

PERT におけるクリティカル・パスの交代確率

廣 光 清次郎

(受付 1998 年 6 月 16 日)

概 要

大規模プロジェクトの日程管理手法である PERT は企業経営における計画・管理上の必要性から今日においてもなお重要な OR 技法の一つである。PERT 導入および実施上の便宜から、その確率統計的取り扱いにおいてはいくつかの基本的な仮定がある。他方、PERT ネットワークにおける多くの並行パス間には当然確率変動に伴う干渉があり、この問題に対する研究は限られた範囲しか実施されていない。本研究では、PERT ネットワークにおける並行パス間でのクリティカルパスの交代確率について主に理論的立場から検討する。

目 次

1. まえがき
 2. PERT とその歴史
 3. クリティカル・パスの交代確率
 4. 数値例
 5. あとがき
- 参考文献

1. ま え が き

PERT (Program Evaluation and Review Technique) [1] は1950年代の米国で開発された大規模プロジェクトのための日程管理手法であり、企業経営における計画・管理上の緊急な必要性から、それまでのガント・チャートなどの工程管理方法に代わり、急速に普及したものである。今日、PERT はその有用性において確立された管理手法の一つである [2, 3, 4, 5]。一方、PERT 導入および実施上の便宜から、その数学的統計学的取り扱いにおいてはいくつかの重要な仮定がある。たとえば、確率的 PERT におけるベータ分布の導入、パラメータの特殊な人為的選択といったいわゆる PERT 仮定 [6]、作業時間の加法性に基づく中心極限定理の援用などである。他方、PERT ネットワークには多くの並行パスが存在しうが、その間には確率変動に伴う干渉が発生する。この問題に対する研究はその複雑さから限られた範囲しか実施されていない [7]。

本研究では、上記の背景から、PERT ネットワークにおける並行パス間の干渉問題、すなわち、並行パス間でのクリティカルパスの交代確率について主に理論的立場から検討する。ま

た、若干の数値例について交代確率の性質を検討する。

2. PERT とその歴史

研究開発や土木建設プロジェクトの大規模化に伴い、1950年代の後半、従来の工程管理の主要な方法であったガント・チャート (Gantt-chart) や工程流れ図 (flow process chart) [8] の能力不足が指摘されるようになり、数学的・統計的な面から再研究された。この結果、今日 OR の重要なモデルの一つとなっているネットワーク・モデルが提唱されるに至った。

PERT は、米ソの軍拡競争の中、1958年、戦略ミサイル開発においてソ連に遅れをとっていた米国のポラリス・ミサイル開発計画の中という政治的軍事的舞台の上で生み出されたものであり、民間会社である Booz, Allen and Hamilton 社の協力を得て整理・公表されるに至った [1]。PERT では、作業 (activity) の開始と終了をイベント (event) として捉え、作業を矢線 (arrow) で表わす。そして作業の順序関係をすべて盛り込んだプロジェクト全体をアロー・ダイアグラムで表現する。その結果、クリティカル・パス (CP: critical path) やスラック (slack) という新しい概念が導入された。さらに作業時間の確率モデルとして、様々な確率分布の中から β 分布が採用され、中心極限定理を援用して、CP 上の作業時間の和、すなわち全工期の分布を推定し、プロジェクトの達成確率を求める手順が確立された [2, 3, 4, 5, 7]。

一方、PERT とは独立に Du Pont 社では新工場建設の計画・管理のため、費用と工期の関係を考えて、1958年、CPM (Critical Path Method) を開発・実施した。今日、両者は数学的に同等であることが知られている。

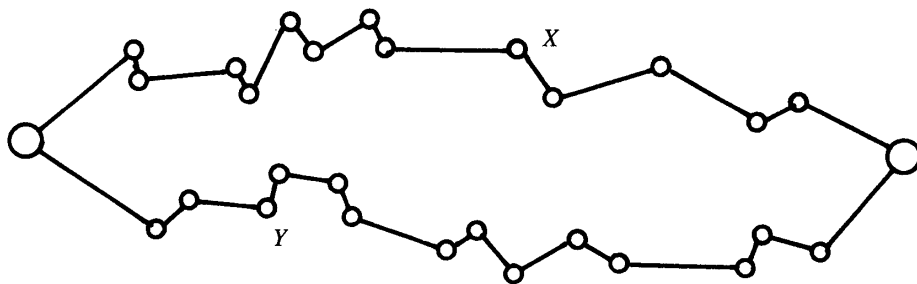


図1. 2つの並行パス

PERT と CPM の有効性が計画・管理といった現実問題への適用性から実証されたため、これらの手法はまたたく間に普及することになった。その後、PERT への原価管理の導入 (PERT/COST) や多重プロジェクト問題への拡張などが研究されている [7]。一方、計算機処理に適應し、大規模システムまでよく表現可能であるという特徴から、ネットワーク・モデ

ルの研究はグラフ理論や組合わせ理論と融合して数学的抽象化が図られている [9]。

PERT の開発者たちは作業時間の統計分布として β 分布を採用したが、この妥当性に関しては今日に至るまで様々な議論がある。開発者の一人である C. E. Clark [10] は β 分布:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)(x - a)^{\alpha-1}(b - x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(b - a)^{\alpha+\beta-1}} \quad (1)$$

$$a < x < b; \alpha, \beta > 0$$

が採用された経緯について、(1) 作業時間に関する多数の統計情報の収集における便宜、(2) 平均・分散の計算し易さを挙げている。F. E. Grubbs [11] は、PERT 実施例における華々しい成功に目を奪われて真面目な数学的・統計学的検証を忘れてはならないと力説している。その後、1965年まで作業時間の分布について様々な研究が報告されている [12, 13, 14, 15]。確率的 PERT における主要な仮定の中に、 $\alpha + \beta = Z + 2 = 6$ があるが、近年、D. Golenko-Ginzurg は、 $Z = 4.5$ を導入し、修正した平均・分散の推定式を提案した [6]。

PERT の一般的手順として、作業時間の統計的独立性に基づく加法性から中心極限定理を援用して、最大の平均値の和をもつパスについて検討する。しかしながら、一般にアロー・ダイアグラムにおいては数多く可能なパスが存在するため、特に長さが接近したパス同志においてはクリティカル・パスの逆転または交代現象が発生すると思われる。刀根 [7] は統計的に独立な作業時間をもつ 2 つの並行パスにおいて最大値の確率分布を導入することによって干渉度を定義し、並行パスの同時終了確率を計算している (図 1)。これによれば、その確率は、個々のパスの平均はより大きく、分散はより小となり、この傾向はパスの長さが接近するほど著しいとしている。本研究では、二つの単独または部分的に重複するパスを相関ある 2 次元確率過程として捉え、クリティカル・パスの逆転または交代確率を算定する方法を主に理論的立場から提案する。ついで平均、分散、相関係数が交代確率に及ぼす影響についても数値例とともに簡単に言及する。

3. クリティカル・パスの交代確率

作業時間 x_i, y_j ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) をもつ 2 つのパス X, Y を考える (図 1)。それぞれのパスに沿っての作業時間の和 X, Y はそれぞれ次式で与えられる。

$$X = \sum_{i=1}^m x_i, \quad Y = \sum_{j=1}^n y_j \quad (2)$$

ここに、 X, Y の平均、分散をそれぞれ $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$ とすると、それらは 2 つのパスに沿っての個々の作業時間の平均、分散の和である。また、 X, Y の相関係数を ρ とする。 m, n が

十分大きい場合, 中心極限定理 [16] により, X, Y は次の 2 次元正規分布に漸近する。

$$f(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(Y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\} \quad (3)$$

以下の解析は判別分析法 [17, 18] における方針と類似である。変数変換:

$$U = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \quad V = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \quad (4)$$

により, 確率密度関数 (3) は

$$f(U, V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[U^2 - 2\rho UV + V^2]\right\} \quad (5)$$

となる。さらに,

$$Z = \frac{U+V}{\sqrt{2(1+\rho)}}, \quad W = \frac{U-V}{\sqrt{2(1+\rho)}} \quad (6)$$

とおくと, 確率密度関数 $f(Z, W)$ は次式となる。

$$f(Z, W) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Z^2 + W^2)\right\} \quad (7)$$

上式は独立で基準化された 2 つの 1 次元正規確率分布の積を示す。一方, 式 (4), (6) を解くと, 次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} X &= \mu_X + \frac{\sigma_X\sqrt{2(1+\rho)}}{2}(Z+W) \\ Y &= \mu_Y + \frac{\sigma_Y\sqrt{2(1+\rho)}}{2}(Z-W) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで, 事象 $E = \{X > Y\}$ を考えよう。式 (8) を代入して整理すると,

$$E = \{X > Y\} = \{Z > AY + B\} \quad (9)$$

となる。ここに,

$$A = \frac{\sigma_Y - \sigma_X}{\sigma_Y + \sigma_X}, \quad B = \frac{2(\sigma_Y - \sigma_X)}{(\sigma_Y + \sigma_X)\sqrt{2(1+\rho)}} \quad (10)$$

である。今、

$$D = Z - AY - B \quad (11)$$

を定義し、 D の平均、分散をそれぞれ、 μ_D, σ_D^2 とすると、式 (7) の性質より、次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} \mu_D = \mu_Z - A\mu_Y - B = -B = \frac{2(\mu_X - \mu_Y)}{(\sigma_X + \sigma_Y)\sqrt{2(1+\rho)}} \\ \sigma_D^2 = \sigma_Z^2 - A^2\sigma_Y^2 = 1 - A^2 = \frac{4\sigma_X\sigma_Y}{(\sigma_X + \sigma_Y)^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

D を μ_D, σ_D で基準化した変数を S とおくと、事象 E は次のように書き改められる。

$$E = \{X > Y\} = \{D > 0\} = \{\mu_D + \sigma_D S > 0\} = \left\{ S > -\frac{\mu_D}{\sigma_D} \right\} \quad (13)$$

結局、作業時間の和がそれぞれ X, Y である 2 つのパスにおいて、 $X > Y$ である確率 $P_r\{X > Y\}$ は、標準正規分布関数 P_N を用いて次のように計算される。

$$\begin{aligned} P_r\{X > Y\} &= P_N \left\{ S > -\frac{\mu_D}{\sigma_D} \right\} \\ &= P_N \left\{ S > \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2\sigma_X\sigma_Y\sqrt{2(1+\rho)}} (\mu_Y - \mu_X) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

さて、パス X が CP であり、今 X に対して別のパス Y を比較するとしよう。この場合、 $P_r(E) = P_r\{X > Y\}$ は「 X が CP である確率」と見なされるから、その補事象 \bar{E} の確率

$$P_r(\bar{E}) = 1 - P_r\{X > Y\} \quad (15)$$

は「 Y が交代して CP である確率」となるから、これが CP の交代確率となる。

4. 数 値 例

前章で得られた結果に対し、いくつかのスペシャルケースについて数値的な検証を試みる。式 (14) からただちに平均値の差、 $\mu_X - \mu_Y$ が大きいほど $P_r(E)$ は大、すなわちクリティカルパス X の交代確率 $P_r(\bar{E})$ は小となることがわかる。以下、 X, Y に関する平均、分散の大きさおよび相関係数について様々なケースを想定して検証する。

(1) $\mu_x > \mu_y$ の場合

$$P_r(E) = P_N \left\{ S > -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2\sigma_x\sigma_y\sqrt{2(1+\rho)}}(\mu_x - \mu_y) \right\} > 0.5$$

$$P_r(\bar{E}) = 1 - P_r(E) < 0.5$$

(2) $\mu_x = \mu_y$ の場合

$$P_r(E) = P_r(\bar{E}) = 0.5$$

(3) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ の場合 (図3参照)

a) $\rho \approx 1$ のとき

$$P_r(E) = P_N \left\{ S > -\frac{1}{2} \frac{\mu_x - \mu_y}{\sigma} \right\} \quad (16)$$

b) $\rho \approx 0$ のとき

$$P_r(E) = P_N \left\{ S > -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu_x - \mu_y}{\sigma} \right\} \quad (17)$$

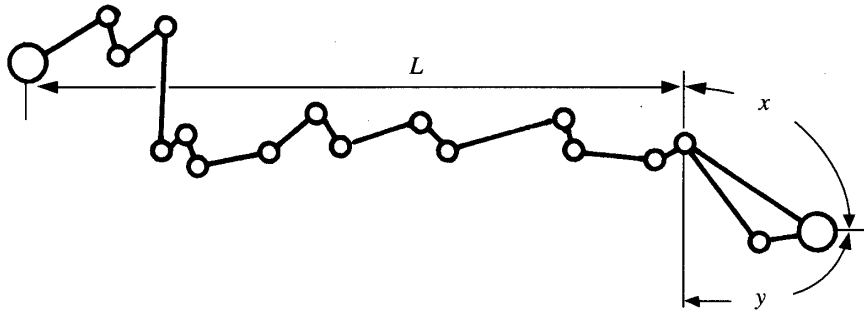


図2. ほとんど一致した2つのバス

(4) ほとんど一致した2つのバス (図2参照)

現実のプロジェクトにおいては、図1で示すような全く相異なるバス間での干渉よりも図2で与えるような多くは一致して部分的に異なるバス間での干渉がより重要と考えられる。共通したパス $x_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, L$) の分散を σ_i^2 とし、異なる短い部分を x, y , その分散をそれぞれ σ_x^2, σ_y^2 としよう。この場合、相関係数 ρ は次式で与えられる。

$$\rho = \frac{\langle (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) \rangle}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_L^2}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}$$

$$= \left\{ \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_L^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_L^2} \right) \right\}^{-1/2}$$

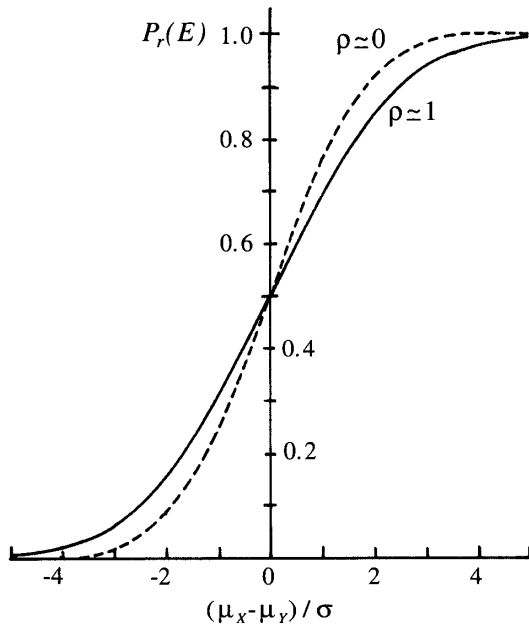


図3. 式(16), (17)

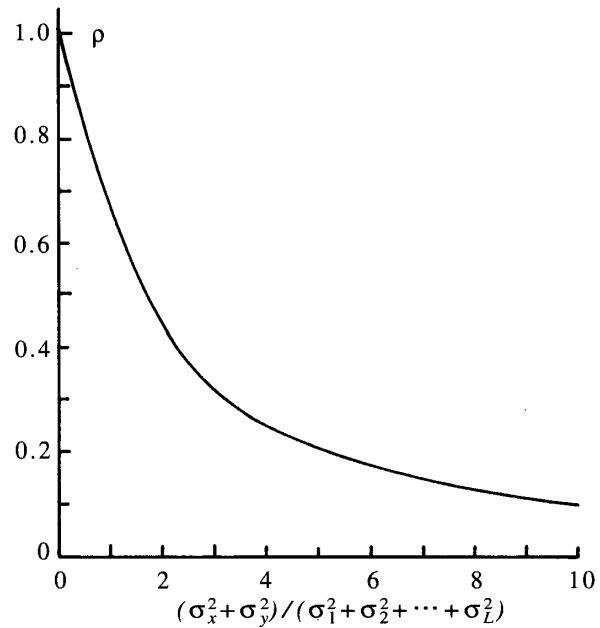


図4. 式(18)

$$\approx \left\{ \left(1 + \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_L^2} \right) \right\}^{-1/2} \quad (18)$$

ここに、 \bar{X}, \bar{Y} はそれぞれ X, Y の平均である。近似式(18)はパスのうち異なる部分の割合は十分小さいとの仮定で導かれており、これをグラフ表示すると図4となる。

5. あとがき

本研究では、PERT ネットワークにおける並行パス間の干渉問題を相関ある2次元正規分布を導入することによって解析的に考察し、クリティカル・パスに関する交代確率を求めその性質について調べた。今後の問題としては、(1)PERT 仮定に関する詳細な研究、本理論結果の(2)デジタル・シミュレーションによる検証、(3)実データへの適用などがある。

本研究に協力頂いた松浦義雄氏(1995年3月管理科学科卒業)に謝意を表す。また日ごろお世話になる本学経済科学部海生直人教授、同経済科学部長児玉正憲教授、近畿大学工学部太田光雄教授に深甚なる謝意を表す。

参 考 文 献

- [1] D. G. Malcolm, J. H. Oseboom, C. E. Clark and W. Fazar, Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, *Operations Research*, 7, pp. 646-669 (1959).

- [2] S. B. Richmond, *Operations Research for Management Decisions*, Ronald Press, New York (1968).
- [3] R. L. Ackoff and M. W. Sasieni, *Fundamentals of Operations Research*, Wiley, New York (1968).
- [4] M. K. Starr, *Systems Management of Operations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1971).
- [5] 関根 智明, PERT・CPM, 日科技連 (1985).
- [6] D. Golenko-Ginzburg, On the Distribution of Activity Time in PERT, *J. Operational Research Society*, 39, pp.767-771 (1988).
- [7] 刀根 薫(監), PERT講座, 第1巻, 基礎編, 東洋経済新報社 (1973).
- [8] 守谷 栄一, 詳解演習オペレーションズリサーチ, 日本理工出版会 (1986).
- [9] 伊理 正夫・古村 隆, ネットワーク理論, 日科技連 (1989).
- [10] C. E. Clark, The PERT Model for the Distribution of an activity time, *Operations, Research*, 10, pp. 405-406 (1962).
- [11] F. E. Grubbs, Attempts to Validate Certain PERT Statistics or 'Picking on PERT', *ibid.*, 10, pp. 912-915 (1962).
- [12] K. R. MacCrimmon and C. A. Ryavec, An Analytical Study of the PERT Assumption, *ibid.*, 12, pp. 16-37 (1964).
- [13] D. J. A. Welsh, Error Introduced by a PERT Assumption, *ibid.*, 13, pp. 141-143 (1965).
- [14] W. A. Donaldson, The Estimation of the Mean and Variance of a 'PERT' Activity time, *ibid.*, 13, pp. 382-385 (1965).
- [15] J. Lukaszewicz, On the Estimation of Errors Introduced by Standard Assumptions Concerning the Distribution of Activity Duration in PERT Calculations, *ibid.*, 13, pp. 326-327 (1965).
- [16] 福田 治郎, 例解演習応用統計入門, 日刊工業 (1989).
- [17] 塩谷 實, 多変量解析概論, 朝倉書店 (1990).
- [18] 藤沢 偉作, 楽しく学べる多変量解析法, 現代数学社 (1995).