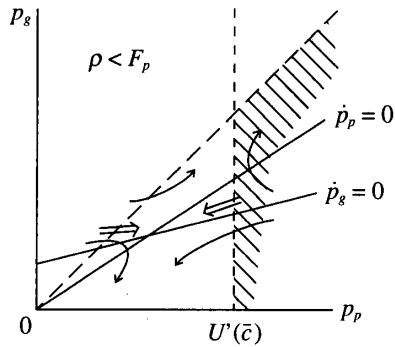


図-23.

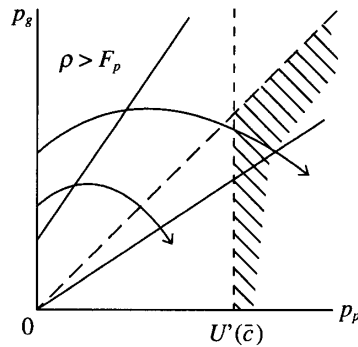


図-24.

(k_p, k_g) 空間の位相図は上図のように描ける。 $F=0$ の定常点は安定的なものや不安定なものがある。

随伴変数の位相図は図-23, 24 のように描ける。図-22 のトラジェクトリーの動きから、 (k_p, k_g) 空間のトラジェクトリーは、 $\rho < F_p$ 領域から $\rho > F_p$ 領域に移動するにしたがって図-23 から 24 の状態にかわる。

(k_p, k_g) 空間のトラジェクトリーが、 $\rho < F_p$ の間、 (p_p, p_g) 空間のトラジェクトリーが $p_p = U'(\bar{c})$ 、または $p_g = 0$ 、または $p_g = 1/\sigma p_p$ の境界に衝突しないか、 (k_p, k_g) 空間のトラジェクトリーが、 $\rho > F_p$ にとどまる間、(I) システムは維持されるように見える。しかし $p_p \rightarrow \infty$ ゆえ、横断条件 (*) を破壊する。

<命題>

システム (I) に無限時間最適経路は存在しない。

第 5 節. 結 論

われわれは、随伴変数に関する以上の分析を総合して、どのシステムが永続的に維持されるかを示すことができる。

最初に、正の消費率をもつ (A), (B), (C), (D), (E) および (F) システムについてみよう。これらのシステムの随伴変数の動きは図25 に描かれる形である。これらの動きを検討し、かつ、横断条件 (*) (**) の成立を検討して、無限時間最適経路が存在するのは、定常均衡解の存在するときのシステム (A), システム (C), (E) の場合であることを知る。

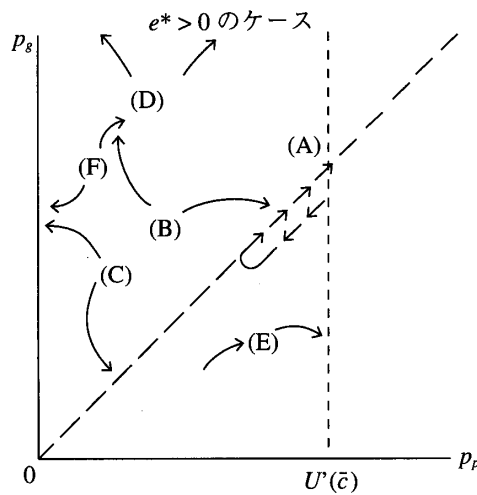


図-25.

これらのシステムに共通の性質として初期時点の環境ストック k_g^0 が十分にあることが挙げられる。システム (C) のように、資本ストックが充分大きいので資本投資率がゼロとなる既発展国型か、システム (E) のように、環境ストックは十分に大きい、資本ストックが、不足するので環境保全的投資は全く行わないで、人工ストック建造に専念する発展途上国型である。なお消費率は (A), (C), (E) いずれにおいても内点最適条件 (23) の与える消費の限界効用 = 資本ストックのシャドウプライスを成立させるものである。

つぎにシステム, (G), (H), (I) の考察に移る。やはり随伴変数のトラジェクトリーの挙動および

環境制約の下の最適経済成長について

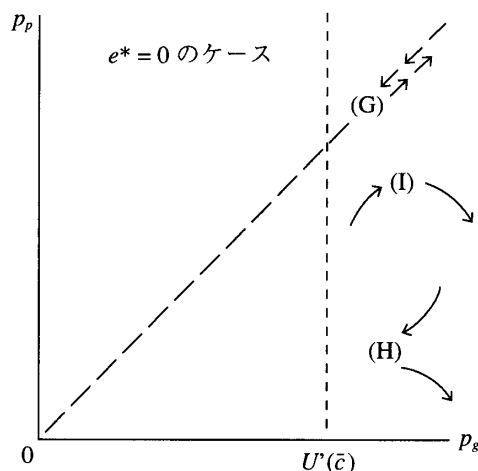


図-26.

横断条件を検討してこれらのシステムは、いずれも一時的にしか起こらず、究極的には、上のパラグラフで述べたものに近づくを得ないことがわかる。こうして次の定理を得る。

<定理>

社会的厚生を最大化する経済が近づく定常状態は、初期時点の環境ストックが充分である社会においてえられる。このとき最適消費率は最適貯蓄論の与える値であり投資に関しては、タイプ(C)のような既発展国のときは、すべての投資を環境保全にあて、タイプ(E)のような発展途上国の場合は、すべての投資を資本建設にあてるべきである。

最後に、本稿では、一たん悪化した環境は、環境保全投資により、せいぜい横ばい状態で維持しうるだけであり、環境水準を以前のそれ以上に上昇させることはできないという想定にたっていた。このため、帰結として、無限時間最適経路の存在が、初期点の環境ストックが十分にある社会に限られるということを導いたのである。環境保全投資により、環境ストック水準が上昇するケースを考察するモデルの検討が残された問題であろう。

しかし、地球規模の環境劣悪化の進行により、ある国の環境保全投資が、せいぜい、その国の環境ストックを同レベルに維持しうるだけだと想定することも、それほど非現実的でない。このような場合、本論で示したように、初期環境ストックが豊かな国以外に、最適環境管理政策は存在しない。こうして、本稿の分析からの政策論的結論として、我々は、地球規模の環境劣悪化防止政策(CO₂の削減、フロン全廃等)をまず採択することが必要であることを導き出すことができる。

参 考 文 献

- [1] K. J. Arrow and M. Kurz, "Public Investment, The Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy", The Johns Hopkins University Press. 1970
- [2] G. Boero and A. Silberston, "Environmental Economics" Macmillan. 1995
- [3] K. G. Mäler, "Environmental Economics: A Theoretical Inquiry" The Johns Hopkins University Press. 1974.
- [4] M. Urabe, "Non Linear Autonomous Oscillation" Academic Press .1967