内生的成長モデルの理論構造

片　山　尚　平

（受付　1999年11月1日）

1. は　じ　め　に

世界の国々を眺めてみると，大きな国際間の所得および成長率の格差が我々の目にとまる。日本やアメリカの人々は高所得を得て，豊かな生活を享受している。一方，アフリカや南アジアの人々の所得は低く，彼らの生活は貧しい。このような所得格差は，産業革命の波に乗って成長ができた国と，取り残された国ができた結果であるといわれる。

代表的な新古典派成長モデルであるソロー・モデルでは，このような長期的な所得格差は貯蓄率と人口成長率の相違によって説明される。すなわち，貯蓄率が高いほど一人あたり所得は大きくなるし，人口成長率が高いほど一人あたり所得は低くなる。ソロー・モデルは現代の世界経済の発展過程を説明する有力な理論であるが，そのモデルを巡って三つの問題点が指摘されている。

第一の問題点は理論面に関わるもので，ソロー・モデルが経済成長の原動力である技術進歩を説明していないという点である。一人あたり所得の持続的上昇は技術進歩によってもたらされるが，ソロー・モデルでは，技術進歩は外生的に与えられたものとみなされている。経済成長の「エンジン」ともいわれる技術進歩の決定要因を説明していないということは，ソロー・モデルの問題点の一つである。

第二の問題点は，世界経済を観察することから生じた「収束」を巡る問題である。ソロー・モデルでは，一人あたり資本ストックが小さいほど，その成長率は高く，また，一人あたり所得水準が低いほど，その成長率は高くなる。その結果，低所得国の成長スピードが高所得国の成長スピードを上回ることから，ソロー・モデルは各国の一人あたり所得の「収束」を予測する。しかしながら，観察データはこのような「収束」を示唆していないようである。特に低所得国において，一人あたり所得とその成長率との関係は拡散している。

第三の問題点は，ソロー・モデルが予測する資本の限界生産物格差の現実妥当性に関わっている。ソロー・モデルにおいて，コブ・ダグラス型生産関数のもとで，例えば所得に対する資本のシェアー＝1/3 を想定すると，一人あたり所得の 5 倍の格差は25倍の利子率格差を生み出す。しかしながら，現実には，このように大きな国際的な利子率の格差は見られない。よって，資本移動による利子率格差の縮小効果を考慮したとしても，ソロー・モデルが予測

する利子率の格差は過大であると考えられる。

以上のようなソロー・モデルが抱える問題点を考慮して，1980年代後半以降，新しい成長モデルが開発され，展開された。新しい成長モデルは，一人あたり所得の成長率すなわち技術進歩率が外生的に与えられるのではなく，モデルの中で内生的に決定されるという特徴を持つことから，この成長モデルは内生的成長モデルと呼ばれる。以下では，内生的成長モデルを，人的資本，R & D にもとづく場合を中心に比較・検討し，その政策的インプリケーション指摘し，そして評価を行なってみたい。

2.　*AK* モデル

成長の源泉を外生的な技術進歩に求めないという内生的成長理論の主旨にしたがって，外生的技術進歩率はゼロと仮定され，そして単純化のために人口成長率と固定資本の減耗率もゼロと仮定される。このような仮定のもとで，ソロー・モデルでは，経済成長の過程で，すなわち資本深化の過程で資本に対する収穫逓減が生じる。その結果，経済はやがて投資水準が臨界的投資水準に等しくなり，経済成長が止み，一人あたり資本ストックおよび一人あたり産出水準が一定となる定常状態に到達する。ソロー・モデルにおいて，持続的成長が生じないのは，資本に対する収穫逓減が存在しているからである。

さて，生産関数が所得に対する資本シェアー $\alpha=1$ をもつコブ・ダグラス型であるとき，生産関数は

$$y = Ak \tag{1}$$

と表されるので，この生産関数のもとで現われるもっとも単純な内生的成長モデルは AK モデルと呼ばれる[1)]。ここで，y，A と k は，それぞれ一人あたり産出水準，技術水準を示すパラメーターと一人あたり資本ストックの水準を表している。

社会計画者は，制約条件

$$\dot{k} = Ak - c \tag{2}$$

のもとで，個人の動学的な効用 u

$$u = \int_0^\infty e^{-\rho t}\{(c^{1-\sigma}-1)/(1-\sigma)\}dt \tag{3}$$

の最大化を目指す。ここで，$(\dot{\ })$ は当該変数の時間微分を示し，c は一人あたり消費水準を表している。また，ρ は（主観的）割引率を表し，σ は限界効用の消費に対する弾力性，（相対的）危険回避度係数である。このとき，社会計画者のハミルトニアン $\hat{H}$ は

1)　Rebelo（1991）がこのモデルの初期の説明を行なっている。内生的成長理論の全体については，Sala-i-Martin（1990），Barro and Sala-i-Martin（1995）や Jones（1998）を参考にした。

$$\hat{H} = c^{1-\sigma} / (1-\sigma) + q(Ak - c) \tag{4}$$

で表される。最大化のための条件は

$$c^{-\sigma} = q \tag{5}$$

$$\dot{q} = \rho q - qA \tag{6}$$

である。(5)の対数を時間 t で微分したものを(6)に代入し $\dot{q}/q$ を消去すると

$$\dot{c} / c = (A - \rho) / \sigma \tag{7}$$

が得られる。一人あたり消費 c の成長率は，モデルの中のパラメーターの値によって決定され，一人あたり資本ストックの水準 k には依存しない。

それでは，y と k の成長率はどうなるであろうか。(1)より，

$$\dot{y} / y = \dot{k} / k \tag{8}$$

であることがわかる。(2)を k でわると，(9)が得られる。

$$\dot{k} / k = A - c / k \tag{9}$$

(8)と(1)を利用すると，(9)から(10)が導かれる。

$$\dot{y} / y = A - A(c / y) \tag{10}$$

(10)において，もし $\dot{y}/y = \dot{c}/c$ であるならば，そのとき c/y は一定となり，それ故 $\dot{y}/y$ は一定となるだろう。もし $\dot{y}/y > \dot{c}/c$ であるならば，そのとき $\dot{y}$ は増加し，c/y は低下し続ける。c/y がゼロに近づく経路は，明らかに最適経路ではないだろう。同様に，もし $\dot{y}/y < \dot{c}/c$ であるならば，c/y は増加し続けるだろう。c/y はやがて1を超えるであろうが，このような経路は実現可能ではない。したがって，

$$\dot{y} / y = \dot{c} / c (= \dot{k} / k) \tag{11}$$

である。

(1)より，資本の限界生産物は A で常に一定であり収穫逓減が生じないため，投資が臨界的投資を常に上回り，それで資本深化が永遠に続き，経済は持続的成長を遂げる。また，利子率 r は次式で表されるので，

$$r = A \tag{12}$$

同じパラメーター A を持つ国々の間では利子率の格差は生じない。(7)において，同じパラメーターを持つ国々は同率で成長し，各国間の所得比は永遠に同じである。他方，異なるパラメーターを持つ二国は永遠に異なる率で成長し，長期においては二国は大きく乖離するだろう。

尚，AK モデルにおいて，資本に関する外部性は存在しないので，家計および企業の行動にもとづく分権的経済から得られる成長率に関する解は(7)の解と同じである。ただし，なぜ生産関数が Ak であるのか，そして $\alpha = 1$ を持つこのタイプのモデルが産出の資本シェアーが約1/3であるという現実と調和するであろうかといった疑問が人々に残るだろう。

3. 経験を通じた学習と政府支出にもとづくモデル

3-1 経験を通じた学習（learning by doing）にもとづくモデル

このモデルは,「知識の創造は投資の副産物である」と考え，資本に対する収穫逓減傾向を消去する[2)]。

以下のようなコブ・ダグラス型の生産関数(13)を想定してみよう。

$$Y = BK^{\alpha}L^{\beta} \tag{13}$$

ここで，B, K と L は，それぞれ技術の状態，資本ストックと労働を表している。そして，B が資本ストックの関数(14)

$$B = Ak^{\gamma} \tag{14}$$

で表されるものとしよう。ここで，A はある定数であり，k は K/L を示している。この式は，過去においてなされた投資がその経済の生産全体についての新しい知識を生み出すことを仮定している。すなわち，資本の蓄積に伴う偶発的副産物として，諸企業の生産技術の改良がもたらされるのである。しかし，個別企業は，経済全体に対して相対的に小さいため，資本を蓄積するときこの効果に気づかないであろう。よって，個別企業は B の水準を所与とみなすであろう。

(14)を(13)に代入し，L で割ると，次式が得られる。

$$y = Ak^{\gamma}k^{\alpha} \tag{15}$$

もし $\alpha+\gamma=1$ であれば，我々は再び AK モデルを持つことになる。

このモデルにおいて，技術進歩は企業にとって外部的であり，技術進歩の外部性が想定されている。一般に，外部性が存在し，個人や企業が意志決定の際に外部性を考慮しなければ，競争均衡は効率的でなくなる。このケースでは，企業は Ak^{γ} を一定と考え，資本の限界生産物を次式のように認識している。

$$\text{限界生産物（企業）} = \alpha Ak^{\alpha-1}k^{\gamma} = \alpha Ak^{\alpha+\gamma-1} \tag{16}$$

一方，社会計画者は資本の外部性を考慮し，資本の限界生産物を

$$\text{限界生産物(社会計画者)} = (\alpha+\gamma)\,k^{\alpha+\gamma-1} \tag{17}$$

のようにみなす。

したがって，競争均衡においては，資本への過小投資および最適な場合よりも低い成長が存在するであろう。

---

2) learning by doing のアイデアは，Arrow（1965）に遡る。

3-2 政府支出にもとづくモデル

この成長モデルは，成長を財政変数に関係させる[3]。政府支出 G は公共財を意味し，諸企業は，生産において非競合的（nonrival）かつ非排除可能な（nonexcludable）形で G を利用する。

二つの投入要素に対して規模に関する収穫不変のもとで，生産関数が(18)のように書かれる。

$$y = \Phi(k, g) = k\phi(g / k) \tag{18}$$

ここで，ϕ は通常の条件，$\phi' > 0$ と $\phi'' < 0$ を満たす。g は，一人あたり政府支出である。一人あたり産出 y は，一人あたり資本ストック k と一人あたり政府支出 g に依存する。また，g/k が一定であれば，この生産関数は Ak に帰着し，資本の限界生産性は不変である。(18)を書き換え，コブ・ダグラス型の生産関数，$y = Ag^{\alpha}k^{\beta}$ を想定すると

$$y / k = \phi(g / k) = A \cdot (g / k)^{\alpha} \tag{19}$$

導かれる。ここで，$0 < \alpha < 1$である。資本の平均生産性は，資本単位あたり政府支出の増加関数である。

政府は所得に対して比例所得税を課し，政府支出はこの比例税によって賄われる。

$$g = T = \tau y = \tau \cdot k \cdot \phi(g / k) \tag{20}$$

ここで，T と τ は，それぞれ一人あたり政府収入と税率を表している。個人や企業は，g を所与として想定している。

そのとき生産関数(18)は，資本の限界生産物が

$$\partial y / \partial k = \phi(g / k)\{(1 - \phi'(g / y)\} = \phi(g / k) \cdot (1 - \eta) \tag{21}$$

であることを意味する。η は（一定の k に対する）g に関する y の弾力性である。その結果，$0 < \eta < 1$ である。先のコブ・ダグラス型生産関数の場合は，η は α で表される。

比例所得税が存在するときの資本に対する私的な限界収益は

$$(1 - \tau) \cdot (\partial y / \partial k) \tag{22}$$

である。ただし，$\partial y/\partial k$ は，(21)で与えられる。その結果，消費の成長率は

$$\dot{c} / c = (1 / \sigma)\{(1 - \tau) \cdot \phi(g / k) \cdot (1 - \eta) - \rho\} \tag{23}$$

となる。したがって $g/y\,(=\tau)$ が一定であるかぎり，すなわち政府が g と T を y と同率で成長するように設定する限り，k/g は一定となる。これは(18)を g で割ることによって明らかとなる。それ故，資本の限界生産性が一定となり，消費の成長率は一定となるであろう。結局，このモデルは AK タイプのモデルとなり，その動学も AK モデルと同じになり，移行動学は存在せず，c，k，y，g と T はすべて同率で成長するだろう。

---

3) 以下でのモデルの説明は，Barro（1990）を参考にした。

一方，社会計画者は，生産関数(18)のもとで資本蓄積式を制約条件として，消費者の効用(3)を最大化する。g/y を所与としてこの問題を解くと，消費の成長率は

$$\dot{c}/c=(1/\sigma)\{(1-g/y)\phi(g/k)-\rho\}$$

となる。均斉成長均衡のもとでは，g，y と k もこの率で成長する。

この成長率はどの $\tau(=g/y)$ に対しても，分権経済の成長率(23)を上回る。というのは，社会計画者は公共支出および課税がもたらす外部性を認識し，資本について私的な限界収益でなく，それより大きい社会的限界収益を考慮するからである。

4. 人的資本にもとづくモデル

このモデルは，長期的な成長の主な源泉を人的資本の蓄積に求め，人的資本を育てることで成長を促すことの大切さを強調する[4)]。例えば，ルーカスは世界の国々の過去の経済発展の歴史をふまえて，物理的な資本蓄積によっては成長を持続できず，人的資本の蓄積があって持続的成長が可能となる，という認識を持っている。

また，賃金のうちかなりの部分が，生の労働に対する報酬というよりもむしろ人的資本に対する報酬であるとみなされ，よって所得のなかの資本のシェアーが 1/3 であるのは誤りとされる。

以下では，ルーカス（1988）にしたがって，人的資本にもとづく内生的成長理論を考察しよう。このモデルは，ソロー等の新古典派成長モデルを，人的資本の蓄積を含むように改良したものである。したがって，新古典派成長モデルの他の特性は残して，モデルに人的資本を付加する。

まず，次のような生産関数が想定される。

$$Y=AK^{\alpha}(uhL)^{1-\alpha}h^{\gamma} \tag{24}$$

ここで，u は，効率労働量のうち，財・サービスの生産に向けられる比率である。h は，人的資本の平均水準，すなわち一人あたりの人的資本の水準である。h^{γ} は，人的資本の蓄積の外部効果を意味する。個々の人的資本の蓄積は人的資本の平均水準を向上させ，全生産要素の生産性の上昇に寄与する。しかし，個々の人的資本の蓄積は全体に対しては微小なので，各人は彼の時間配分を決定するときその外部効果を考慮しないだろう。

この生産関数のもとで，生産物市場の均衡は(25)で示され，

$$Lc+\dot{K}=AK^{\alpha}(uhL)^{1-\alpha}h^{\gamma} \tag{25}$$

この式の両辺を L で割り，整理すると，一人あたり表示の資本蓄積方程式

4) 成長理論への人的資本導入のアイデアは，Uzawa（1965）に遡る。

$$\dot{k} = Ak^{\alpha}u^{1-\alpha}h^{1-\alpha}h^{\gamma} - c \tag{26}$$

が得られる。

人的資本 h は次式にしたがって，蓄積される。

$$\dot{h} = h\delta(1-u) \tag{27}$$

ここで，δ はある正の定数を意味し，$1-u$ は人的資本の蓄積に向けられる努力を表している。h に対する収穫逓減は，存在しない。すなわち，ある一定の h の増加率は，すでに到達された h の水準にかかわらず，同じ努力を要求する。

最適問題のためのハミルトニアン $\hat{H}$ は，(28)で表される。

$$\hat{H} = (c^{1-\sigma} - 1)/(1-\sigma) + q_1(Ak^{\alpha}u^{1-\alpha}h^{1-\alpha}h^{\gamma} - c) + q_2\{\delta h(1-u)\} \tag{28}$$

$\hat{H}$ を最大化するように，c と u が選択される。この問題に対して，(29)－(32)の条件が導かれる。

$$c^{-\sigma} - q_1 = 0 \tag{29}$$

$$q_1(1-\alpha)Ak^{\alpha}u^{-\alpha}h^{1-\alpha}h^{\gamma} - q_2\delta h = 0 \tag{30}$$

$$\dot{q}_1 = \rho q_1 - q_1\alpha Ak^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h^{1-\alpha}h^{\gamma} \tag{31}$$

$$\dot{q}_2 = \rho q_2 - q_1(1-\alpha)Ak^{\alpha}u^{1-\alpha}h^{-\alpha+\gamma} - q_2\delta(1-u) \tag{32}$$

(29)と(31)から，次式が導かれる。

$$-\sigma\hat{c} = \rho - \alpha Ak^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h^{1-\alpha}h^{\gamma} \tag{33}$$

ここで，(^) は，当該変数の増加率を表す。また，(27)より導かれる

$$\hat{h} = \delta(1-u) \tag{34}$$

を考慮して，定常状態において(33)の対数微分を行ない，整理すると

$$\hat{k} = \{(1-\alpha+\gamma)/(1-\alpha)\}\hat{h} \tag{35}$$

が得られる。ここで，$\hat{k}$ は一人あたり資本と一人あたり消費の共通の成長率を表している。

次に，(29)の対数をとって微分した結果を(30)の対数をとって微分した結果に代入すると，次式が得られる。

$$\hat{q}_2 = (\alpha-\sigma)\hat{k} - (\alpha-\gamma)\hat{h} \tag{36}$$

また，(30)の q_1 を(32)に代入して整理すると

$$\hat{q}_2 = \rho - \delta \tag{37}$$

が導出される。(36)と(37)より $\hat{q}_2$ を消去し，(35)を使用して整理すると

$$\hat{h} = \{\sigma(1-\alpha+\gamma) - \gamma\}^{-1}\{(1-\alpha)(\delta-\rho)\} \tag{38}$$

が得られる。この内生的に決定された $\hat{h}$ は，新古典派成長モデルにおける外生的技術進歩率に対応し，(35)をつうじて $\hat{k}$ あるいは $\hat{c}$ を決定する。

次に，社会計画者の最適問題を考察する。社会計画者は人的資本の外部性を考慮するので，(32)が(39)に置きかわる。

$$\dot{q}_2 = \rho q_2 - q_1(1-\alpha+\gamma)Ak^{\alpha}u^{1-\alpha}h^{-\alpha+\gamma} - q_2\delta(1-u) \tag{39}$$

(30)の q_1 を(39)に代入して整理すると

$$\hat{q}_2 = \rho - \{(1-\alpha+\gamma)/(1-\alpha)\}\delta u - \delta(1-u) \tag{40}$$

が導かれる。(36)と(40)より $\hat{q}_2$ を消去し，(34)の関係を利用し，整理すると

$$\hat{h} = \sigma^{-1}[\delta - \{(1-\alpha)/(1-\alpha+\gamma)\}\rho] \tag{41}$$

が得られる。

方程式（38)と(41)は，それぞれ，定常状態における人的資本の競争的均衡成長率と効率的な均衡成長率を表す。いずれのケースでも，人的資本投資の有効性 δ にともなってこの成長率は上昇し，割引率 ρ の増加とともに低下する。このモデルは，外部効果が正でなく，ゼロであったとしても持続的成長を誘発する。

5. R & D にもとづくモデル

この成長モデルは，経済成長の重要なエンジンとして，R & D を強調する。そしてR & Dの導入をつうじて新古典派成長モデルが拡張される。研究開発部門で行なわれる資本財の種類の拡張が技術進歩を表し，技術進歩が経済的要因によって内生的に説明される。以下では，ローマー（1990）にしたがって，R & D にもとづく内生的成長モデルを考察しよう。

モデルは，研究開発部門，資本財部門と最終財部門の三部門から構成される。研究開発部門は，人的資本 H と技術知識のストック A を使って新しい技術知識（資本財の設計図）A を生産する。資本財部門は A と最終財の一部を使って資本財を生産する。最終財部門は，資本，人的資本と労働 L を使って最終財を生産する。尚，人的資本と労働は一定であると仮定される。

5-1　最終財の生産

最終財の生産関数は，次式で表される。

$$Y = H_Y^{\alpha}L^{\beta}\int_0^{\infty}x(i)^{1-\alpha-\beta}\,di \tag{42}$$

ここで，$x(i)$ は i 番目の資本財を意味し，H_Y は最終財部門に投入される人的資本を表す。この部門の代表的企業が直面する問題は，最終財価格を 1 として

$$\max.\int_0^{\infty}\{H_Y^{\alpha}L^{\beta}x(i)^{1-\alpha-\beta} - p(i)x(i)\}\,di \tag{43}$$

である。ここで $p(i)$ は第 i 資本財のレンタル価格である。積分符号のもとで微分すると，逆需要関数(44)が導かれる。

$$p(i)=(1-\alpha-\beta)H_Y^{\alpha}L^{\beta}x(i)^{-\alpha-\beta} \tag{44}$$

5-2　新しい技術知識の生産

研究者 j による新デザインの生産は，次式にしたがって行なわれ，

$$\dot{A}_j=\delta H^j A^j \tag{45}$$

集計された新デザインの生産は，(46)をつうじて行なわれる。

$$\dot{A}=\delta H_A A \tag{46}$$

ここで，δ は，正のある定数である。新デザインを生み出す要因は，研究開発部門に投入される人的資本 H_A とデザインのストック A である。そして，技術知識（デザイン）の増加率は，この人的資本の量に比例する。

5-3　資本財部門の生産

資本財部門において，1単位の資本財を作るのに η 単位の最終財が必要とされる。この部門の企業の利潤は，レンタル収入－可変費用である。したがって，代表的企業にとっての問題は，次式で表される。

$$\begin{aligned}&\max.\,p(x)x-r\eta x\\&=\max.(1-\alpha-\beta)H_Y^{\alpha}L^{\beta}x^{1-\alpha-\beta}-r\eta x\end{aligned} \tag{47}$$

x での微分の結果，独占価格は，限界費用のマークアップとなる。

$$\bar{p}=r\eta/(1-\alpha-\beta) \tag{48}$$

その結果，独占利潤は，次式で与えられる。

$$\pi=(\alpha+\beta)\bar{p}\,\bar{x} \tag{49}$$

尚，$\bar{p}$ と $\bar{x}$ は，それぞれ，すべての資本財に共通の価格と数量である。また，$\bar{p}$ と $\bar{x}$ は，(44)の関係を満たしている。

デザインの価格 P_A は，それを用いる独占者が将来にわたって得る純収入の現在価値に等しくなる。均衡では P_A は一定であり，(50)が成立する。

$$\pi=rP_A \tag{50}$$

5-4　消費の動向

消費者は効用の最大化を図り，その最大化問題は次式で与えられる。

$$\max.\int_0^{\infty}U(C)\,e^{-\rho t}dt \tag{51}$$

固定利子率に直面する消費者の時間を通じた最適条件は，通常のように

$$\dot{C}/C=(r-\rho)/\sigma \tag{52}$$

である。

さて，資本財を1単位生産するのに η 単位の K が必要である。よって，

$$K=\eta A\bar{x} \tag{53}$$

が成立する。このとき，最終財の産出Yは，次のようになる。

$$Y=H_Y^{\alpha}L^{\beta}\int_0^{\infty}x(i)^{1-\alpha-\beta}\,di=H_Y^{\alpha}L^{\beta}A\{K/(\eta A)\}^{1-\alpha-\beta}$$

$$=(H_YA)^{\alpha}(LA)^{\beta}K^{1-\alpha-\beta}\eta^{\alpha+\beta-1} \tag{54}$$

それで，均斉成長（balanced growth）経路上では，r，x と K/A は，すべて一定となる。

5-5 均斉成長均衡

デザインの価格 P_A は，(50)，(49)，(44)を利用すると

$$P_A=(1/r)\pi=\{(\alpha+\beta)/r\}\bar{p}\,\bar{x}=\{(\alpha+\beta)/r\}(1-\alpha-\beta)H_Y^{\alpha}L^{\beta}\bar{x}^{1-\alpha-\beta} \tag{55}$$

と表せる。人的資本 H は，その研究開発部門と最終財部門での賃金が等しくなるように，H_A と H_Y に配分される。人的資本の賃金はその限界生産物に等しいので

$$w_H=P_A\delta A=\alpha H_Y^{\alpha-1}L^{\beta}\int_0^{\infty}\bar{x}^{1-\alpha-\beta}\,di=\alpha H_Y^{\alpha-1}L^{\beta}A\bar{x}^{1-\alpha-\beta} \tag{56}$$

が成り立つ。次に，(55)の P_A を(56)に代入して整理すると

$$H_Y=(1/\delta)\cdot[\alpha/\{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\}]\cdot r \tag{57}$$

が得られる。H からこの H_Y を差し引くことによって，H_A が確定する。H，H_Y と H_A はすべて固定している。この H_A の値が(46)をつうじて A の成長率を決定する。

最終財 Y は次のように書き記されるので，

$$Y=H_Y^{\alpha}\,L^{\beta}\int_0^{\infty}\bar{x}^{1-\alpha-\beta}di=H_Y^{\alpha}L^{\beta}A\bar{x}^{1-\alpha-\beta} \tag{58}$$

L，H_Y と $\bar{x}$ が一定ならば，Y は A と同率で成長する。

一定の K/A のもとでは K も A と同率で成長するので，(54)より K/Y は一定である。よって，C/Y も

$$C/Y=1-\dot{K}/Y=1-(\dot{K}/K)\cdot(K/Y) \tag{59}$$

のように書き表わされ，一定となる。

共通の成長率を g とすると，

$$g=\dot{C}/C=\dot{Y}/Y=\dot{K}/K=\dot{A}/A=\delta H_A \tag{60}$$

と表せる。また，H_A が H から H_Y を差し引いたものであることと，(57)から

$$g = \delta H_A = \delta H - [\alpha / \{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\}] \cdot r$$
$$= \delta H - \Lambda r \tag{61}$$

が得られる。ここで，Λ は，大括弧の値を表す。モデルを閉じるために，

$$g = \dot{C} / C = (r-\rho) / \sigma \tag{52}$$

を導入し，これと(61)を使うと，次式が導出される。

$$g = (\delta H - \Lambda\rho) / (\sigma\Lambda + 1) \tag{62}$$

(62)より，割引率 ρ および限界効用の弾力性 σ の低下は，成長率の上昇をもたらす。また，人的資本 H の増加も成長率を上昇させる。経済全体の人的資本の増加は研究開発部門の人的資本 H_A の増加につながり，技術進歩率が引き上げられる。

さて，社会計画者が直面する問題は

$$\max . \int_0^{\infty} \{(C^{1-\sigma} - 1) / (1-\sigma)\} e^{-\rho t} dt$$

である。この問題の制約条件は，以下のように示される。

$$\dot{K} = \eta^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} H_Y^{\alpha} L^{\beta} K^{1-\alpha-\beta} - C,\ \dot{A} = \delta H_A A,\ H_Y + H_A \leq H,\ (K = \eta x A)$$

最適化のための条件から，定常成長率を g として次式が得られる。

$$g = (\delta H - \theta\rho) / \{\theta\sigma + (1-\theta)\} \tag{63}$$

ここで，θ は $\alpha/(\alpha+\beta)$ である。(63)と(62)を比較すると，(62)の分母の 1 が(63)では $1-\theta$ に置きかわっている。社会計画者は研究の外部性を考慮するため，(63)の場合のほうが(62)の場合よりも，研究への人的資本の配分および成長率がより高い。

6. 終わりに

ソロー・モデルに対して，三つの批判が存在する。それらの批判は，外生的な技術進歩，利子率格差と収束の失敗に関係する。

そのような批判を背景として，内生的成長の理論が開発された。内生的成長モデルとは，一人あたり所得の成長率あるいは技術進歩率がモデルの中で内生的に決定され，モデルの中のパラメーターを用いて表されるようなモデルである。内生的成長理論には，AK モデル，経験を通じた学習（learning by doing）にもとづくモデル，政府支出にもとづくモデル，人的資本にもとづくモデルおよび R & D にもとづくモデルがある。

これらのモデルにおいて，資本が深化しても資本の限界生産性が不変である。諸変数が同率で成長する均斉成長（balanced growth）が現われる場合がある。割引率や限界効用の弾力性が増加（減少）すれば，この成長率は低下（上昇）する。

人的資本にもとづくモデルでは，一人あたり産出の成長率を人的資本の増加率が促進する。割引率と限界効用の弾力性の増加は人的資本の増加率を低下させるが，人的資本投資の有効性や人的資本の外部性を表すパラメーターの増加は人的資本の増加率を上昇させる。

R＆Dにもとづくモデルでは，人的資本の成長率への効果が特徴的である。経済全体の人的資本の増加は，研究開発部門の人的資本の増加をもたらし，それをつうじて技術進歩率を上昇させる。いわゆる「規模効果」が作用し，人的資本ストックの規模の拡大が一人あたり所得の上昇を促進する。また，政府のR＆Dへの補助金は，研究開発要員の割合を増加させ，技術進歩率の上昇をもたらす。

内生的成長モデルは，ソロー・モデルの問題点を克服することができるであろうか。技術進歩の発生メカニズムについては，内生的成長モデルをつうじて理論的に説明可能である。収束の問題について，内生的成長モデルでは，成長率は各国のモデル内のパラメーター値に依存するので，一人あたり所得水準とその成長率の間の負の関係は現われない。したがって，内生的成長モデルは，収束を予測しない。利子率の格差は，例えば*AK*モデルでは，技術知識の水準に依存する。技術の普及をつうじて国際間で技術水準に大きな格差が存在しなければ，内生的成長は利子率の大きな格差を予測しない。

しかしながら，内生的成長モデルにおいて，成長率の格差は永遠に縮らず，貧富の格差が永遠に拡大し続けるという非現実的な予測がなされる。また，成長率への規模効果も，成長率とR＆Dに従事する科学者数との間に比例関係が認められないことから，支持されていないようである[5)]。

一方，ソロー・モデルについて，定常状態が同程度である国々の間では収束が観察され，モデルの予測が有効とされる。また，新古典派成長モデルに人的資本を導入すると，モデルの説明力が増すと同時に元のモデルが予測する利子率格差が緩和され，その予測が現実的となる[6)]。しかし，外生的技術進歩を想定する新古典派成長モデルでは，内生的な技術進歩はその対象の範囲外である。よって，技術進歩がなぜ生じるかを説明しようとする点に，内生的成長モデルの最大の意義がみとめられる。

参　考　文　献

Arrow, K. J. (1962), "The Economic Implications of Learning by Doing", *Review of Economic Studies*,

5) Jones（1995）と Jones（1998）は，研究開発部門への収穫逓減の導入をつうじて Romer（1990）モデルを一般化した。その結果，規模効果は消失し，成長率は人的資本の増加率に依存する。足立（1996a）と足立（1996b）は，それぞれ Romer（1990）モデルと Jones（1995）モデルの移行過程を分析している。

6) これらのソロー・モデルの予測の有効性については，Mankiw, Romer and Weil（1992）を参考にした。

Vol. 29, pp. 155–73.
Barro, R. J. (1990), "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, pp. 103–25.
Barro, R. J. and Sala-i-Martin, X. (1995), *Economic Growth*, New York: McGraw-Hill.
Jones, C. I. (1995), "R & D-Based Models of Economic Growth Models", *Journal of Political Economy*, Vol. 103, pp. 759–84.
Jones, C. I. (1998), *Introduction to Economic Growth*, New York: W. W. Norton & Company, Inc.
Lucas, R. E. (1988), "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22, pp. 3–22.
Mankiw, N. G., Romer, D., and Weil, D. N. (1992), "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 107, pp. 407–37.
Rebelo, S. (1991), "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 96, pp. 500–21.
Romer, P. M. (1990), "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, pp. 71–102.
Sala-i-Martin, X. (1990), "Lecture Notes on Economic Growth", *NBER Working Paper*, no. 3563, Cambridge, MA: National Bureau of Economic Research.
Uzawa, H. (1965), "Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth", *International Economic Review*, Vol. 6, pp. 18–31.
足立英之（1996a),「ローマーの内生的成長モデルにおける移行過程」, 国民経済雑誌, 第173巻 6 号, 1－18頁.
足立英之（1996b),「R & D と内生的成長」, 国民経済雑誌, 第174巻 2 号, 1－14頁.