区分的費用関数をもつ動的在庫モデルの最適政策（Ⅱ）

児玉　正憲・坂口　通則

（受付　1999 年 5 月 31 日）

目　　次

3.　分布関数および費用関数の特定化

費用関数 $H_i(z)$ $(i=1,2)$ および密度関数 $\phi(b)$ を特定化し，詳細に解析しよう。

3.1　費用関数の特定化

3.1.1.　具体例 1

まず，$R_1 > d_2 + \dfrac{c}{2d_1}$ をみたす正の実数 d_1, d_2, d_3 に対して，$H_i(z)$ $(i=1,2)$ を次の式で定義する。

$$H(z)=\begin{cases} H_1(z), & z \le R_1 \\ H_2(z), & z > R_1 \end{cases}$$

$$H_1(z) = d_1(z-d_2)^2 + d_3,\ d_1, d_2, d_3 > 0 \tag{3}$$

$$H_2(z) = 2d_1(R_1-d_2)\,z + d_1 + (d_2^2 - R_1^2) + d_3 \tag{4}$$

このとき，

$$H_1(R_1) = H_2(R_2) = d_1(R_1-d_2)^2 + d_3 \tag{5}$$

$$H_1'(R_1) = H_2'(R_1) = 2d_1(R_1-d_2) \tag{6}$$

となる。また，$H_1'(z) = 2d_1(z-d_2) = 0$ より，$z = d_2 = \bar{x}_1^1$ を得る。

仮定より，$H_1'(R_1) = 2d_1(R_1-\bar{x}_1^1) > 0$ よって $R_1 > \bar{x}_1^1$

定理 1 の仮定 $\lim_{z\to\infty} H_2'(z) > c$ は $2d_1(R_1-\bar{x}_1^1) = H_2'(R_1) > c$ より，成り立つ。

よって

$$H_1'(R_1) = H_2'(R_1) > \alpha c \tag{7}$$

となり，この場合は

ケース（1）：$H_1'(R_1)>0, F_1^{1\prime}(R_1)>0, \ldots, F_{N-1}^{1\prime}(R_1)>0$

だけを考察すればよい

さて，$F_1^{1\prime}(z)$，$F_2^{1\prime}(z)$ を評価しよう。定理 1 の証明と同様にして式(2)から $z\le R_1$ に対して

$$F_1^{1\prime}(z)=H_1'(z)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_1^1}H_1'(z-b)\phi(b)db$$

$$=2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_1^1}2d_1(z-\bar{x}_1^1-b)\phi(b)db$$

$$=2d_1(z-\bar{x}_1^1)[1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_1^1)]-\alpha c-2\alpha d_1\,G(z-\bar{x}_1^1) \tag{8}$$

となる。また，

$F_1^{1\prime}(\bar{x}_1^1)=-\alpha c<0,\ F_1^{1\prime}(R_1)\ge 2d_1(R_1-\bar{x}_1^1)-\alpha c>0$

$F_1^{1\prime\prime}(z)=2d_1[1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_1^1)]>0$

であるから，$F_1^{1\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_2^1$ をもち，$R_1>\bar{x}_2^1>\bar{x}_1^1$ である。

次に，$z\le R_1$ に対して，$F_2^{1\prime}(z)$ を評価しよう。

$$F_2^{1\prime}(z)=H_1'(z)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^1}F_1^{1\prime}(z-b_1)\phi(b_1)db_1$$

$$=H_1'(z)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^1}\Big\{2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1)-\alpha c$$

$$+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_1^1-b_1}2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\Big\}\phi(b_1)db_1 \tag{9}$$

$$=2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^1}\big\{2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1)[1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_1^1-b_1)]-\alpha c$$

$$+2\alpha d_1G(z-\bar{x}_1^1-b_1)\big\}\phi(b_1)db_1$$

$$=2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\alpha\Big\{[2d_1(\bar{x}_1^1-\bar{x}_1^1)(1+\alpha\Phi(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1))-\alpha c$$

$$-2\alpha d_1G(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)]\Phi(z-\bar{x}_2^1)+2d_1\int_0^{z-\bar{x}_2^1}[1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_1^1-b_1)]\Phi(b_1)db_1\Big\}$$

$$=[2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c][1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_2^1)]-2\alpha d_1G(z-\bar{x}_2^1)$$

$$+2\alpha^2d_1[(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)\Phi(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-G(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)]\Phi(z-\bar{x}_2^1)$$

$$+2\alpha^2 d_1 \int_0^{z-\bar{x}_2^1} \Phi(z-\bar{x}_1^1-b_1)\Phi(b_1)db_1$$

$$=[2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c][1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_2^1)]-2\alpha d_1 G(z-\bar{x}_2^1)$$

$$-\alpha[2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c]\Phi(z-\bar{x}_2^1)+2\alpha^2 d_1 \Phi^*(z-\bar{x}_2^1, z-\bar{x}_1^1) \tag{10}$$

$$(\because F_1^{1\prime}(\bar{x}_2^1)=2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)[1+\alpha\Phi(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)]-\alpha c-2\alpha d_1 G(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)=0$$

$$2\alpha d_1[G(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)\Phi(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)]=2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c)$$

ここに

$$\overline{\Phi}^*(z-\bar{x}_2^1, z-\bar{x}_1^1)=\int_0^{z-\bar{x}_2^1} \Phi(z-\bar{x}_1^1-b)\Phi(b)db$$

また，

$$F_2^{1\prime}(\bar{x}_2^1)=2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c \le 0$$

$$(\because F_1^{1\prime}(\bar{x}_2^1)=2\alpha_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\alpha\int_0^{\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1} 2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-b)\phi(b)db=0,$$

$$0 \le \bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-b \le \bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1,\ F_1^{1\prime}(\bar{x}_2^1)=0 \text{ より})$$

$$F_2^{1\prime}(R_1) \ge 2d_1(R_1-\bar{x}_1^1)-\alpha c>0,$$

$$F_2^{1\prime\prime}(z)=2d_1+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^1} F_1^{1\prime\prime}(z-b)\phi(b)db>0 \quad (\because F_1^{1\prime}(\bar{x}_2^1=0)) \quad \bar{x}_2^1<z<R_1$$

であるから，$F_2^{1\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^1$ をもち，$R_1>\bar{x}_3^1 \ge \bar{x}_2^1>\bar{x}_1^1$.

3.1.2. 具体例 2　$R_1>d_2=\bar{x}_1^1$ をみたす正の実数 d_1, d_2, d_3 に対して，$H_i(z)\ (i=1,2)$ を次の式で定義する。

$$H(z)=\begin{cases} H_1(z), & z \le R_1 \\ H_2(z), & z>R_1 \end{cases}$$

$$H_1(z)=d_1(z-\bar{x}_1^1)^2+d_3 \tag{11}$$

$$H_2(z)=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^3}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}+\frac{d_1(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{3}+d_3 \tag{12}$$

このとき

$$H_1(R_1)=H_2(R_1)=d_1(R_1-\bar{x}_1^1)^2+d_3,\ H_1'(R_1)=H_2'(R_1)=2d_1(R_1-\bar{x}_1^1)$$

$$H_1'(z)=2d_1(z-\bar{x}_1^1), \qquad H_2'(z)=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{(R_1-\bar{x}_1^1)},\ \lim_{z\to\infty} H_2'(z)=\infty$$

となる。

この例で，$F_k^{1\prime}(R_1)$ の符号を決める多くのケースを考察しよう。

$$0 < H_1'(R_1) < \frac{\alpha c}{1+\alpha} \Leftrightarrow 0 < d_1 < \frac{\alpha c}{2(1+\alpha)(R_1 - \bar{x}_1^1)} \tag{13}$$

このときは，

ケース（N）：$H_1'(R_1) > 0, F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0, \ldots, F_{N-1}^{1\prime}(R_1) \leq 0$

だけを考察すればよい。式(13)のもとで $F_1^{2\prime}(z)$，$F_2^{2\prime}(z)$ を評価しよう。

($H_1'(R_1) > 0, F_1'(R_1) \leq 0$) の場合

$z \geq R_1$ に対して

$$F_1^{2\prime}(z) = H_2'(z) - \alpha c + \alpha \int_0^{z-R_1} H_2'(z-b)\phi(b)db + \alpha \int_{z-R_1}^{z-\bar{x}_1^1} H_1'(z-b)\phi(b)db$$

$$= \frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{(R_1-\bar{x}_1^1)} - \alpha c + \frac{2\alpha d_1}{(R_1-\bar{x}_1^1)} \int_0^{z-R_1} (z-\bar{x}_1^1-b)^2 \phi(b)db$$

$$+ 2\alpha d_1 \int_{z-R_1}^{z-\bar{x}_1^1} (z-\bar{x}_1^1-b)\phi(b)db$$

$$= \frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2[1+\alpha\Phi(z-R_1)]}{(R_1-\bar{x}_1^1)} - \alpha c + \frac{2d_1\alpha[-2(z-\bar{x}_1^1)G(z-R_1)+\Phi_2(z-R_1)]}{(R_1-\bar{x}_1^1)}$$

$$+ 2\alpha d_1 \left\{(z-\bar{x}_1^1)[\Phi(z-\bar{x}_1^1)-\Phi(z-R_1)] - [G(z-\bar{x}_1^1)-G(z-R_1)]\right\} \tag{14}$$

ここに

$$\Phi_2(z) = \int_0^z b^2\phi(b)db$$

また，

$$F_1^{2\prime}(R_1) = F_1^{1\prime}(R_1) < 0$$

$$\lim_{z\to\infty} F_1^{2\prime}(z) > 0,\ F_1^{2\prime\prime}(z) > 0,\ z > R_1$$

が成り立つから，$F_1^{2\prime}(z) = 0$ は唯一の根 $\bar{x}_2^2 (> R_1)$ をもつ。

$(H_1'(R_1)>0, F_1^{1\prime}(R_1)\le 0, F_2^{1\prime}(R_1)\le 0)$ の場合

$$F_2^{2\prime}(z)=H_2'(z)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^2}F_1^{2\prime}(z-b)\phi(b)db$$

$$=H_2'(z)-\alpha c+\alpha\left\{\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left[(H_2'(z-b_1)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-R_1-b_1}H_2'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1}H_1'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right]\phi(b_1)db_1\right\} \tag{15}$$

$$=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{(R_1-\bar{x}_1^1)}-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left\{\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1)^2[1+\alpha\Phi(z-R_1-b_1)]}{(R_1-\bar{x}_1^1)}-\alpha c\right.$$

$$+\frac{2\alpha d_1[\Phi_2(z-R_1-b_1)-2(z-\bar{x}_1^1-b_1)G(z-R_1-b_1)]}{(R_1-\bar{x}_1^1)}$$

$$+2\alpha d_1[(z-\bar{x}_1^1-b_1)(\Phi(z-\bar{x}_1^1-b_1)-\Phi(z-R_1-b_1))-(G(z-\bar{x}_1^1-b_1)$$

$$\left.-G(z-R_1-b_1))]\right\}\phi(b_1)db_1 \tag{16}$$

$$=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2[1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_2^2)]}{(R_1-\bar{x}_1^1)}-\alpha c[1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_2^2)]$$

$$+\frac{2\alpha d_1}{(R_1-\bar{x}_1^1)}\left\{\Phi_2(z-\bar{x}_2^2)-2(z-\bar{x}_1^1)G(z-\bar{x}_2^2)\right\}$$

$$+\frac{2\alpha^2 d_1}{(R_1-\bar{x}_1^1)}\left\{[(z-\bar{x}_1^1)^2\Phi_0^*(z-\bar{x}_2^2,z-R_1)-2(z-\bar{x}_1^1)\Phi_1^*(z-\bar{x}_2^2,z-R_1)\right.$$

$$+\Phi_2^*(z-\bar{x}_2^2,z-R_1)]+[\Phi_2(\bar{x}_2^2-R_1)\Phi(z-\bar{x}_2^2)+\Phi_2^*(z-R_1,z-R_1)$$

$$-\Phi_2^*(\bar{x}_2^2-R_1,z-R_1)]+[-2(z-\bar{x}_1^1)(G(\bar{x}_2^2-R_1)\Phi(z-\bar{x}_2^2)+\Phi_1^*(z-R_1,z-R_1)$$

$$\left.-\Phi_1^*(\bar{x}_2^2-R_1,z-R_1))+2G_1^*(z-\bar{x}_2^2,z-R_1)]\right\}$$

$$+2\alpha^2 d_1\left\{(z-\bar{x}_1^1)[\Phi_0^*(z-\bar{x}_2^2,z-\bar{x}_1^1)-\Phi_0^*(z-\bar{x}_2^2,z-R_1)]\right.$$

$$-[\Phi_1^*(z-\bar{x}_2^2,z-\bar{x}_1^1)-\Phi_1^*(x-\bar{x}_2^2,z-R_1)]-[G(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)\Phi(z-\bar{x}_2^2)$$

$$+\Phi_1^*(z-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)-\Phi_1^*(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)$$

$$\left.-G(\bar{x}_2^2-R_1)\Phi(z-\bar{x}_2^2)+\Phi_1^*(\bar{x}_2^2-R_1,z-R_1)-\Phi_1^*(z-R_1,z-R_1)]\right\} \tag{17}$$

ここに

$$\Phi_0^*(u,v)=\int_0^u \Phi(v-b)\phi(b)db$$

$$\Phi_1^*(u,v)=\int_0^u \Phi(v-b)b\phi(b)db$$

$$\Phi_2^*(u,v)=\int_0^u \Phi(v-b)b^2\phi(b)db$$

$$G_1^*(u,v)=\int_0^u G(v-b)b\phi(b)db$$

また，

$$F_2^{2\prime}(\bar{x}_2^2)=\frac{2d_1(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^2}{(R_1-\bar{x}_1^1)}-\alpha c\le 0 \quad (\because F_1^{2\prime}(\bar{x}_2^2)=0,\ \text{式(10)の第2項，第3項は正より})$$

$$\lim_{z\to\infty} F_2^{2\prime}(z)>0,\ F_2^{2\prime\prime}(x)>0$$

が成り立つから，条件 $H_1'(R_1)>0, F_1^{1\prime}(R_1)\le 0, F_2^{1\prime}(R_1)\le 0$ のもとで，$F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の根 $\bar{x}_3^2(\ge \bar{x}_2^2>R_1)$ をもつ。

3.1.3. 次に具体例 2 で，式(18)を満たす $H_1'(R_1)$ の範囲を求めよう。

$$\frac{\alpha c}{1+\alpha}<H_1'(R_1)<\frac{\alpha c(1+\alpha)}{1+\alpha+\alpha^2},\ F_1^{1\prime}(R_1)>0 \tag{18}$$

$$F_1^{1\prime}(R_1)=H_1'(R_1)[1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_1^1)]-\alpha c-2\alpha d_1 G(R_1-\bar{x}_1^1)$$

より

$$F_1^{1\prime}(R_1)\gtreqless 0 \Leftrightarrow H_1'(R_1)\gtreqless \frac{\alpha[c+2d_1G(R_1-\bar{x}_1^1)]}{1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_1^1)} \tag{19}$$

となり，

$\alpha c/(1+\alpha)<\alpha[c+2d_1G(R_1-\bar{x}_1^1)]/[1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_1^1)]$ は常に成り立つが，$\alpha c(1+\alpha)/(1+\alpha+d^2)$, $\alpha[c+2d_1G(R_1-\bar{x}_1^1)]/[1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_1^1)]$ の大小関係は不明である。したがって式(18)を満たす $H_1'(R_1)$ の範囲を求めるため，次の 2 つの場合に分けて検討する。

(i) $\dfrac{\alpha c(1+\alpha)}{1+\alpha+\alpha^2}>\dfrac{\alpha[c+2d_1(R_1-\bar{x}_1^1)]}{1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_1^1)}$

このとき，式(18)の条件は，

$$\frac{\alpha[c+2d_1G(R_1-\bar{x}_1^1)]}{1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_1^1)}<H_1'(R_1)\le\frac{\alpha c(1+\alpha)}{1+\alpha+\alpha^2} \tag{20}$$

となり，$F_2^{1\prime}(R_1)\le 0, \ldots, F_{N-1}^{1\prime}(R_1)\le 0$ および $F_1^{1\prime}(R_1)>0$ が成立するから，ケース（N–1）だけ考察すればよい。

ケース（N–1）：$H_1'(R_1) > 0,\ F_1^{1\prime}(R_1) > 0, F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0, \ldots,\ F_{N-1}^{1\prime}(R_1) \leq 0$

$(H_1'(R_1) > 0, F_1^{1\prime}(R_1) > 0, F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0)$ の場合

このとき $z \geq R_1$ に対して $F_2^{2\prime}(z)$ は，

$$F_2^{2\prime}(z) = H_2'(z) + \alpha\int_0^{\infty} f_2'(z-b)\phi(b)db$$

$$= H_2'(z) - \alpha c + \alpha\int_0^{z-R_1} F_1^{2\prime}(z-b)\phi(b)db + \alpha\int_{z-R_1}^{z-\bar{x}_2^1} F_1^{1\prime}(z-b)\phi(b)db$$

$$= H_2'(z) - \alpha c + \alpha\int_0^{z-R_1}(H_2'(z-b_1) - \alpha c)\phi(b_1)db_1$$

$$+\alpha\int_{z-R_1}^{z-\bar{x}_2^1}(H_1'(z-b_1) - \alpha c)\phi(b_1)db_1$$

$$+\alpha^2\int_0^{z-R_1}\left(\int_0^{z-R_1-b_1} H_2'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right.$$

$$\left.+\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1} H_1'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$+\alpha^2\int_{z-R_1}^{z-\bar{x}_2^1}\left(\int_0^{z-\bar{x}_1^1-b_1} H_1'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$= \frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1} - \alpha c + \alpha\int_0^{z-R_1}\left[\frac{2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1-b_1)^2 - \alpha c\right]\phi(b_1)db_1$$

$$+\alpha\int_{z-R_1}^{z-\bar{x}_2^1}[2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1) - \alpha c]\phi(b_1)db_1$$

$$+\alpha^2\int_0^{z-R_1}\left(\int_0^{z-R_1-b_1}\frac{2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)^2\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$+\alpha^2\int_0^{z-R_1}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1} 2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$+\alpha^2\int_{z-R_1}^{z-\bar{x}_2^1}\left(\int_0^{z-\bar{x}_1^1-b_1} 2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1 \qquad (21)$$

$$= \frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1} - \alpha c + \frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\{(z-\bar{x}_1^1)^2\Phi(z-R_1) - 2(z-\bar{x}_1^1)G(z-R_1)$$

$$+\Phi_2(z-R_1)\}-\alpha^2 c\,\Phi(z-R_1)+2\alpha d_1\{(z-\bar{x}_1^1)[\Phi(z-\bar{x}_2^1)-\Phi(z-R_1)]$$

$$-[G(z-\bar{x}_2^1)-G(z-R_1)]\}-\alpha^2 c[\Phi(z-\bar{x}_2^1)-\Phi(z-R_1)]$$

$$+\frac{2\alpha^2 d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\{(z-\bar{x}_1^1)^2\Phi_0^*(z-R_1,z-R_1)-4(z-\bar{x}_1^1)\Phi_1^*(z-R_1,z-R_1)$$

$$+2\Phi_2^*(z-R_1,z-R_1)+2G^*(z-R_1,z-R_1)\}$$

$$+2\alpha^2 d_1\{(z-\bar{x}_1^1)[\Phi_0^*(z-R_1,z-\bar{x}_1^1)-\Phi_0^*(z-R_1,z-R_1)]-\Phi_1^*(z-R_1,z-\bar{x}_1^1)$$

$$+2\Phi_1^*(z-R_1,z-R_1)-[G(R_1-\bar{x}_1^1)\Phi(z-R_1)+\Phi_1^*(z-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)$$

$$-\Phi_1^*(R_1-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)]\}+2\alpha^2 d_1\{(z-\bar{x}_1^1)[\Phi_0^*(z-\bar{x}_2^1,z-\bar{x}_1^1)-\Phi_0^*(z-R_1,z-\bar{x}_1^1)]$$

$$-[\Phi_1^*(z-\bar{x}_2^1,z-\bar{x}_1^1)-\Phi_1^*(z-R_1,z-\bar{x}_1^1)]-[G(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)\Phi(z-\bar{x}_2^1)$$

$$-G(R_1-\bar{x}_1^1)\Phi(z-R_1)+\Phi_1^*(R_1-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)-\Phi_1^*(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)]\}$$

$$=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}[1+\alpha\Phi(z-R_1)+\alpha^2\Phi_0^*(z-R_1,z-R_1)]-\alpha c[1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_2^1)]$$

$$-\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}[-2(z-\bar{x}_1^1)G(z-R_1)+\Phi_2(z-R_1)]$$

$$+\frac{4\alpha^2 d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}[-2(z-\bar{x}_1^1)\Phi_1^*(z-R_1,z-R_1)+\Phi_2^*(z-R_1,z-R_1)$$

$$+G_1^*(z-R_1,z-R_1)]+2\alpha d_1\{(z-\bar{x}_1^1)[\Phi(z-\bar{x}_2^1)-\Phi(z-R_1))$$

$$+\alpha(\Phi_0^*(z-\bar{x}_2^1,z-\bar{x}_1^1)-\Phi_0^*(z-R_1,z-R_1))]+G(z-R_1)-G(z-\bar{x}_2^1)$$

$$+\alpha[2\Phi_1^*(z-R_1,z-R_1)-\Phi_1^*(z-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)$$

$$-\Phi_1^*(z-\bar{x}_2^1,z-\bar{x}_1^1)-G(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)\Phi(z-\bar{x}_2^1)+\Phi_1^*(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)]\} \tag{22}$$

また,

$$F_2^{2\prime}(R_1)=F_2^{1\prime}(R_1)\le 0$$

$$\lim_{z\to\infty}F_2^{2\prime}(z)>0,\ \ F_2^{2\prime\prime}(z)>0\quad z>R_1$$

が成り立つから，$H_1'(R_1)>0$, $F_1^{1\prime}(R_1)>0$, $F_2^{1\prime}(R_1)\le 0$ のもとで $F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の根 $\bar{x}_3^2(\ge R_1)$ をもつ。

また,

$$\frac{\alpha c}{1+\alpha} < H_1'(R_1) \leq \frac{\alpha[c+2d_1G(R_1-\bar{x}_1^1)]}{1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_1^1)} < \frac{\alpha c(1+\alpha)}{1+\alpha+\alpha^2} \tag{23}$$

のときは，$F_2^{1\prime}(R_1)\leq 0, \ldots, F_{N-1}^{1\prime}(R_1)\leq 0$ および $F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0$ が成立するから，ケース（N）だけを考察すればよい。

ケース（N）：$H_1'(R_1)>0, F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0, \ldots, F_{N-1}^{1\prime}(R_1)\leq 0$

(ii) $\dfrac{\alpha c(1+\alpha)}{1+\alpha+\alpha^2} \leq \dfrac{\alpha[c+2d_1G(R_1-\bar{x}_1^1)]}{1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_1^1)}$

このときは式(18)を満たす $H_1'(R_1)$ は存在しない $\alpha c/(1+\alpha) < H_1'(R_1) \leq \alpha c\,(1+\alpha)/(1+\alpha+\alpha^2)$ が成立すれば，$F_2^{1\prime}(R_1)\leq 0, \ldots, F_{N-1}^{1\prime}(R_1)\leq 0$ となり，式(19)より $F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0$ を得る。したがってケース（N）だけを考察すればよい。

3.1.4. 次に式(24)を満たす $H_1'(R_1)$ の範囲を求めよう。

$$\frac{\alpha c(1+\alpha)}{1+\alpha+\alpha^2} < H_1'(R_1) \leq \frac{\alpha c(1+\alpha+\alpha^2)}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, F_2^{1\prime}(R_1)>0 \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\alpha^3 c}{1+\alpha+\alpha^2} < H_1'(R_1)-\alpha c \leq \frac{-\alpha^4 c}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, F_2^{1\prime}(R_1)>0$$

このとき，式(10)より

$$F_2^{1\prime}(R_1) \gtreqless 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} H_1'(R_1) \gtreqless\ & \alpha c+\alpha\{2d_1G(R_1-\bar{x}_1^1)+[2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c]\Phi(R_1-\bar{x}_2^1) \\ & -2\alpha d_1\Phi^*(R_1-\bar{x}_2^1, R_1-\bar{x}_1^1)\}/[1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_2^1)] \end{aligned} \tag{25}$$

ここで

$$\begin{aligned} K = \ & \alpha\left\{2d_1G(R_1-\bar{x}_2^1)+[2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c]\Phi(R_1-\bar{x}_2^1)-2\alpha d_1\Phi^*(R_1-\bar{x}_2^1, R_1-\bar{x}_1^1)\right\}/ \\ & [1+\alpha\Phi(R_1-\bar{x}_2^1)] \end{aligned}$$

とおく

K，$-\alpha^3 c/(1+\alpha+\alpha^2)$ および $-\alpha^4 c/(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)$ の大小関係によって次の 2 つの場合に分けて検討する。

(i) $K < -\dfrac{\alpha^3 c}{1+\alpha+\alpha^2}$

このとき

$$-\frac{\alpha^3 c}{1+\alpha+\alpha^2} < H_1'(R_1) - \alpha c \le -\frac{\alpha^4 c}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3} \tag{26}$$

で $F_2^{1\prime}(R_1) > 0$ となる。よって

ケース (N–2)：$H_1'(R_1) > 0, F_1^{1\prime}(R_1) > 0, F_2^{1\prime}(R_1) > 0, F_3^{1\prime}(R_1) \le 0, \ldots, F_{N-1}^{1\prime}(R_1) \le 0$ を考察すればよい。

(ii) $-\dfrac{\alpha^3 c}{1+\alpha+\alpha^2} \le K < -\dfrac{\alpha^4 c}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}$

このとき，式(24)の条件は

$$K < H_1'(R_1) - \alpha c \le -\frac{\alpha^4 c}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3} \tag{27}$$

となり，このとき，ケース（N–2）を考察すればよい

$$-\frac{\alpha^3 c}{1+\alpha+\alpha^2} < H_1'(R_1) - \alpha c \le K$$

のときは，$H_1'(R_1) > 0, F_2^{1\prime}(R_1) \le 0, \ldots, F_{N-1}^{1\prime}(R_1) \le 0$ は明らかとなるが，$F_1^{1\prime}(R_1)$ の正負は不明である。

(iii) $-\dfrac{\alpha^4 c}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3} < K$

このときは，$-\alpha^3 c/(1+\alpha+\alpha^2) < H_1'(R_1) - \alpha c \le -\alpha^4 c/(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)$ かつ $F_2^{1\prime}(R_1) > 0$ となる $H_1'(R_1) - \alpha c$ の範囲は存在しない。この場合，$H_1'(R_1) > 0, F_m^1(R_1) \le 0\ (m \ge 2)$ となるが，$F_1^{1\prime}(R_1)$ の正負は不明である。以下，$F_m^{1\prime}(R_1) > 0\ (m \ge 3)$ が成立する $H_1'(R_1)$ の範囲を求め，同様な解析ができるが，$F_m^{1\prime}(R_1) > 0\ (m \ge 3)$ が成立する $H_1'(R_1)$ の範囲は複雑となる。

3.2　分布関数の特定化

需要分布を特定化し，具体例について詳細に解析しよう。

3.2.1　一様分布

$[0, a]$区間の一様分布を，

$$\phi(b) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & 0 \le b \le a \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \qquad \Phi(b) = \begin{cases} 1, & a \le b \\ \dfrac{b}{a}, & 0 \le b \le a \\ 0 & b < 0 \end{cases}$$

とする。

具体例1の場合

z と a の大小関係により場合にわけて考察する。

① $0<z-\bar{x}_1^1\le a$ $(\Leftrightarrow \bar{x}_1^1<z\le a+\bar{x}_1^1)$

このとき, $\Phi(z-\bar{x}_1^1)=(z-\bar{x}_1^1)/a$, $G(z-\bar{x}_1^1)=(z-\bar{x}_1^1)^2/(2a)$ となり，これらを式(8)に代入すれば,

$$F_1^{1\prime}(z)=2d_1(z-\bar{x}_1^1)\left[1+\frac{\alpha(z-\bar{x}_1^1)}{2a}\right]-\alpha c=0$$

より，$z-\bar{x}_1^1>0$ を考慮して,

$$\bar{x}_2^1=\bar{x}_1^1-\frac{a}{\alpha}+\frac{a}{\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2c}{ad_1}\right)} \tag{28}$$

明らかに $\bar{x}_2^1>\bar{x}_1^1$,また，$z-\bar{x}_1^1\le a$ でなければならないから，$-a/d+a\sqrt{1+\alpha^2c/(ad_1)}/\alpha\le a$ より

$$a\ge\frac{\alpha c}{\alpha_1(\alpha+2)} \tag{29}$$

② $0<a<z-\bar{x}_1^1$

このとき，$\Phi(z-\bar{x}_1^1)=1, G(z-\bar{x}_1^1)=a/2$ となるから，これらを式(8)に代入して,

$$F_1^{1\prime}(z)=2d_1(z-\bar{x}_1^1)(1+\alpha)-\alpha(d_1a+c)=0$$

より

$$\bar{x}_2^1=\bar{x}_1^1+\frac{\alpha(d_1a+c)}{2d_1(1+\alpha)} \tag{30}$$

条件②より

$$0<a<\frac{\alpha c}{d_1(\alpha+2)} \tag{31}$$

$F_2^{1\prime}(z)=0$ の計算は複雑となる。

① $z-\bar{x}_2^1<z-\bar{x}_1^1<a$

このとき，$\Phi(z-\bar{x}_2^1)=(z-\bar{x}_2^1)/a$, $\Phi(z-\bar{x}_1^1-b)=(z-\bar{x}_1^1-b)/a$, $G(z-\bar{x}_2^1)=(z-\bar{x}_2^1)^2/(2a)$ となるから，これらを式(10)に代入して,

$$\begin{aligned}F_2^{1\prime}(z)&=[2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c]\left[1+\frac{\alpha(z-\bar{x}_2^1)}{a}\right]-\frac{\alpha d_1(z-\bar{x}_2^1)^2}{a}+\frac{\alpha^2d_1}{3a^2}[(z-\bar{x}_1^1)^3-(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)^3]\\&=\frac{\alpha^2d_1}{3a^2}z_*^3+\frac{\alpha d_1}{a}\left[1+\frac{\alpha}{a}(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)\right]z_*^2+2d_1z_*+2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c\end{aligned} \tag{32}$$

$(\because F_1^{1\prime}(\bar{x}_2^1)=0$ より，$2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\alpha d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)^2/a=0)$

ここに

$z_* = z - \bar{x}_2^1$

$F_2^{1\prime}(z) = 0$ は $z > \bar{x}_2^1$ で唯一の正根 $\bar{x}_3^1$ をもつから，カルダーノの公式を適用すると，

$$\bar{x}_3^1 = \bar{x}_2^1 + u + v - \frac{B}{3A} \tag{33}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} &u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}\,,\ v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \\ &2q = \frac{2B^3}{27A^3} - \frac{BC}{3A^2} + \frac{E}{A},\ 3p = \frac{3AC - B^2}{3A^2} \\ &A = \frac{\alpha^2 d_1}{3a^2},\ B = \left[\frac{\alpha d_1}{a} + \frac{\alpha^2 d_1}{a^2}(\bar{x}_2^1 - \bar{x}_1^1)\right],\ C = 2d_1,\ E = 2d_1(\bar{x}_2^1 - \bar{x}_1^1) - \alpha c \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

さらに，$\bar{x}_3^1$ は $\bar{x}_3^1 - \bar{x}_1^1 < a$ を満たさなければならない。

注 1　式(32)＝0 は $Az_*^3 + Bz_*^2 + Cz_* + E = 0$ と表わされ，両辺を A で割ると，$z_*^3 + (\mathrm{B/A})z_*^2 + (C/A)z_* + E/A = 0$ となり，$z_* = y - B/(3A)$ とおくと，$y^3 + \{(3AC - B^2)/(3A^2)\}\, y + \{(2B^3)/(27A^3) - (BC)/(3A^2) + E/A\} = y^3 + 3py + 2q = 0$ となり，この方程式の解が $y = u + v$ で与えられ，$z_* = u + v - B\,(3A)$ となり，$\bar{x}_3^1 = \bar{x}_2^1 + u + v - B/(3A)$ となる。この解は判別式 $D = \sqrt{q^2 + p^3} > 0$ の場合の実根である。D < 0 のときは，$y^3 + 3py + 2q = 0$ は 3 実根 y_1, y_2, y_3 をもつので，$\gamma = \pm\sqrt{1p1}$ とおき，(γ の符号は q の符号と同じとする)，$y_1 = 2\,\gamma\cos(\varphi/3)$，$y_2 = 2\,\gamma\cos(2\pi/3 - \varphi/3)$，$y_3 = 2\,\gamma\cos(2\pi/3 + \varphi/3)$ として，y_1, y_2, y_3 を求め最大の y_i (i =1, 2, 3) を y とすればよい。ただし，$\cos\varphi = q/\gamma^3$。D = 0 の場合にも適用できるが，重根の場合が生じる。一般論より z_* ($> \bar{x}_1^1$) が唯一の根であることが保証されているので，$D > 0$ の場合はカルダーノの公式を利用し，$D \leq 0$ の場合は注 1 の方法を利用すればよい。以下の議論では 3 次方程式の解については，カルダーノの公式を利用する場合しか取扱わない。

②　$z - \bar{x}_2^1 < a \leq z - \bar{x}_1^1$

$b > a$ のとき，$\phi(b) = 0$ であるから式(9)の 2 重積分を計算するとき，b_1 の値によって $z - \bar{x}_1^1 - b_1 > a$ となるから，b_2 の積分範囲が変わる，即ち $b_2 \in (0, z - \bar{x}_1^1 - b_1)$ とはならないので，公式(10)が適用できない。(公式(10)は積分範囲が変わらないという仮定で求めた)

$b > a$ のとき，ϕ(b) = 0 に注意すれば（図3.2参照）

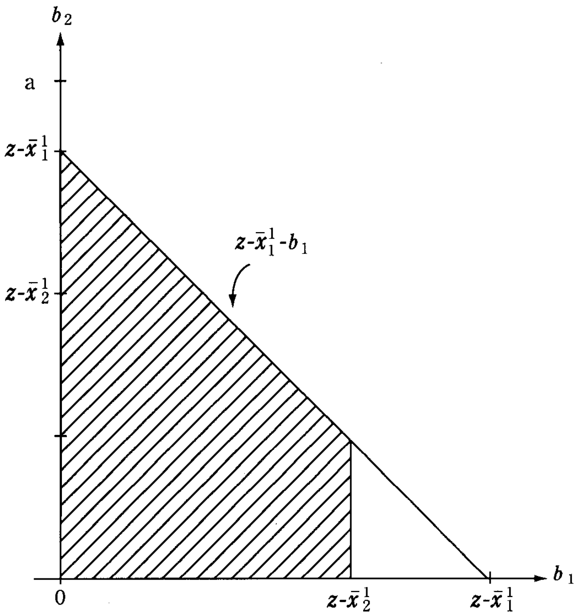

図 3.1　$a > z - \bar{x}_1^1$

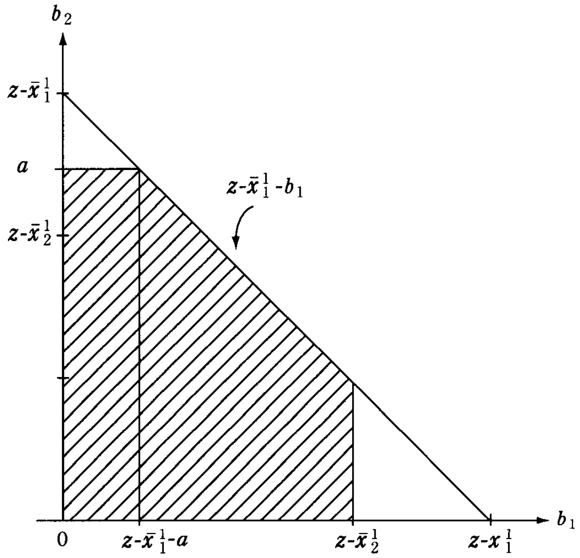

図 3.2　$z - \bar{x}_2^1 < a \leq z - \bar{x}_1^1$

$$\int_0^{z-\bar{x}_2^1}\left(\int_0^{z-\bar{x}_1^1-b_1}(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{z-\bar{x}_1^1-a}\left(\int_0^{a}(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)db_2\right)db_1+\frac{1}{a^2}\int_{z-\bar{x}_1^1-a}^{z-\bar{x}_2^1}\left(\int_0^{z-\bar{x}_1^1-b_1}(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)db_2\right)db_1$$

$$=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{a(z-\bar{x}_1^1-a)(z-\bar{x}_1^1)}{2}+\frac{a^3-(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)^3}{6}\right\}$$

となるから，式(9)より

$$F_2^{1\prime}(z)=\left[2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c\right]\left[1+\frac{\alpha(z-\bar{x}_2^1)}{a}\right]-\frac{\alpha d_1(z-\bar{x}_2^1)^2}{a}$$

$$+\frac{\alpha^2 d_1}{a^2}\left\{a(z-\bar{x}_1^1-a)(z-\bar{x}_1^1)+\frac{a^3-(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)^3}{3}\right\}$$

$$=\frac{\alpha d_1(1+\alpha)}{a}z_*^2+2d_1z_*+2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}\delta(z_*)(a+\bar{x}_1^1-\bar{x}_2^1)^3 \tag{35}$$

（$\because a < z-\bar{x}_1^1$ のとき，$2d_1(1+\alpha)(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)=\alpha(d_1a+c)$ となることを用いて，$[2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha \mathrm{c}]\,\alpha/a+[2(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-a]\,\alpha^2d_1/a=0$ $(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-a)(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)+[a_3-(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)^3]/(3a)=(a+\bar{x}_1^1-\bar{x}_2^1)^3/(3a)$，また $z-\bar{x}_2^1$ を z_* とおく）

ここに,

$$\delta(z_*)=\begin{cases}0 & z_*=0\\ 1 & z_*\neq 0\end{cases}$$

である。また,

$F_2^{1\prime}(\bar{x}_2^1)=2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c<0, F_2^{1\prime}(R_1)>0$ および $F_2^{1\prime\prime}(z)>0$ より，$F_2^{1\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^1$ をもつ $(\bar{x}_2^1<\bar{x}_3^1<R_1)$。式(35)より

$$\bar{x}_3^1=\bar{x}_2^1+\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=x_1+\frac{\alpha(d_1a+c)}{2d_1(1+\alpha)}+\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{36}$$

ここに,

$$\left.\begin{aligned}&A=\frac{\alpha d_1(1+\alpha)}{a},\ B=2d_1\\&C=2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}(a+\bar{x}_1^1-\bar{x}_2^1)^3<0\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$(\because 2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c=-\alpha d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^2)^2<0,\ z-\bar{x}_2^1<a\leq z-\bar{x}_1^1$ より，$a+\bar{x}_1^1-\bar{x}_2^1\leq 0)$

さらに，$\bar{x}_3^1$は，$\bar{x}_3^1-\bar{x}_2^1<a<\bar{x}_3^1-\bar{x}_1^1$ を満たさなければならない。

③　$0<a<z-\bar{x}_2^1$

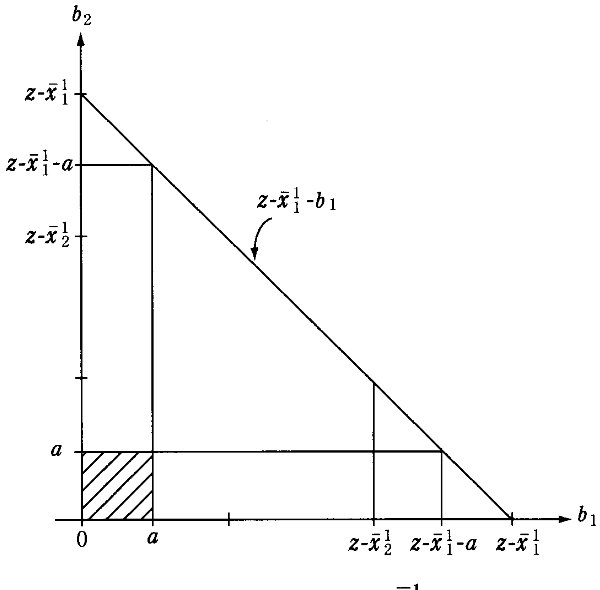

図 3.3　$0<a<\dfrac{z-\bar{x}_1^1}{2}$

このとき,

$$F_2^{1\prime}(z)=H_1'(z)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^1}F_1^{1\prime}(z-b)\phi(b)db$$

$$=H_1'(z)-\alpha c+\frac{\alpha}{a}\int_0^a F_1^{1\prime}(z-b_1)db_1$$

$$=2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\frac{\alpha}{a}\int_0^a\Big\{2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1)-\alpha c$$

$$+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_1^1-b_1}2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\Big\}db_1 \tag{38}$$

となる。さらに

③−1　$0<a<\dfrac{z-\bar{x}_1^1}{2}$　$(\Rightarrow a<z-\bar{x}_1^1-a)$

ならば，式(38)は

$$=2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\frac{\alpha}{a}\int_0^a\{2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1)-\alpha c\}db_1$$

$$+\frac{\alpha^2}{a}\int_0^a\left\{\frac{1}{a}\int_0^a 2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)db_2\right\}db_1$$

（$\because 0<b_1<a$ のとき，$b_2=z-\bar{x}_1^1-b_1>a$　$\therefore \phi(b_2)=0, b_2>a$）

$$=[2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c](1+\alpha)-\alpha a d_1(1+2\alpha)+2\alpha^2 d_1(z-\bar{x}_1^1)$$

$$=2d_1(1+\alpha+\alpha^2)z_*+2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)(1+\alpha+\alpha^2)-\alpha[c(1+\alpha)+ad_1(1+2\alpha)]$$

となる。また，

$$\lim_{z\to\bar{x}_2^1}F_2^{1\prime}(z)=2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c<0,\ F_2^{1\prime}(R_1)>0$$

であるから，$F_2^{1\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^1$ をもつ $(\bar{x}_2^1<\bar{x}_3^1<R_1)$

ここに，

$$\bar{x}_3^1=\bar{x}_1^1+\frac{\alpha[c(1+\alpha)+ad_1(1+2\alpha)]}{2d_1(1+\alpha+\alpha^2)}$$

$$=\bar{x}_2^1-\frac{\alpha(ad_1+c)}{2d_1(1+\alpha)}+\frac{\alpha[c(1+\alpha)+ad_1(1+2\alpha)]}{2d_1(1+\alpha+\alpha^2)} \tag{39}$$

（$\because$ $a<z-\bar{x}_1^1$ のとき，$\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1=\alpha(d_1a+c)/\{2d_1(1+\alpha)\}$）

さらに，$\bar{x}_3^1$ は，$0<a<(\bar{x}_3^1-\bar{x}_1^1)/2$ を満たさなければならない。

③−2　$\dfrac{z-\bar{x}_1^1}{2} \leq a < z-\bar{x}_2^1$

このとき，$z-\bar{x}_1^1-a \leq a$ となり，$0<b_1<z-\bar{x}_1^1-a$ ならば $z-\bar{x}_1^1-b_1>a$ となるから，2重積分は

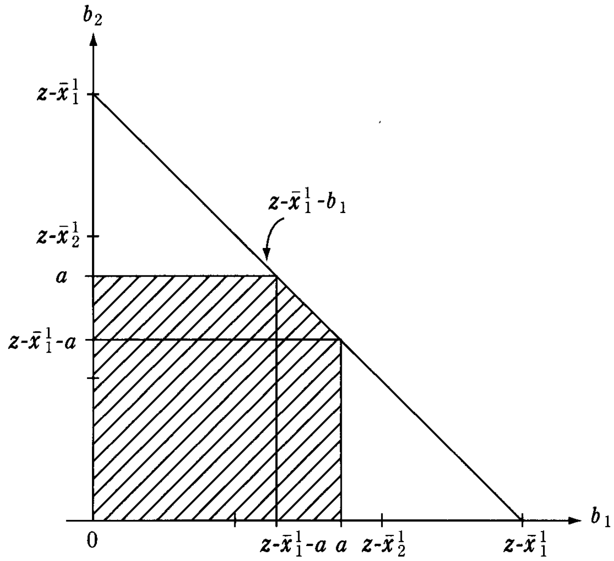

図 3.4　$\dfrac{z-\bar{x}_1^1}{2} \leq a < z-\bar{x}_2^1$

$$\alpha^2 \int_0^{z-\bar{x}_1^1-a} \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{a}\int_0^a 2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)db_2\right\}db_1$$

$$+\alpha^2 \int_{z-\bar{x}_1^1-a}^{a} \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{a}\int_0^{z-\bar{x}_1^1-b_1} 2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)db_2\right\}db_1$$

$$=\frac{\alpha^2}{a}\left\{(z-\bar{x}_1^1-a)d_1(z-\bar{x}_1^1)\right\}+\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}\left\{a^3-(z-\bar{x}_1^1-a)^3\right\}$$

となるから，

$$F_2^{1\prime}(z)=\{2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c\}(1+\alpha)-a\alpha d_1+\frac{\alpha^2 d_1}{a}(z-\bar{x}_1^1-a)(z-\bar{x}_1^1)$$
$$+\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}\{a^3-(z-\bar{x}_1^1-a)^3\}$$
$$=-\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}(z-\bar{x}_1^1)^3+\frac{2\alpha^2 d_1}{a}(z-\bar{x}_1^1)^2+2d_1(1+\alpha-\alpha^2)(z-\bar{x}_1^1)$$
$$+\frac{2\alpha^2 a d_1}{3}-\alpha\{c(1+\alpha)+ad_1\} \tag{40}$$

$F_2^{1\prime}(z)=0$ は，唯一の正根 $\bar{x}_3^1$ をもつから，カルダノの公式を適用すると，

$$\bar{x}_3^1=\bar{x}_1^1+u+v-\frac{B}{3A}=\bar{x}_2^1-\frac{\alpha(ad_1+c)}{2d_1(1+\alpha)}+u+v \tag{41}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}
&u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}\,,\ v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+b^3}}\\
&2q=\frac{2B^3}{27A^3}-\frac{BC}{3A^2}+\frac{E}{A},\ 3p=\frac{3AC-B^2}{3A^2}\\
&A=-\frac{\alpha^2d_1}{3a^2},\ B=\frac{2\alpha^2d_1}{a},\ C=2d_1(1+\alpha-\alpha^2),\ E=\frac{2\alpha^2ad_1}{3}-\alpha c(1+\alpha)-\alpha ad_1
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

さらに，$\bar{x}_3^1$ は $(\bar{x}_3^1-\bar{x}_1^1)/2\leq a<\bar{x}_3^1-\bar{x}_2^1$ を満たさなければならない。

具体例 2 の場合

$\boldsymbol{k=2}$

① $0<z-\bar{x}_1^1<a$

このとき，$\Phi(z-R_1)=(z-R_1)/a$，$G(z-R_1)=(z-R_1)^2/(2a)$，$\Phi(z-\bar{x}_1^1)=(z-\bar{x}_1^1)/a$，$G(z-\bar{x}_1^1)=(z-\bar{x}_1^1)^2/(2a)$，$\Phi_2(z-R_1)=(z-R_1)^3/(3a)$ となり，これらを式(14)代入すれば

$$\begin{aligned}
F_1^{2\prime}(z)&=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}\left[1+\frac{\alpha(z-R_1)}{a}\right]-\alpha c+\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left[-\frac{(z-\bar{x}_1^1)(z-R_1)^2}{a}+\frac{(z-R_1)^3}{3a}\right]\\
&\quad+2\alpha d_1\left\{(z-\bar{x}_1^1)\left[\frac{z-\bar{x}_1^1}{a}-\frac{(z-R_1)}{a}\right]-\left[\frac{(z-\bar{x}_1^1)^2-(z-R_1)^2}{2a}\right]\right\}\\
&=\frac{2\alpha d_1}{3a(R_1-\bar{x}_1^1)}(z-\bar{x}_1^1)^3+\frac{2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1)^2+\frac{\alpha d_1}{3a}(\bar{x}_1^1-R_1)^2-\alpha c
\end{aligned} \tag{43}$$

$F_1^{2\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_2^2$ をもつから，カルダーノの公式を適用すると，

$$\bar{x}_2^2=\bar{x}_1^1+u+v-\frac{B}{3A} \tag{44}$$

ここに

$$
\left.\begin{aligned}
&u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}\,,\ v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}\\
&2q=\frac{2B^3}{27A^3}+\frac{E}{A},\ 3p=\frac{-B^2}{3A^2}\\
&A=\frac{2\alpha d_1}{3a(R_1-\bar{x}_1^1)},\ B=\frac{2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1},\ E=\frac{\alpha d_1}{3a}(\bar{x}_1^1-R_1)^2-\alpha c
\end{aligned}\right\}\tag{45}
$$

さらに，$\bar{x}_2^2$ は $\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1<a$ を満たさなければならない

② $0<z-R_1<a\le z-\bar{x}_1^1$

このとき，$\Phi(z-R_1)=(z-R_1)/a$, $G(z-R_1)=(z-R_1)^2/(2a)$, $\Phi(z-\bar{x}_1^1)=1$, $G(z-\bar{x}_1^1)=a/2$ $\Phi_2(z-R_1)=(z-R_1)^3/(3a)$ となり，これらを式(14)に代入すれば

$$
\begin{aligned}
F_1^{2\prime}(z)=&\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}\left[1+\frac{\alpha(z-R_1)}{a}\right]-\alpha c+\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left[-\frac{(z-\bar{x}_1^1)(z-R_1)^2}{a}+\frac{(z-R_1)^3}{3a}\right]\\
&+2\alpha d_1\left\{(z-\bar{x}_1^1)(1-\frac{z-R_1}{a})-\left[\frac{a}{2}-\frac{(z-R_1)^2}{2a}\right]\right\}\\
=&\frac{2\alpha d_1}{3a(R_1-\bar{x}_1^1)}(z-\bar{x}_1^1)^3+d_1\left(\frac{2}{R_1-\bar{x}_1^1}-\frac{\alpha}{a}\right)(z-\bar{x}_1^1)^2\\
&+2\alpha d_1(z-\bar{x}_1^1)+\alpha d_1\left[\frac{(\bar{x}_1^1-R_1)^2}{3a}-a\right]-\alpha c
\end{aligned}\tag{46}
$$

$F_1^{1\prime}(z)=0$ は正根 $\bar{x}_2^2\,(>\bar{x}_1^1)$ をもつから，$\bar{x}_2^2$ はカルダーノの公式を適用して

$$
\bar{x}_2^2=\bar{x}_1^1+u+v-\frac{B}{3A}\tag{47}
$$

ここに，

$$
\left.\begin{aligned}
&u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}\,,\ v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}\\
&2q=\frac{2B^3}{27A^3}-\frac{BC}{3A^2}+\frac{E}{A},\ 3p=\frac{3AC-B^2}{3A^2}\\
&A=\frac{2\alpha d_1}{3a(R_1-\bar{x}_1^1)},\ B=d_1\left(\frac{2}{R_1-\bar{x}_1^1}-\frac{\alpha}{a}\right),\ C=2\alpha d_1,\ E=\alpha d_1\left[\frac{(\bar{x}_1^1-R_1)^2}{3a}-a\right]-\alpha c
\end{aligned}\right\}\tag{48}
$$

さらに $\bar{x}_2^2$ は $\bar{x}_2^2-R_1<a<\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1$ を満たさなければならない

③　$0 < a \leq z - R_1$

このとき，$\Phi(z-R_1) = \Phi(z-\bar{x}_1^1) = 1$, $G(z-R_1) = G(z-\bar{x}_1^1) = a/2$, $\Phi_2(z-R_1) = a^2/3$ となり，これらを式(14)に代入すれば，

$$F_1^{2\prime}(z) = \frac{2d_1(1+\alpha)}{R_1 - \bar{x}_1}(z-\bar{x}_1)^2 - \alpha c + \frac{2\alpha d_1}{R_1 - \bar{x}_1^1}\left[-a(z-\bar{x}_1^1) + \frac{a^2}{3}\right]$$

$$= \frac{2(1+\alpha)d_1}{R_1 - \bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1)^2 - \frac{2a\alpha d_1}{R_1 - \bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1) + \frac{2a^2\alpha d_1}{3(R_1 - \bar{x}_1^1)} - \alpha c \tag{49}$$

$F_1^{2\prime}(z) = 0$ は唯一の正根 $\bar{x}_2^2 (> \bar{x}_1^1)$ をもつから，$\bar{x}_2^2$ は

$$\bar{x}_2^2 = \bar{x}_1^1 + \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{50}$$

ここに，

$$A = \frac{2(1+\alpha)d_1}{R_1 - \bar{x}_1^1},\ B = \frac{-a\alpha d_1}{R_1 - \bar{x}_1^1},\ C = \frac{2a^2\alpha d_1}{3(R_1 - \bar{x}_1^1)} - \alpha c \tag{51}$$

さらに，$\bar{x}_2^2$ は　$a \leq \bar{x}_2^2 - R_1$ を満たさなければならない。

$k = 3$

(i)　$(H_1'(R_1) > 0, F_1^{1\prime}(R_1) \leq 0, F_2^{1\prime}(R_1) \leq 0)$

①　$z - \bar{x}_1^1 < a$

このとき，$\Phi(z-R_1-b_1) = (z-R_1-b_1)/a$, $\Phi_2(z-R_1-b) = (z-R_1-b)^3/(3a)$, $G(z-R_1-b) = (z-R_1-b)^2/(2a)$, $\Phi(z-\bar{x}_1^1-b_1) = (z-\bar{x}_1^1-b_1)/a$, $G(z-\bar{x}_1^1-b_1) = (z-\bar{x}_1^1-b_1)^2/(2a)$ となるから，これらを式(16)に代入して積分すると，

$$F_2^{2\prime}(z) = \frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1 - \bar{x}_1^1} - \alpha c + \frac{\alpha}{a}\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left\{\frac{2d_1(z-x_1^1-b_1)^2}{R_1 - \bar{x}_1^1}\left[1 + \frac{z-R_1-b_1}{a}\right] - \alpha c\right\}db_1$$

$$+ \frac{2\alpha^2 d_1}{3(R_1 - \bar{x}_1^1)a^2}\int_0^{z-\bar{x}_2^2}(z-R_1-b_1)^2[-2(z-R_1-b_1) - 3(R_1 - \bar{x}_1^1)]db_1$$

$$+ 2\alpha^2 d_1 \int_0^{z-\bar{x}_2^2}\frac{(R_1 - \bar{x}_1^1)^2}{2a}\cdot\frac{1}{a}db$$

$$= \frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1 - \bar{x}_1^1} - \alpha c - \frac{\alpha^2 c(z-\bar{x}_2^2)}{a} + \frac{2\alpha d_1}{(R_1 - \bar{x}_1^1)a^2}\left\{\frac{(z-\bar{x}_1^1)^4}{4}\right.$$

$$\left. + \frac{(a+\bar{x}_1^1-R_1)(z-\bar{x}_1^1)^3}{3} - \frac{(4a+\bar{x}_1^1+3\bar{x}_2^2-4R_1)(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^3}{12}\right\}$$

$$-\frac{\alpha^2 d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}\{(z-R_1)^4+2(R_1-\bar{x}_1^1)(z-R_1)^3$$

$$-(\bar{x}_2^2-R_1)^3(-2\bar{x}_1^1+R_1+\bar{x}_2^2)\}+\frac{\alpha^2 d_1(R_1-\bar{x}_1^1)^2(z-\bar{x}_2^2)}{a^2}$$

$$=\frac{(3-2\alpha)\alpha d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}(z-\bar{x}_1^1)^4+\frac{2\alpha[a+(1-\alpha)(\bar{x}_1^1-R_1)]d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}(z-\bar{x}_1^1)^3+\frac{2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1)^2$$

$$+\frac{\alpha^2}{a}\left\{\frac{(R_1-\bar{x}_1^1)^2 d_1}{3a}-c\right\}(z-\bar{x}_1^1)+\frac{\alpha d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}\Big\{2\alpha\big[(R_1-\bar{x}_1^1)^3(2\bar{x}_1^1+R_1-3\bar{x}_2^2)$$

$$+(\bar{x}_2^2-R_1)^3(R_1+\bar{x}_2^2-2\bar{x}_1^1)\big]-(4a+\bar{x}_1^1+3\bar{x}_2^2-4R_1)(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^3\Big\}$$

$$-\alpha c\left[1+\frac{\alpha(\bar{x}_1^1-\bar{x}_2^2)}{a}\right] \tag{52}$$

$F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^2\,(>\bar{x}_2^2>R_1)$ をもつが，$F_2^{2\prime}(z)=0$ は $\beta_{41}z^4+\beta_{31}z^3+\beta_{21}z^2+\beta_{11}z+\beta_{01}=0$（$\beta_{ij}$ は実定数 $\beta_{41}\fallingdotseq 0$）という一般の 4 次方程式となり，解法は複雑であるため省略する（注 2 参照）

注 2　一般の 4 次方程式 $\beta_4z^4+\beta_3z^3+\beta_2z^2+\beta_1z+\beta_0=0, \beta_i$（$i=0,\cdots,4$）は実数，$\beta_4\fallingdotseq 0$, において両辺を β_4 で割り，$z=y-\beta_3/(4\beta_4)$ とおくと，$y^4+py^2+qy+\gamma=0$ に移る。ここに，

$$p=\frac{-3}{2}\left(\frac{\beta_3}{2\beta_4}\right)^2+\frac{\beta_2}{\beta_4},\quad q=\left(\frac{\beta_3}{2\beta_4}\right)^3-\frac{\beta_2\beta_3}{2(\beta_4)^2}+\frac{\beta_1}{\beta_4},$$

$$\gamma=-3\left(\frac{\beta_3}{4\beta_4}\right)^4+\frac{\beta_2}{\beta_4}\left(\frac{\beta_3}{4\beta_4}\right)^2-\frac{\beta_1\beta_3}{4(\beta_4)^2}+\frac{\beta_0}{\beta_4}$$

この方程式の解の挙動は，その分解 3 次方程式

$$x^3+2px^2+(p^2-4\gamma)x-q^2=0$$

の解の挙動に依存して変る。x_1, x_2, x_3, を分解 3 次方程式の解とすれば，

$$y_1=\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})$$

$$y_2=\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3})$$

表 3.1

分解 3 次方程式	4 次方程式
すべて正の実根	4 実根
すべて実根で，そのうち 1 つは正，2 つが負	2 組の共役複素根
1 つの実根と 2 つの共役複素根	2 実根と，2 つの共役複素根

$$y_3=\frac{1}{2}(-\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3})$$

$$y_4=\frac{1}{2}(-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})$$

が方程式 $y^4+py^2+qy+\gamma=0$ の根であり，これより $z=y-\beta_3/(4\beta_4)$ によって，与えられた4次方程式の解が得られ，ここで取扱っているモデルの一般論より実根のうち最大根を z_* とすればよい。

② $z-R_1<a\leq z-\bar{x}_1^1$

i) $z-\bar{x}_1^1-a<z-\bar{x}_2^2$ の場合　$(\Leftrightarrow a>\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)$

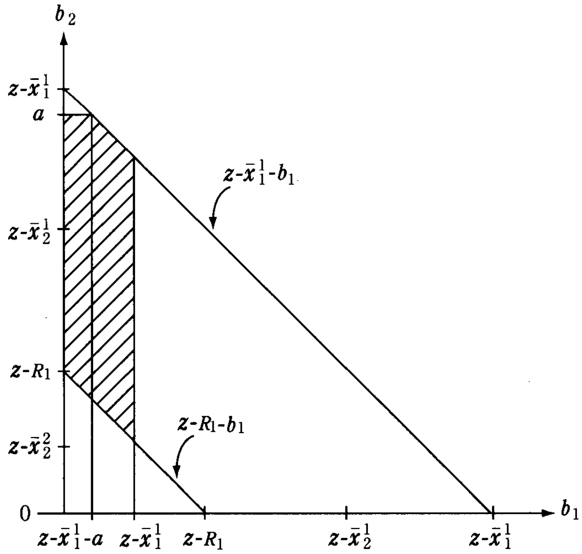

図 3.5　$z-\bar{x}_1^1-a<z-\bar{x}_2^2$

このとき，式(15)の最後の重積分は

$$\alpha^2\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1}H_1'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$=\alpha^2\int_0^{z-\bar{x}_1^1-a}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{a}H_1'(z-b_1-b_2)\frac{1}{a}db_2\right)\frac{1}{a}db_1$$

$$+\alpha^2\int_{z-\bar{x}_1^1-a}^{z-\bar{x}_2^2}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1}H_1'(z-b_1-b_2)\frac{1}{a}db_2\right)\frac{1}{a}db_1$$

$$=-\frac{\alpha^2d_1}{3a^2}(z-R_1-a)^3+\frac{\alpha^2d_1}{a^2}(\bar{x}_1^1-R_1)(z-R_1-a)^2$$

$$+\frac{\alpha^2 d_1(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{a^2}\left[\frac{2(R_1-\bar{x}_1^1)}{3}+\bar{x}_1^1+a-\bar{x}_2^2\right]$$

したがって

$$F_2^{2\prime}(z)=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}-\alpha c+\frac{2d_1\alpha}{(R_1-\bar{x}_1^1)a}\left\{\frac{1}{3}\left[(z-\bar{x}_1^1)^3-(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^3\right]-\alpha c(z-\bar{x}_2^2)\right\}$$

$$+\frac{\alpha^2 d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}\left[(z-\bar{x}_1^1)^4-(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^4\right]-\frac{2\alpha^2 d_1(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{3a^2}(z-\bar{x}_2^2)$$

$$-\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}(z-R_1-a)^3+\frac{\alpha^2 d_1}{a^2}(\bar{x}_1^1-R_1)(z-R_1-a)^2$$

$$+\frac{\alpha^2 d_1(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{a^2}\left[\frac{2(R_1-\bar{x}_1^1)}{3}+\bar{x}_1^1+a-\bar{x}_2^2\right]$$

$$=\frac{\alpha^2 d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}(z-\bar{x}_1^1)^4+\frac{\alpha d_1}{3a}\left[\frac{2}{R_1-\bar{x}_1^1}-\frac{\alpha}{a}\right](z-\bar{x}_1^1)^3$$

$$+d_1\left[\frac{2}{R_1-\bar{x}_1^1}+\frac{\alpha^2}{a}\right](z-\bar{x}_1^1)^2$$

$$+\frac{\alpha^2 d_1}{a}\left[-\frac{2c}{R_1-\bar{x}_1^1}-\frac{2(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{3a}+\frac{(\bar{x}_1^1-R_1-a)(\bar{x}_1^1-R_1+a)}{a}\right](z-\bar{x}_1^1)$$

$$-\frac{\alpha d_1(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)}{(R_1-\bar{x}_1^1)a}\left[-2\alpha c+\frac{2(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^2}{3}+\frac{\alpha(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^3}{6a}\right]-\alpha c$$

$$+\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}\left[(R_1-\bar{x}_1^1)^2(\bar{x}_1^1-\bar{x}_2^2)+a^3\right] \tag{53}$$

$F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の根 $\bar{x}_3^2(>\bar{x}_2^2>R_1)$ をもつが，$F_2^{2\prime}(z)=0$ は $\beta_{42}z^4+\beta_{32}z^3+\beta_{22}z^2+\beta_{12}z+\beta_{02}=0$（$\beta_{ij}$ は実定数 $\beta_{42}\neq 0$）という一般の 4 次方程式となり，解法は複雑であるので省略する。（注 2 参照）。

ii）$z-\bar{x}_1^1-a\geq z-\bar{x}_2^2$　（$\Leftrightarrow a\leq \bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1$）

このとき，

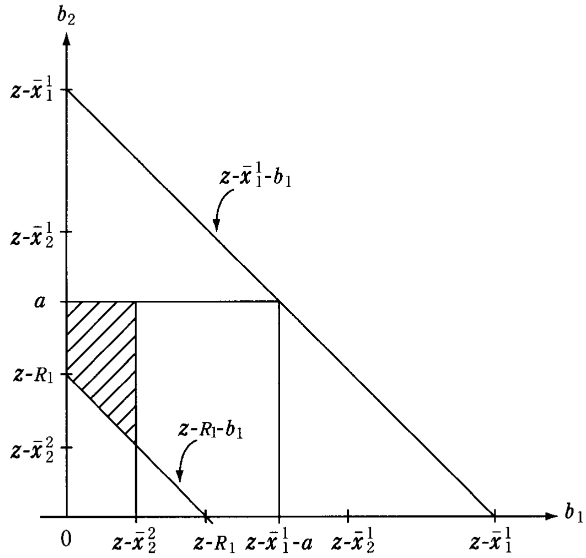

図 3.6 $z-\bar{x}_1^1-a \geq z-\bar{x}_2^2$

$$\alpha^2\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1} H_1'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$=\frac{\alpha^2}{a^2}\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{a} H_1'(z-b_1-b_2)db_2\right)db_1$$

$$=\frac{\alpha^2 d_1}{a^2}\left\{-\frac{(z-R_1-a)^3}{3}+(\bar{x}_1^1-R_1)(z-R_1-a)^2\right.$$

$$\left.-\frac{(a+R_1-\bar{x}_2^2)^2(a+3\bar{x}_1^1-2R_1-\bar{x}_2^2)}{3}\right\}$$

となるから

$$F_2^{2\prime}(z)=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}-\alpha c+\frac{2\alpha d_1}{(R_1-\bar{x}_1^1)a}\left\{\frac{1}{3}\left[(z-\bar{x}_1^1)^3-(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^3\right]-\alpha c(z-\bar{x}_2^2)\right\}$$

$$+\frac{\alpha^2 d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}\left[(z-\bar{x}_1^1)^4-(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^4\right]$$

$$-\frac{2\alpha^2 d_1(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{3a^2}(z-\bar{x}_2^2)+\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}\left\{-(z-R_1-a)^3+3(\bar{x}_1^1-R_1)(z-R_1-a)^2\right.$$

$$\left.-(a+R_1-\bar{x}_2^2)^2(a+3\bar{x}_1^1-2R_1-\bar{x}_2^2)\right\}$$

$$=\frac{\alpha^2 d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}(z-\bar{x}_1^1)^4+\frac{\alpha d_1}{3a}\left[\frac{2}{R_1-\bar{x}_1^1}-\frac{\alpha}{a}\right](z-\bar{x}_1^1)^3$$

$$+d_1\left[\frac{2}{R_1-\bar{x}_1^1}+\frac{\alpha^2}{a}\right](z-\bar{x}_1^1)^2$$
$$+\frac{\alpha^2 d_1}{a}\left[-\frac{2c}{R_1-\bar{x}_1^1}+\frac{2(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{3a}+\frac{(\bar{x}_1^1-R_1-a)(\bar{x}_1^1-R_1+a)}{a}\right](z-\bar{x}_1^1)$$
$$-\frac{\alpha d_1(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)}{(R_1-\bar{x}_1^1)a}\left[2\alpha c+\frac{2(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^2}{3}+\frac{\alpha(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^3}{6a}\right]-\alpha c$$
$$+\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}\Big[(2(\bar{x}_1^1-R_1)+a)(\bar{x}_1^1-R_1-a)^2+2(R_1-\bar{x}_1^1)^2(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)$$
$$+(2R_1+\bar{x}_2^2-3\bar{x}_1^1-a)(a+R_1-\bar{x}_2^2)^2\Big] \tag{54}$$

となる。i) と ii) の $F_2^{2\prime}(z)$ は定数の差が存在するのみである。$F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^2$ $(>\bar{x}_2^2>R_1)$ をもつが，$F_2^{2\prime}(z)=0$ は $\beta_{43}z^4+\beta_{33}z^3+\beta_{23}z^2+\beta_{13}z+\beta_{03}=0$ (β_{ij} は実定数 $\beta_{43}\neq 0$) という一般の 4 次方程式となり，解法は複雑であるので省略する（注 2 参照)。

注 3　$z\leqq\bar{x}_2^2$ のとき，$z-R_1<a\leq z-\bar{x}_1^1\leqq\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1$ より $a\leqq\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1$ をうる。$z>\bar{x}_2^2+R_1-\bar{x}_1^1$ のとき，$a>z-R_1>\bar{x}_2^2+R_1-\bar{x}_1^1-R_1=\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1$，よって $a>\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1$，$\bar{x}_2^2<z\leqq\bar{x}_2^2+R_1-\bar{x}_1^1$ のときは a と $\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1$ の大小は不明。

③　$z-\bar{x}_2^2<a\leq z-R_1$

i)　$z-R_1-a>z-\bar{x}_2^2$ $(\Leftrightarrow\bar{x}_2^2-R_1>a)$

このとき，

$$\alpha^2\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left(\int_0^{z-R_1-b_1}H_2'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$
$$=\frac{\alpha^2}{a^2}\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left(\int_0^{a}H_2'(z-b_1-b_2)db_2\right)db_1$$
$$=\frac{\alpha^2 d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}\Big\{4a(z-\bar{x}_1^1)^3-6a^2(z-\bar{x}_1^1)^2+4a^3(z-\bar{x}_1^1)$$
$$-4(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^3a+6(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^2a^2-4(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)a^3\Big\}$$

となり，最終項の重積分は，$0<b_1<z-\bar{x}_2^2$ のとき，$a<z-R_1-b_1<z-\bar{x}_1^1-b_1$ となるから 0 となる。したがって，

$$F_2^{2\prime}(z)=\frac{2\alpha(\alpha+1)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a}(z-\bar{x}_1^1)^3+\frac{d_1(2-\alpha^2)}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1)^2+\frac{2\alpha^2 d_1(a^2-3c)}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a}(z-\bar{x}_1^1)$$
$$+\frac{\alpha^2 d_1(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a}\left\{6c-2(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^2+3a(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)-2a^2\right\}-\alpha c \tag{55}$$

$F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^2\,(>\bar{x}_2^2>R_1)$ をもつので，カルダーノの公式を適用すると，

$$\bar{x}_3^2=\bar{x}_1^1+u+v-\frac{B}{3A} \tag{56}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
&u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}},\ v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}\\
&2q=\frac{2B^3}{27A^3}-\frac{BC}{3A^2}+\frac{E}{A},\ 3p=\frac{3AC-B^2}{3A^2}\\
&A=\frac{2\alpha(1+\alpha)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a},\ B=\frac{(2-\alpha^2)d_1}{R_1-\bar{x}_1^1},\ C=\frac{2\alpha^2(a^2-3c)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a},\\
&E=\frac{\alpha^2(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a}\left\{6c-2(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^2+3a(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)-2a^2\right\}-\alpha c
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

ii）$z-R_1-a\le z-\bar{x}_2^2$ （$\Leftrightarrow a\ge\bar{x}_2^2-R_1$）

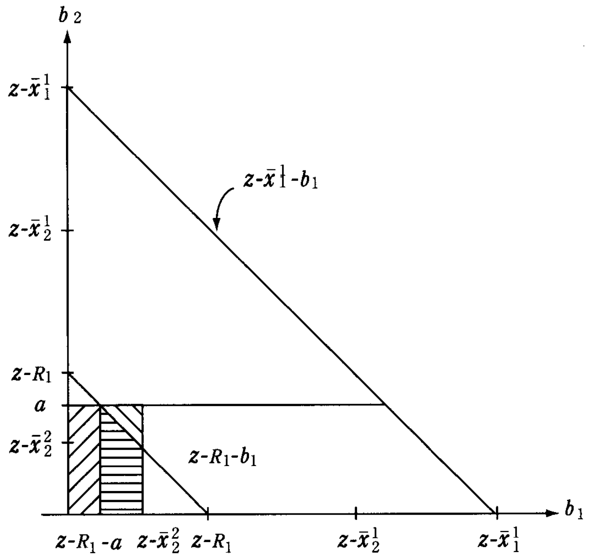

図 3.7　$z-R_1-a\le z-\bar{x}_2^2$

このとき，

$$\alpha^2 \int_0^{z-\bar{x}_2^2} \left(\int_0^{z-R_1-b_1} H_2'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2 \right) \phi(b_1)db_1$$

$$= \frac{\alpha^2}{a^2} \int_0^{z-R_1-a} \left(\int_0^a H_2'(z-b_1-b_2)db_2 \right) db_1 + \frac{\alpha^2}{a^2} \int_{z-R_1-a}^{z-\bar{x}_2^2} \left(\int_0^{z-R_1-b_1} H_2'(z-b_1-b_1)db_2 \right) db_1$$

$$= \frac{\alpha^2 d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a} \left\{ 2(z-\bar{x}_1^1)^3 - 3a(z-\bar{x}_1^1)^2 + 2a^2(z-\bar{x}_1^1) \right\}$$

$$+ \frac{\alpha^2 d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2} \left\{ (R_1-\bar{x}_1^1)^4 - 4(R_1+a-\bar{x}_2^2)(R_1-\bar{x}_1^1)^3 - a^4 - (\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^4 \right\}$$

$$\alpha^2 \int_0^{z-\bar{x}_2^2} \left(\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1} H_1'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2 \right) \phi(b_1)db_1$$

$$= \frac{\alpha^2}{a^2} \int_{z-R_1-a}^{z-\bar{x}_2^2} \left(\int_{z-R_1-b}^{a} H_1'(z-b_1-b_2)db_2 \right) db_1$$

$$= \frac{\alpha^2 d_1}{3a^2} \left\{ (R_1+a-\bar{x}_1^1)\left[2(R_1-\bar{x}_1^1)^2 - (R_1-\bar{x}_1^1)(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1-a) - (\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1-a)^2 \right] \right\}$$

となるから，

$$F_2^{2\prime}(z) = \frac{2\alpha(1+\alpha)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a}(z-\bar{x}_1^1)^3 + \frac{(2-\alpha^2)d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1)^2 + \frac{2\alpha^2(a^2-3c)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a}(z-\bar{x}_1^1)$$
$$+ \frac{\alpha^2 d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2} \left\{ (R_1-\bar{x}_1^1)^4 - 4(R_1+a-\bar{x}_2^2)(R_1-\bar{x}_1^1)^3 - a^4 - (\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^4 \right.$$
$$\left. + 12ac(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1) \right\} - \alpha c$$
$$+ \frac{\alpha^2 d_1}{3a^2} \left\{ (R_1+a-\bar{x}_2^2)\left[2(R_1-\bar{x}_1^1)^2 - (R_1-\bar{x}_1^1)(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1-a) - (\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1-a)^2 \right] \right\} \tag{58}$$

i)，ii）における $F_2^{2\prime}(z)$ の差は定数項の差のみである。

$F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^2\,(>\bar{x}_2^2>R_1)$ をもつので，カルダーノの公式を適用すると，

$$\bar{x}_3^2 = \bar{x}_1^1 + u + v - \frac{B}{3A} \tag{59}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
&u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}\ ,\ v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}\\
&2q=\frac{2B^3}{27A^3}-\frac{BC}{3A^2}+\frac{E}{A},\ 3p=\frac{3AC-B^2}{3A^2}\\
&A=\frac{2\alpha(1+\alpha)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a},\ B=\frac{(2-\alpha^2)d_1}{R_1-\bar{x}_1^1},\ C=\frac{2\alpha^2(a^2-3c)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a}\\
&E=\frac{\alpha^2 d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a}\Big\{(R_1-\bar{x}_1^1)^4-4(R_1+a-\bar{x}_2^2)(R_1-\bar{x}_1^1)^3\\
&\quad -a^4-(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^4+12ac(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)\Big\}-\alpha c\\
&\quad +\frac{\alpha^2 d_1}{3a^2}\Big\{(R_1+a-\bar{x}_2^2)\big[2(R_1-\bar{x}_1^1)^2-(R_1-\bar{x}_1^1)(\bar{x}_2-\bar{x}_1^1-a)-(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1-a)^2\big]\Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

注 4　$z\leq\bar{x}_2^2$ のとき，$a\leq z-R_1$, $\leq\bar{x}_2^2-R_1$ より $a\leq\bar{x}_2^2-R_1$ となる。$z>2\bar{x}_2^2-R_1=\bar{x}_2^2+(\bar{x}_2^2-R_1)$ のとき，$a>z-\bar{x}_2^2>2\bar{x}_2^2-R_1-\bar{x}_2^2=\bar{x}_2^2-R_1$ となり，$a>\bar{x}_2^2-R_1$ をうる。$\bar{x}_2^2<z<2\bar{x}_2^2-R_1$ のときは，a と $\bar{x}_2^2-R_1$ の大小関係は不明である。

④　$a\leq z-\bar{x}_2^2$

i)　$z-R_1-a>a$　（$\Leftrightarrow 0<a<(z-R_1)/2$）

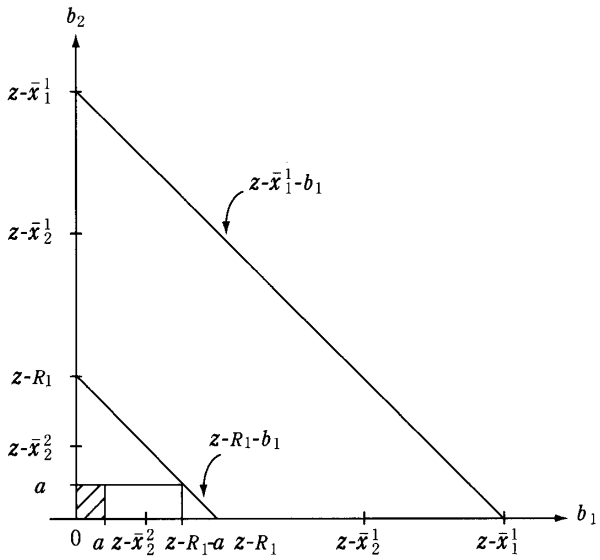

図 3.8　$z-R_1-a>a$

このとき

$$\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^2}(H_2'(z-b_1)-\alpha c)\,\phi(b_1)db_1=\frac{\alpha}{a}\int_0^a(H_2'(z-b_1)-\alpha c)db_1$$

$$=\frac{2\alpha d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}\left\{3(z-\bar{x}_1^1)^2-3a(z-\bar{x}_1^1)+a^2\right\}-\alpha^2 c$$

$$\alpha^2\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left(\int_0^{z-R_1-b_1}H_2'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$+\alpha^2\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1}H_1'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$=\frac{\alpha^2}{a^2}\int_0^a\left(\int_0^a H_2'(z-b_1-b_2)db_2\right)db_1+0$$

$$=\frac{\alpha^2 d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}\left\{6(z-\bar{x}_1^1)^2-12a(z-\bar{x}_1^1)+7a^2\right\}$$

となる。したがって

$$F_2^{2\prime}(z)=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}-\alpha c+\frac{2\alpha d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}\left\{3(z-\bar{x}_1^1)^2-3a(z-\bar{x}_1^1)+a^2\right\}$$

$$-\alpha^2 c+\frac{\alpha^2 d_1}{3(R_1-x_1^1)}\left\{6(z-\bar{x}_1^1)^2-12a(z-\bar{x}_1^1)+7a^2\right\}$$

$$=\frac{2(1+\alpha+\alpha^2)d_1}{R_1-x_1}(z-\bar{x}_1^1)^2-\frac{2a\alpha(1+2\alpha)d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1)$$

$$+\frac{a^2\alpha(2+7\alpha)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}-\alpha c(1+\alpha) \tag{61}$$

$F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^2$ をもつから，

$$\bar{x}_3^2=\bar{x}_1^1+\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A} \tag{62}$$

ここに

$$A=\frac{2(1+\alpha+\alpha^2)d_1}{R_1-x_1},\quad B=\frac{-a\alpha(1+2\alpha)d_1}{R_1-\bar{x}_1^1},\quad C=\frac{a^2\alpha(2+7\alpha)d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}-\alpha c(1+\alpha) \tag{63}$$

ii)　$z-R_1-a\le a<z-\bar{x}_1^1-a$　（$\Leftrightarrow$ $(z-R_1)/2\le a\ (z-\bar{x}_1^1)/2)$）

このとき，式(15)の単積分の値は(i)と同じである。また，

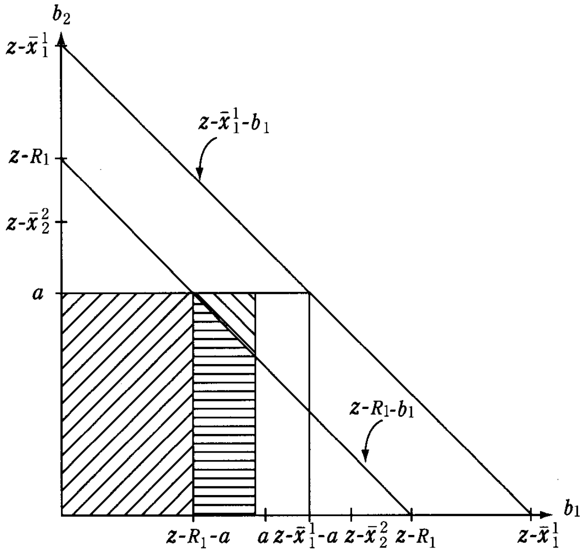

図 3.9　$z-R_1-a \leq a < z-\bar{x}_1^1-a$

$$\alpha^2 \int_0^{z-\bar{x}_2^2} \left(\int_0^{z-R_1-b_1} H_2'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2 \right) \phi(b_1)db_1$$

$$= \frac{\alpha^2}{a^2} \int_0^{z-R_1-a} \left(\int_0^a H_2'(z-b_1-b_2)db_2 \right) db_1 + \frac{\alpha^2}{a^2} \int_{z-R_1-a}^{a} \left(\int_0^{z-R_1-b_1} H_2'(z-b_1-b_2)db_2 \right) db_1$$

$$= \frac{2\alpha^2 d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a^2} \left\{ \frac{1}{4}\left[(z-\bar{x}_1^1)^4 - 2(z-\bar{x}_1^1-a)^4 \right] \right.$$

$$\left. + (R_1-\bar{x}_1^1)^3(z-\bar{x}_1^1) - (R_1-\bar{x}_1^1)^3 \left[2a + \frac{3}{4}(R_1-\bar{x}_1^1) \right] \right\}$$

$$\alpha^2 \int_0^{z-\bar{x}_2^2} \left(\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1} H_1'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2 \right) \phi(b_1)db_1$$

$$= \frac{\alpha^2}{a^2} \int_{z-R_1-a}^{a} \left(\int_{z-R_1-b_1}^{a} H_1'(z-b_1-b_2)db_2 \right) db_1$$

$$= \frac{\alpha^2 d_1}{a^2} \left\{ (R_1-\bar{x}_1^1)^2(2a-z+R_1) - \frac{1}{3}\left[(R_1-\bar{x}_1^1)^3 - (z-\bar{x}_1^1-2a)^3 \right] \right\}$$

$$= \frac{\alpha^2 d_1}{a^2} \left\{ \frac{1}{3}(z-\bar{x}_1^1)^3 - 2a(z-\bar{x}_1^1)^2 + [4a^2-(R_1-\bar{x}_1^1)^2](z-\bar{x}_1^1) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}[2(R_1-\bar{x}_1^1)^2(\bar{x}_1^1-R_1-3a)-8a^3] \right\}$$

となるから

$$F_2^{2\prime}(z)=-\frac{\alpha^2 d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)a^2}(z-\bar{x}_1^1)^4+\alpha^2 d_1\left[\frac{4}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a}+\frac{1}{3a^2}\right](z-\bar{x}_1^1)^3$$

$$+2d_1\left[\frac{1+\alpha-\alpha^2}{(R_1-\bar{x}_1^1)}-\frac{\alpha^2}{a}\right](z-\bar{x}_1^1)^2$$

$$+d_1\left[\frac{2a\alpha(2\alpha-3)}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}-\frac{(R_1-\bar{x}_1^1)^2\alpha^2}{3a^2}+4\alpha^2\right](z-\bar{x}_1^1)$$

$$+\alpha^2 d_1\left[\frac{(R_1-\bar{x}_1^1)^3}{6a^2}+\frac{2(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{3a}-\frac{a^2}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}+\frac{8a}{3}\right]$$

$$+\frac{2a^2\alpha d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}-\alpha c(1+\alpha) \tag{64}$$

$F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^2\,(>\bar{x}_2^2>R_1)$ をもつが $F_2^{2\prime}(z)=0$ は，$\beta_{44}z^4+\beta_{84}z^3+\beta_{24}z^2+\beta_{14}z+\beta_{04}=0$ (β_{ij} は実定数 $\beta_{44}\fallingdotseq 0$) という一般の 4 次方程式となり，解法は複雑であるので省略する（注 2 参照)。

iii)　$a\geq z-\bar{x}_1^1-a$　($\Leftrightarrow a\geq(z-\bar{x}_1^1)/2$)

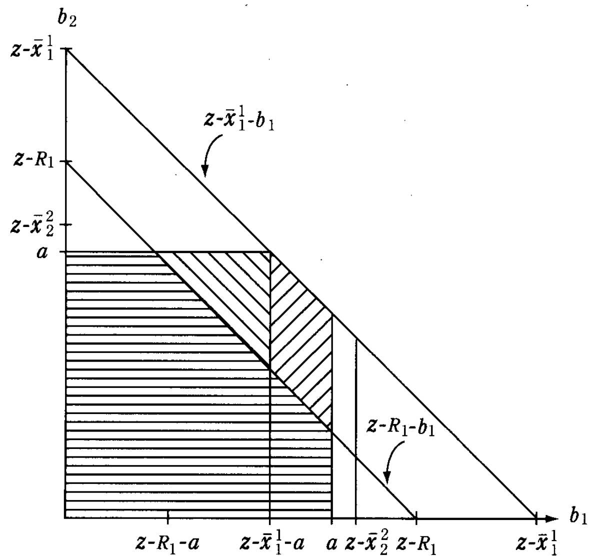

図 3.10　$z-\bar{x}_1^1-a\leq a<z-\bar{x}_2^2$

このとき，式(15)の単積分，第 1 番目の 2 重積分の項は ii) と同じである。

$$\alpha^2\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{-\bar{x}_1^1-b_1} H_1'(z-b_1-b_2)\phi(b_2)db_2\right)\phi(b_1)db_1$$

$$=\frac{\alpha^2}{a^2}\int_{z-R_1-a}^{z-\bar{x}_1^1-a}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{a} H_1'(z-b_1-b_2)db_2\right)db_1+\frac{\alpha^2}{a^2}\int_{z-\bar{x}_1^1-a}^{a}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1} H_1'(z-b_1-b_2)db_2\right)db_1$$

$$=\frac{2\alpha^2(R_1-\bar{x}_1^1)^3d_1}{3a^2}-\frac{\alpha^2d_1(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{a^2}(z-\bar{x}_1^1)+\frac{2\alpha^2d_1(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{a}$$

となるから

$$F_2^{2\prime}(z)=-\frac{\alpha^2d_1}{6(R_1-\bar{x}_1^1)}(z-\bar{x}_1^1)^4+\frac{4\alpha^2d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)a}(z-\bar{x}_1^1)^3+\frac{2(1+\alpha-\alpha^2)d_1}{(R_1-\bar{x}_1^1)}(z-\bar{x}_1^1)^2$$
$$+\frac{\alpha d_1}{3}\left\{\frac{2a(2\alpha-3)}{R_1-\bar{x}_1^1}-\frac{\alpha(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{a^2}\right\}(z-\bar{x}_1^1)$$
$$+\alpha^2d_1\left[\frac{(R_1-\bar{x}_1^1)^3}{6a^2}+\frac{2(R_1-\bar{x}_1^1)^2}{3a}-\frac{a^2}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}\right]+\frac{2a^2\alpha d_1}{3(R_1-\bar{x}_1^1)}-\alpha c(1+\alpha) \quad (65)$$

$F_2^{2\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^2\,(>\bar{x}_2^2>R_1)$ をもつが $F_2^{2\prime}(z)=0$ は，$\beta_{45}z^4+\beta_{35}z^3+\beta_{25}z^2+\beta_{15}z+\beta_{05}=0$（$\beta_{ij}$ は実定数 $\beta_{45}\neq 0$）という一般の 4 次方程式となり，解法は複雑であるので省略する（注 2 参照）。

3.2.2 指数分布

需要量 B の密度関数および分布関数が

$$\phi(b)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda b}, & 0\le b\\ 0, & 0>b\end{cases}\qquad \Phi(b)=\begin{cases}1-e^{-\lambda b}, & 0\le b\\ 0 & 0>b\end{cases}$$

と表わされる平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うものとする

具体例 1 の場合

$k=2$ （$H'(R_1)>0,\ F_1^{1\prime}(R_1)>0$）

このとき

$$\Phi(z-\bar{x}_1^1)=1-e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)},\ G(z-\bar{x}_1^1)=-(z-\bar{x}_1^1)e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)}+\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)})$$

を式(8)に代入すると，

$$F_1^{1\prime}(z)=2d_1(1+\alpha)(z-\bar{x}_1^1)+\frac{2\alpha d_1}{\lambda}e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)}-\left\{\alpha c+\frac{2\alpha d_1}{\lambda}\right\} \quad (66)$$

$$F_1^{1}{}''(z)=2d_1+2\alpha d_1(1-e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)})>0$$

$$F_1^{1}{}'(\bar{x}_1^1)=-\alpha c-\frac{2\alpha d_1}{\lambda}<0,\ F_1^{1}{}'(R_1)>0$$

よって $F_1^{1}{}'(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_2^1$ をもち，$\bar{x}_1^1<\bar{x}_2^1<R_1$ である。

$k=3$　$(H_1'(R_1)>0,\ F_1^{1}{}'(R_1)>0,\ F_2^{1}{}'(R_1)>0)$

$$F_2^{1}{}'(z)=H_1^1(z)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^2}F_1^{1}{}'(z-b_1)\lambda e^{-\lambda b_1}db_1$$

$$=2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^1}\{2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1)-\alpha c$$

$$+\alpha\int_0^{z-\bar{x}_1^1-b_1}2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)\lambda e^{-\lambda b_2}db_2\}\lambda e^{-\lambda b_1}db_1$$

$$=2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c+\alpha\left\{\left[1-e^{-\lambda(z-\bar{x}_2^1)}\right]\left[2d_1(1+\alpha)(z-\bar{x}_1^1)-\alpha\left(c+\frac{2d_1}{\lambda}\right)\right]\right.$$

$$+2d_1(1+\alpha)\left[(z-\bar{x}_2^1)e^{-\lambda(z-\bar{x}_2^1)}-\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda(z-\bar{x}_2^1)})\right]$$

$$\left.+2\alpha d_1(z-\bar{x}_2^1)e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)}\right\}$$

$$=2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha\left[\frac{2d_1(1+\alpha)}{\lambda}+c\right]-\frac{2\alpha^2d_1}{\lambda}e^{-\lambda(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)}+2d_1(1+\alpha+\alpha^2)(z-\bar{x}_2^1)$$

$$+\frac{2\alpha d_1}{\lambda}\left[1+\alpha(1+e^{-\lambda(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)})\right]e^{-\lambda(z-\bar{x}_2^1)}+2\alpha^2d_1e^{-\lambda(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)}(z-\bar{x}_2^1)e^{-\lambda(z-\bar{x}_2^1)}\tag{67}$$

$$(\because F_1^{1}{}'(\bar{x}_2^1)=2d_1(1+\alpha)(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)+\frac{2\alpha d_1}{\lambda}e^{-\lambda(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)}-\alpha\left(c+\frac{2d_1}{\lambda}\right)=0\text{ より})$$

また，

$F_2^{1}{}'(\bar{x}_2^1)=2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c<0,\ F_2^{1}{}'(R_1)>0,\ F_2^{1}{}''(z)>0$ より $F_2^{1}{}'(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^1$ をもち，$\bar{x}_2^1<\bar{x}_3^1<R_1$

$\bar{x}_3^1$ の値は解析的に求めることができないので，数値的解法を利用する。

具体例 2 の場合

$\boldsymbol{k=2}$　$(H_1'(R_1)\,0,\ F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0)$

このとき，

$\Phi(z)=1-e^{-\lambda z}$, $G(z)=-ze^{-\lambda z}+(1-e^{-\lambda z})/\lambda$, $\Phi_2(z)=-z^2e^{-\lambda z}-2ze^{-\lambda z}/\lambda+2(1-e^{-\lambda z})/\lambda^2$ となるから，これらを式(14)に代入し，整理すると，

$$F_1^{2\prime}(z)=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}\left[1+\alpha(1-e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)})\right]-\alpha c+\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{\frac{2}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda}(z-\bar{x}_1^1)\right.$$

$$\left.+e^{-\lambda(\bar{x}_1^1-R_1)}\left[(z-\bar{x}_1^1)^2+\frac{1}{\lambda}(R_1-\bar{x}_1^1)-\frac{2}{\lambda^2}\right]e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)}\right\}+\frac{2\alpha d_1}{\lambda}e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)}$$

$$=\frac{2\alpha d_1\left[\bar{e}^{\lambda(\bar{x}_1^1-R_1)}-1\right]}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1)^2e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)}+\frac{2(1+\alpha)d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1)^2$$

$$-\frac{4\alpha d_1}{\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}(z-\bar{x}_1^1)+\frac{2\alpha d_1}{\lambda}\left\{1+\left[1-\frac{2}{\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}\right]e^{-\lambda(\bar{x}_1^1-R_1)}\right\}e^{-\lambda(z-\bar{x}_1^1)}$$

$$+\frac{4\alpha d_1}{\lambda^2(R_1-\bar{x}_1^1)}-\alpha c \tag{68}$$

$\boldsymbol{k=3}$

(i)　$H_1^{1\prime}(R_1)>0,\ F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0,\ F_2^{1\prime}(R_1)\leq 0$

$\Phi(z)$, $G(z)$ および $\Phi_2(z)$ を式(16)に代入し，積分し，$z-R_1=z^*$ とおき整理すると，

$$\alpha\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left\{\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1)^2[1+\alpha\Phi(z-R_1-b_1)]}{R_1-\bar{x}_1^1}\right\}\phi(b_1)db_1$$

$$=\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{(1+\alpha)\left[(z_*^2+2\left(R_1-\bar{x}_1^1-\frac{1}{\lambda}\right)z_*+(R_1-\bar{x}_1^1)^2-\frac{2}{\lambda}(R_1-\bar{x}_1^1)+\frac{2}{\lambda^2}\right.\right.$$

$$\left.-e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_2^2)}\left[(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^2-\frac{2}{\lambda}(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)+\frac{2}{\lambda^2}\right]e^{-\lambda z_*}\right]-\frac{\alpha\lambda}{3}\left[z_*^3+3(R_1-\bar{x}_1^1)z_*^2\right.$$

$$\left.\left.+3(R_1-\bar{x}_1^1)^2z_*+(R_1-\bar{x}_1^1)^3-(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^3\right]\bar{e}^{\lambda z_*}\right\}$$

$$\frac{2\alpha^2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left\{\Phi_2(z-R_1-b_1)-2(z-\bar{x}_1^1-b_1)G(z-R_1-b_1)\right\}\phi(b_1)db_1$$

$$=\frac{2\alpha^2 d_1}{\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}\left\{2\left(\frac{1}{\lambda}+\bar{x}_1^1-R_1\right)-2z_*+2e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_2^2)}\left(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1-\frac{2}{\lambda}\right)e^{-\lambda z_*}\right\}$$

$$+\frac{2\alpha^2 d_1\lambda}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{\frac{1}{3}z_*^3+(R_1-\bar{x}_1^1)z_*^2+\frac{2}{\lambda}\left[R_1-\bar{x}_1^1-\frac{1}{\lambda}\right]z_*-\frac{1}{3}(\bar{x}_2^2-R_1)^3\right.$$

$$\left.-(R_1-\bar{x}_2^2)\left[(R_1-\bar{x}_1^1)\left(R_1-\bar{x}_2^2-\frac{2}{\lambda}\right)+\frac{2}{\lambda^2}\right]\right\}e^{-\lambda z_*}$$

$$2\alpha^2 d_1\int_0^{z-\bar{x}_2^2}\left\{(z-\bar{x}_1^1-b_1)(\Phi(z-\bar{x}_1^1-b_1)-\Phi(z-R_1-b_1))-(G(z-\bar{x}_1^1-b_1)\right.$$

$$\left.-G(z-R_1-b_1))\right\}\phi(b_1)db_1$$

$$=2\alpha^2\lambda d_1\left[R_1-\bar{x}_1^1-\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)})\right](R_1-\bar{x}_2^2+z_*)\bar{e}^{\lambda z_*}$$

となるから，$F_2^{2\prime}(z)$ は

$$-\frac{1}{3}(R_1-\bar{x}_1^1)^3+\frac{1}{3}\left[(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1)^3-(\bar{x}_2^2-R_1)^3\right]-(R_1-\bar{x}_2^2)\left[(R_1-\bar{x}_1^1)\left(R_1-\bar{x}_2^2-\frac{2}{\lambda}\right)+\frac{2}{\lambda^2}\right]$$

$$+(R_1-\bar{x}_1^1)\left(R_1-\bar{x}_1^1-\frac{1}{\lambda}\right)(R_1-\bar{x}_2^2)=\frac{(R_1-\bar{x}_2^2)}{\lambda}\left(R_1-\bar{x}_1^1-\frac{2}{\lambda}\right)$$

を用いて，

$$F_2^{2\prime}(z)=\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{\left(1+\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)z_*^2+2\left[\left(1+\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)(R_1-\bar{x}_1^1)-\frac{1}{\lambda}(1+2\alpha)\right]z_*^2\right.$$

$$\left.+\left(1+\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)(R_1-\bar{x}_1^1)^2+\frac{2}{\lambda}(1+2\alpha)\left(\frac{1}{\lambda}+\bar{x}_1^1-R_1\right)\right\}$$

$$+\frac{2\alpha^2 d_1\lambda}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{\left[\frac{1}{\lambda}\left(R_1-\bar{x}_1^1-\frac{2}{\lambda}\right)+\frac{(R_1-\bar{x}_1^1)}{\lambda}e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}\right]z_*\right.$$

$$+\frac{(R_1-\bar{x}_2^2)}{\lambda}\left(R_1-\bar{x}_1^1-\frac{2}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_2^2)}\left[-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1-\frac{1}{\lambda}\right)^2+\frac{1}{\lambda}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{\lambda}\left(\bar{x}_2^2-\bar{x}_1^1-\frac{2}{\lambda}\right)-\frac{-c(R_1-\bar{x}_1^1)}{2d_1}\right]+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}(R_1-\bar{x}_1^1)(R_1-\bar{x}_2^2)\right\}e^{-\lambda z_*}$$

$$-\alpha c(1+\alpha) \tag{69}$$

となる。

(ii)　$H_1'(R_1)>0,\ F_1^{1\prime}(R_1)>0,\ F_2^{1\prime}(R_1)\leq 0$

このとき，$z-R_1=z^*$とおくと式(21)の各項は

$$H_2'(z)-\alpha c=\frac{2d_1z_*^2}{R_1-\bar{x}_1^1}+4d_1z_*+2(R_1-\bar{x}_1^1)d_1-\alpha c$$

$$\alpha\int_0^{z-R_1}\left\{\frac{2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1-b_1)^2-\alpha c\right\}\lambda e^{-\lambda b_1}db_1$$

$$=\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{z_*^2+2(R_1-\bar{x}_1^1-\frac{1}{\lambda})z_*+\left[(R_1-\bar{x}_1^1)^2-\frac{2}{\lambda}(R_1-\bar{x}_1^1)+\frac{2}{\lambda^2}\right](1-\bar{e}^{\lambda z_*})\right\}$$

$$-\alpha^2c(1-e^{-\lambda z_*})$$

$$\alpha\int_{z-R_1}^{z-\bar{x}_2^1}\left\{2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1)-\alpha c\right\}\lambda e^{-\lambda b_1}db_1$$

$$=2\alpha d_1\left\{\left(R_1-\bar{x}_1^1-\frac{1}{\lambda}\right)-\left(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_2^1)}\right\}e^{-\lambda z_*}-\alpha^2c(1-e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_2^1)})e^{-\lambda z_*}$$

$$\alpha^2\int_0^{z-R_1}\left(\int_0^{z-R_1-b_1}\frac{2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)^2\lambda e^{-\lambda b_2}db_2\right)\lambda e^{-\lambda b_1}db_1$$

$$=\frac{2\alpha^2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{z_*^2+2\left(R_1-\bar{x}_1^1-\frac{2}{\lambda}\right)z_*+\left[(R_1-\bar{x}_1^1)^2-\frac{4}{\lambda}(R_1-\bar{x}_1^1)+\frac{6}{\lambda^2}\right](1-e^{-\lambda z_*})\right.$$

$$\left.-\lambda\left[(R_1-\bar{x}_1^1)^2-\frac{2}{\lambda}(R_1-\bar{x}_1^1)+\frac{2}{\lambda^2}\right]z_*\bar{e}^{\lambda z_*}\right\}$$

$$\alpha^2\int_0^{z-R_1}\left(\int_{z-R_1-b_1}^{z-\bar{x}_1^1-b_1}2d_1(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)\lambda e^{-\lambda b_2}db_2\right)\lambda e^{-\lambda b_1}db_1$$

$$=2\alpha^2d_1\left\{\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)-1+e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}\right\}z_*e^{-\lambda z_*}$$

$$\alpha^2\int_{z-R_1}^{z-\bar{x}_2^1}\left(\int_0^{z-\bar{x}_1^1-b_1}(z-\bar{x}_1^1-b_1-b_2)\lambda e^{-\lambda b_2}db_2\right)\lambda e^{-\lambda b_1}db_1$$

$$=2\alpha^2d_1\left\{R_1-\bar{x}_1^1-\frac{2}{\lambda}-(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-\frac{2}{\lambda})e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_2^1)}+(R_1-\bar{x}_2^1)e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}\right\}e^{-\lambda z_*}$$

となる。したがって上式を用いて式(21)を計算し，整理すると，

$$F_2^{2\prime}(z)=\left[\frac{2(1+\alpha+\alpha^2)d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\right]z_*^2-4\left[(1+\alpha+\alpha^2)-\frac{\alpha(1+2\alpha)}{\lambda(R_1-\bar{x}_2^1)}\right]d_1z_*$$

$$+2(R_1-\bar{x}_1^1)d_1-\alpha c(1+\alpha)+2\alpha(1+\alpha)d_1\left[R_1-\bar{x}_1^1-\frac{2}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2(R_1-\bar{x}_1^1)}\right]$$

$$+\frac{4\alpha^2 d_1}{\lambda}\left[\frac{2}{\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}-1\right]$$

$$+\left\{2\alpha(1+\alpha)d_1\left[\frac{1}{\lambda}-\frac{2}{\lambda^2(R_1-\bar{x}_1^1)}-(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_2^1)}\right]\right.$$

$$+2\alpha^2 d_1\left[\frac{1}{\lambda}-\frac{4}{\lambda^2(R_1-\bar{x}_1^1)}+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_2^1)}+(R_1-\bar{x}_2^1)e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}\right]$$

$$\left.+\alpha^2 ce^{-\lambda(R_1-\bar{x}_2^1)}\right\}e^{-\lambda z_*}+2\alpha^2 d_1\left\{-\frac{2}{\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}+1+e^{-\lambda(R_1-\bar{x}_1^1)}\right\}z_* e^{-\lambda z_*} \tag{70}$$

となる。

$F_1^{2\prime}(z)=0$ および $F_2^{2\prime}(z)=0$ は，具体例 1 においては，$\beta_{11}z+\beta_{01}+\gamma_{01}e^{-\lambda z}=0$（$k=2$），$\beta_{12}z+\beta_{02}+\gamma_{02}e^{-\lambda z}+\gamma_{12}ze^{-\lambda z}=0$（$k=3$），具体例 2 においては，$\beta_{23}z^2+\beta_{13}z+\beta_{03}+(\beta_{14}z+\beta_{04})\,e^{-\lambda z}=0$（$k=3$，(i)），$\beta_{25}z^2+\beta_{15}z+\beta_{05}+\gamma_{06}e^{-\lambda z}+\gamma_{16}ze^{-\lambda z}=0$（$k=3$，(ii)），（$\beta_{ij}$ および γ_{ij} は実定数）を解くことに帰着する。これは，特殊な場合しかできないので数値解法を利用する。

3.2.3　正規分布

需要量 B の密度関数および分布関数が

$$\phi(b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(b-\mu)^2/2\sigma^2},\ -\infty<b<\infty,\ 0<\sigma<\infty,\ -\infty<\mu<\infty$$

$$\Phi(b)=\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},\ -\infty<b<\infty,\ 0<\sigma<\infty,\ -\infty<\mu<\infty$$

と表される平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。需要量は非負であるから $\mu>>\sigma$ のときこの近似は使用できる。

具体例 1 の場合

$k=2$　$(H_1'(R_1)>0,\ F_1^{1\prime}(R_1)>0)$

このとき

$$G(z-\bar{x}_1^1)=(z-\bar{x}_1^1)\Phi(z-\bar{x}_1^1)-\int_{-\infty}^{z-\bar{x}_1^1}\Phi(b)db$$

となるから式(8)に代入して，

$$F_1^{1\prime}(z)=2d_1(z-\bar{x}_1^1)\left[1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_1^1)\right]-\alpha c-2\alpha d_1 G(z-\bar{x}_1)$$

$$=2d_1(\gamma^*+\mu-\bar{x}_1^1)-\alpha c+2\alpha d_1\sigma\int_{-\infty}^{(\gamma^*-\bar{x}_1^1)/\sigma}\Phi^*(b^*)db^* \tag{71}$$

ここに，

$\Phi^*(\dfrac{b-\mu}{\sigma})=\Phi(b),\ \sigma\phi(\sigma b^*+\mu)=\phi^*(b^*),\ b^*=\dfrac{b-\mu}{\sigma}$，$\gamma^*=z-\mu,\ \Phi^*(z),\ \phi^*(z)$ は標準正規分布，密度関数である。

また，

$F_1^{1\prime}(\bar{x}_1^1)=-\alpha c<0,\ F_1^{1\prime}(R_1)>0,\ F_1^{1\prime\prime}(z)=2d_1+2\alpha d_1\Phi(z-\bar{x}_1^1)>0$

となるから，$F_1^{1\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_2^1$ をもち，$\bar{x}_1^1<\bar{x}_2^1<R_1$

$F_1^{1\prime}(z)=0$ より $\bar{x}_2^1$ を解析的に求めることができないので，数値解法を利用する。パラメータ d_1,α,c を与え $\gamma^*/\sigma(\equiv m)$ を求め，$\bar{x}_2^1=\mu+\gamma^*=\mu+m\sigma$ として $\bar{x}_2^1$ を求める。

$\boldsymbol{k=3}$　$(H_1'(R_1)>0,\ F_1^{1\prime}(R_1)>0,\ F_2^{1\prime}(R_1)>0)$

このとき，

$$F_2^{1\prime}(z)=\left[2d_1(z-\bar{x}_1^1)-\alpha c\right]\left[1+\alpha\Phi(z-\bar{x}_2^1)\right]-2\alpha d_1 G(z-\bar{x}_2^1)$$

$$-\alpha\left[2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c\right]\Phi(z-\bar{x}_2^1)+2\alpha^2 d_1\Phi^*(z-\bar{x}_2^1,\ z-\bar{x}_1^1)$$

$$=2d_1(\gamma^*+\mu-\bar{x}_1^1)-\alpha c-\alpha\left[2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)\right]\Phi^*\left(\frac{\gamma^*}{\sigma}-\frac{\bar{x}_2^1}{\sigma}\right)$$

$$+2\alpha d_1\sigma\int_{-\infty}^{(\gamma^*-\bar{x}_2^1)/\sigma}\Phi^*(b^*)db^*$$

$$+2\alpha^2 d_1\sigma\int_{-\infty}^{(\gamma^*-\bar{x}_2^1)/\sigma}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*}{\sigma}-\frac{\bar{x}_1^1+\mu}{\sigma}-b^*\right)\Phi^*(b^*)db^* \tag{72}$$

また，

$F_2^{1\prime}(\bar{x}_2^1)=2d_1(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)-\alpha c<0,\ F_2^{1\prime}(R_1)>0,\ F_2^{1\prime\prime}(z)>0$

より $F_2^{1\prime}(z)=0$ は唯一の正根 $\bar{x}_3^1$ をもち，$\bar{x}_2^1<\bar{x}_3^1<R_1$ である。

$F_2^{1\prime}(z)=0$ より $\bar{x}_3^1$ を解析的に求めることができないので，数値解法を利用し，パラメータ d_1,α,c を与えて $\gamma^*/\sigma(\equiv m)$ を求め，$\bar{x}_3^1=\mu+\gamma^*=\mu+m\sigma$ として $\bar{x}_3^1$ を求める。

具体例 2 の場合

$\boldsymbol{k=2}$　$(H_1'(R_1)>0,\ F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0)$

このとき，$\Phi(z)$, $G(z)$, $\Phi_2(z)$ を式(14)に代入して

$$F_1^{2\prime}(z)=\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}\left[1+\alpha\Phi(z-R_1)\right]-\alpha c+\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{-2(z-\bar{x}_1^1)\left[(z-R_1)\Phi(z-R_1)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{-\infty}^{z-R_1}\Phi(b)db\right]+(z-R_1)^2\Phi(z-R_1)-2\int_{-\infty}^{z-R_1}b\Phi(b)db\right\}$$

$$+2\alpha d_1\left\{(z-\bar{x}_1^1)\left[\Phi(z-\bar{x}_1^1)-\Phi(z-R_1)\right]-\left[(z-\bar{x}_1^1)\Phi(z-\bar{x}_1^1)-\int_{-\infty}^{z-\bar{x}_1^1}\Phi(b)\,db\right.\right.$$

$$\left.\left.-(z-R_1)\Phi(z-R_1)+\int_{-\infty}^{z-R_1}\Phi(b)db\right]\right\}$$

$$=\frac{2(\gamma^*+\mu_1-\bar{x}_1^1)^2d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}-\alpha c+2\alpha d_1\left\{\frac{2(\gamma^*-\bar{x}_1^1)\sigma}{R_1-\bar{x}_1^1}\int_{-\infty}^{\frac{(\gamma^*-R_1)}{\sigma}}\Phi^*(b^*)db^*\right.$$

$$\left.+\sigma\int_{\frac{(\gamma^*-R_1)}{\sigma}}^{\frac{(\gamma^*-\bar{x}_1^1)}{\sigma}}\Phi^*(b^*)db^*-\frac{2\sigma^2}{R_1-\bar{x}_1^1}\int_{-\infty}^{\frac{(\gamma^*-R_1)}{\sigma}}b^*\Phi^*(\mathrm{b}^*)db^*\right\}\tag{73}$$

$$F_1^{2\prime}(R_1)=F_1^{1\prime}(R_1)\leq 0\quad \lim_{z\to\infty}F_1^{2\prime}(z)>0,\ F_1^{2\prime\prime}(z)>0\quad z>R_1$$

となるから，$F_1^{2\prime}(z)=0$ は $z>R_1$ に対して唯一の正根 $\bar{x}_2^2$ をもち，$\bar{x}_2^2>R_1$

$F_1^{2\prime}(z)=0$ より $\bar{x}_2^2$ を解析的に求めることができないので数値解法を利用する。パラメータ d_1, α, c, R_1 を与えて $\gamma^*/\sigma\,(\equiv m)$ を求め $\bar{x}_2^2=\mu+\gamma^*=\mu+m\sigma$ として $\bar{x}_2^2$ を求める。

$\boldsymbol{k=3}$　$(H_1'(R_1)>0,\ F_1^{1\prime}(R_1)>0,\ F_2^{1\prime}(R_1)\leq 0)$

このとき，

$$\frac{2d_1(z-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{1+\alpha\Phi(z-R_1)+\alpha^2\Phi_0^*(z-R_1,z-R_1)\right\}$$

$$=\frac{2d_1(\gamma^*+\mu-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{1+\alpha\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}\right)\right.$$

$$\left.+\alpha^2\sigma\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-(\mu+R_1)}{\sigma}-b^*\right)\Phi^*(b^*)db^*\right\}$$

$$\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{-2(z-\bar{x}_1^1)G(z-R_1)+\Phi_2(z-R_1)\right\}$$

$$=\frac{2\alpha d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{(\gamma^*+\mu-R_1)(-\gamma^*-\mu-R_1+2\bar{x}_1^1)\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}\right)\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}2\sigma\left[\gamma^*-\bar{x}_1^1-\sigma b^*\right]\Phi^*(b^*)db^*\right.$$

$$\frac{4\alpha^2 d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{-2(z-\bar{x}_1^1)\Phi_1^*(z-R_1,z-R_1)+\Phi_2^*(z-R_1,z-R_1)+G_1^*(z-R_1,z-R_1)\right\}$$

$$=\frac{4\alpha^2 d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{-2(\gamma^*+\mu-\bar{x}_1^1)\left[\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}(\sigma b^*+\mu)\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-R_1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^*\right]\right.$$

$$+\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}(\sigma b^*+u)^2\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-R_1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^*$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}(\sigma b^*+\mu)G(\gamma^*-R_1-\sigma b^*)\phi^*(b^*)db^*\right\}$$

$$2\alpha d_1\left\{(z-\bar{x}_1^1)\left[(\Phi(z-\bar{x}_2^1)-\Phi(z-R_1))+\alpha(\Phi^*(z-\bar{x}_2^1,z-\bar{x}_1^1)-\Phi^*(z-R_1,z-R_1))\right]\right.$$

$$+G(z-R_1)-G(z-\bar{x}_2^1)+\alpha\left[2\Phi_1^*(z-R_1,z-R_1)-\Phi_1^*(z-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)\right.$$

$$\left.\left.-\Phi_1^*(z-\bar{x}_2^1,z-\bar{x}_1^1)-G(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1)\Phi(z-\bar{x}_2^1)+\Phi_1^*(\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1,z-\bar{x}_1^1)\right]\right\}$$

$$=2\alpha d_1\left\{(\gamma^*+\mu-\bar{x}_1^1)\left[\int_{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}^{\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^1}{\sigma}}\phi^*(b^*)db^*\right.\right.$$

$$+\alpha\left[\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^1}{\sigma}}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-\bar{x}_1^1}{\sigma}-b^*\right)\Phi^*(b^*)db*\right.$$

$$\left.\left.-\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-R_1}{\sigma}-b^*\right)\Phi^*(b^*)db^*\right]\right]-\int_{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}^{\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^1}{\sigma}}(\sigma b^*+\mu)\,\phi^*(b^*)db^*$$

$$+\alpha\left[2\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}(\sigma b^*+u)\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-u-R_1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^*\right.$$

$$-\int_{\frac{\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-u}{\sigma}}^{\frac{\gamma^*-\bar{x}_1^1}{\sigma}}(\sigma b^*+\mu)\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-\bar{x}_1^1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^*$$

$$-\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^1}{\sigma}}(\sigma b^*+\mu)\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-\bar{x}_1^1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^*$$

$$\left.\left.-\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^1}{\sigma}\right)\int_{-\infty}^{\frac{\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-\mu}{\sigma}}(\sigma b^*+\mu)\phi^*(b^*)db^*\right]\right\}$$

となるから，式(22)に代入し，整理すると，

$$F_2^{2\prime}(z)=\frac{2d_1(\gamma^*+\mu-\bar{x}_1^1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{1+\alpha\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}\right)\right.$$

$$\left.+\alpha^2\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-R_1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^*\right\}-\alpha c\left\{1+\alpha\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^1}{\sigma}\right)\right\}$$

$$+2\alpha d_1\left\{\frac{(\gamma^*+\mu-R_1)^2}{R_1-\bar{x}_1^1}+\gamma^*+2\mu+\bar{x}_1^1-2R_1\right\}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}\right)$$

$$+2\alpha d_1(\gamma^*+\mu-\bar{x}_1^1)\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^2}{\sigma}\right)-2\alpha^2 d_1\left\{\sigma\left[G^*\left(\frac{\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-\mu}{\sigma}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\mu\left[\frac{1}{\alpha}+\Phi^*\left(\frac{\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^1}{\sigma}\right)$$

$$-\frac{4\alpha d_1\sigma}{R_1-\bar{x}_1^1}\left\{(\gamma^*-\bar{x}_1^1)\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}\Phi^*(b^*)db^*-\sigma\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}b^*\Phi^*(b^*)db^*\right\}$$

$$+4\alpha^2\sigma d_1\left\{1-\frac{2(\gamma^*-\bar{x}_1^1)}{R_1-\bar{x}_1^1}\right\}\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}b^*\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-R_1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^*$$

$$+\frac{4\alpha^2 d_1\mu}{R_1-\bar{x}_1^1}\left[-2(\gamma^*-R_1)-(R_1+\mu_1-\bar{x}_1^1)\right]\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-R_1}{\sigma}-b^*\right)$$

$$\left.\cdot\phi^*(b^*)db^*+2\alpha^2 d_1(\gamma^*+\mu-\bar{x}_1^1)\left\{\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^1}{\sigma}}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-\bar{x}_1^1}{\sigma}-b^*\right)\Phi^*(b^*)db^*\right.\right.$$

$$
\left. -\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}} \Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-R_1}{\sigma}-b^*\right)\Phi^*(b^*)db^* \right\}
$$

$$
+\frac{4\alpha^2\sigma^2 d_1}{R_1-\bar{x}_1^1}\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}} b^{*2}\Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-R_1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^*
$$

$$
+\frac{4\alpha^2 d_1\sigma}{R_1-\bar{x}_1^1}\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_*}{\sigma}} b^* G(\gamma^*-R_1-\sigma b^*)\phi(b^*)db^*
$$

$$
+\frac{4\alpha^2 d_1\mu}{R_1-\bar{x}_1^1}\int_{-\infty}^{\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}} G(\gamma^*-R_1-\sigma b^*)\phi(b^*)db^*
$$

$$
+2\alpha d_1\sigma\left\{G^*\left(\frac{\gamma^*-R_1}{\sigma}\right)-G^*\left(\frac{\gamma^*-\bar{x}_2^1}{\sigma}\right)\right\}
$$

$$
-2\alpha^2 d_1\sigma\int_{\frac{\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-\mu}{\sigma}}^{\frac{\gamma^*-\bar{x}_1^1}{\sigma}} b^*\Phi\left(\frac{\gamma^*-\mu-\bar{x}_1^1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^*
$$

$$
-2\alpha^2 d_1\mu\int_{\frac{\bar{x}_2^1-\bar{x}_1^1-\mu}{\sigma}}^{\frac{\gamma^*-\bar{x}_1^1}{\sigma}} \Phi^*\left(\frac{\gamma^*-\mu-\bar{x}_1^1}{\sigma}-b^*\right)\phi^*(b^*)db^* \tag{74}
$$

ここに

$$
G^*(z)=\int_{-\infty}^{z} x\phi^*(x)dx
$$

む　す　び

区分的費用関数をもつ動的在庫モデルにおいては段階数 (N) が大きくなると，検討すべき場合の数が飛躍的に増大するので，費用関数，パラメータの間の関係を調べることによって，検討すべき場合の数を減少させることを試みた。

最適政策を求める手順が簡単となるための費用関数とパラメータの間の関係を検討し，具体例によって確認した。特殊な場合を除いて解析解を求めることが不可能で，数値解法を利用する。多くの具体例について検証することは今後の課題である。

参 考 文 献

1) Kabak, I. W.: "Partial Returns in the Single Period Inventory Model," IE News. **19**(2). 1984. pp. 1–3.
2) 徂徠三十六，有薗育生，大田　宏「返却および追加注文を許す一期間モデルの解法」日本経営工学会誌　**37**(2), 1986, pp. 100–105.
3) 児玉正憲，北原貞輔：「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究。**47**(5–6)，九州大学経済学会，1983，pp. 49–72.
4) 児玉正憲：「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究。**51**(5)，九州大学経済学会，1986，pp. 35–44.
5) 児玉正憲：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅰ）」経済学研究　**55**(6)，九州大学経済学会，1990，pp. 31–48.
6) 児玉正憲：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅱ）」経済学研究　**56**(2)，九州大学経済学会，1990，pp. 277–293.
7) 児玉正憲：「ある非凸期待費用関数の最適政策（Ⅰ）」経済学研究，**57**(2)，九州大学経済学会，1991，pp. 1–26.
8) 児玉正憲：「ある確率的システムの最適政策（Ⅰ）」経済学研究，**58**(2)，九州大学経済学会，1992，pp. 35–50.
9) 児玉正憲：「ある非凸期待費用関数の最適政策（Ⅱ）」経済学研究，**57**(3–4)，九州大学経済学会，1991，pp. 175–198.
10) 児玉正憲：「ある確率的システムの最適政策（Ⅱ）」経済学研究，**58**(3)，九州大学経済学会，1993，pp. 17–27.
11) 児玉正憲：「Some Probabilistic Inentory Problems with Various Demand Pattern, Journal of Information & Optimization Science, **17**(1)，1996，pp. 17–48.
12) 児玉正憲：「区分的費用関数をもつ動的在庫モデル（Ⅰ）」経済科学研究，第１巻第１・２合併号，広島修道大学経済科学会，1998，pp. 99–122.
13) 児玉正憲：「区分的費用関数をもつ動的在庫モデル（Ⅱ）」経済科学研究，第２巻第１号，広島修道大学経済科学会，1998, pp. 33–60.
14) 児玉正憲・坂口通則：「区分的費用関数をもつ動的在庫モデルの最適政策（Ⅰ）」経済科学研究，第２巻第２号，広島修道大学経済科学会，1999，pp. 143–150.