発注時点，需要の払い出し始点および需要形態の確率的在庫モデルへの影響について

——連続編——

児玉　正憲・坂口　通則

（受付　2002 年 3 月 7 日）

目　　　次

はしがき

一期間（t）の購入・販売在庫モデルでは発注量は期首に即時的にみたされ，需要はすべて期首に払いだしがはじまると仮定しているが本論文では，発注量は t/m 時点（$m \geqq 1$）に即時的にみたされ，需要は t/n 時点から払いだしがはじまると仮定する。確率的に変化するのは需要量だけである。最初に需要が 1 回きりと仮定できる突発需要の場合を取扱い，次に，需要が期を通じて一様に発生する場合を取扱う。最後に，需要が一般的な関数にしたがって発生する場合を取扱う。需要量が連続量の場合について検討する。

1. 突発需要の購入・販売在庫モデル

まず，

x：前期からの繰越在庫量

y：発注量（仮定によって t/m 時点に即時的に入荷）

$z = x + y$

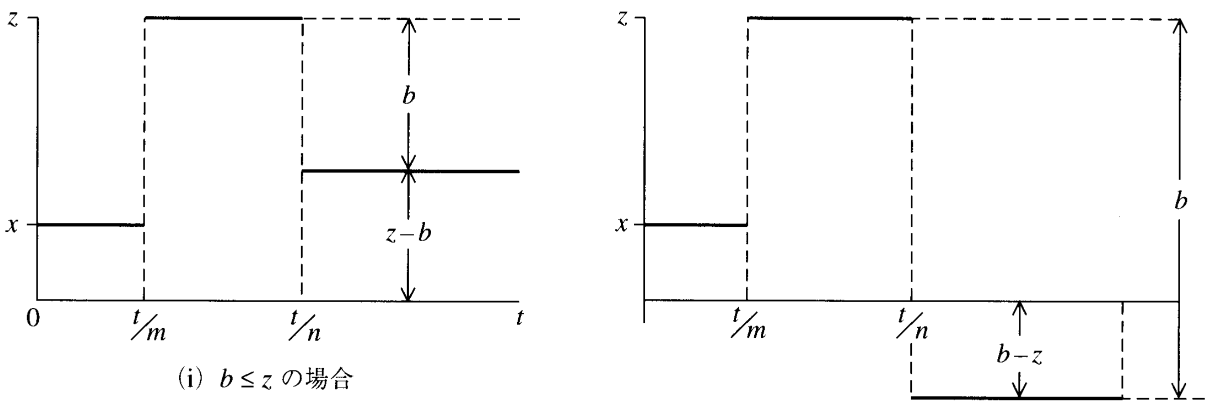
B：需要量を表す確率変数

b：B の実現値

とおく。

需要量 B は，仮定によって確定的でない。このため在庫量 z，x と需要量 B の実現値の大小関係は確率的であり，その大小関係に応じて在庫状態は図 1 のようになる。

(1)　$\boldsymbol{m \geq n}$



(i) $b \leq z$ の場合

(ii) $b > z$ の場合

図 1　在庫状態

期平均在庫 $I_1(b, z)$ および期平均在庫不足量 $I_2(b, z)$ は B の実現値 b と z の大小関係によりつぎのように表される。

$$I_1(b,z)=\begin{cases}\left\{x\cdot\dfrac{t}{m}+z\cdot\left(\dfrac{t}{n}-\dfrac{t}{m}\right)t+(z-b)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)t\right\}/t=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)z-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)b+\dfrac{x}{m}, & b\leq z\\[2ex] \left\{x\cdot\dfrac{t}{m}+z\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)t\right\}/t=\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)z+\dfrac{x}{m}, & b>z\end{cases} \tag{1.1}$$

$$I_2(b,z)=\begin{cases}0, & b\leq z\\[1ex] \left\{(b-z)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)t\right\}/t=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)(b-z), & b>z\end{cases} \tag{1.2}$$

また，諸費用を

c：購入費用（単位当たり）

h：在庫維持費用（期当たり，単位当たり）

p：品切費用（単位当たり）

とおき，さらに

$\phi(b)$：需要量 B の確率密度関数，$\phi(b)=0, b<0,$

とする。

このモデルでは，発注費用を無視することにしたから，期待総費用を $E\{C(B,z)\}$ とすれば，それは

$$\begin{aligned}
E\{C(B,z)\} &= \text{購入費用} + h\cdot(\text{期待期平均在庫量}) + p\cdot(\text{期待期平均在庫不足量}) \\
&= cy + hE\{I_1(B,z)\} + pE\{I_2(B,z)\} \\
&= c(z-x) + h\int_0^\infty I_1(b,z)\phi(b)db + p\int_0^\infty I_2(b,z)\phi(b)db \\
&= c(z-x) + h\left\{\int_0^z\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)z-\left(1-\frac{1}{n}\right)b+\frac{x}{m}\right)\phi(b)db\right. \\
&\qquad \left.+\int_z^\infty\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\frac{x}{m}\right)\phi(b)db\right\} \\
&\qquad +p\int_z^\infty\left(1-\frac{1}{n}\right)(b-z)\phi(b)db \\
&= \left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+c\right\}z+\left(1-\frac{1}{n}\right)h\int_0^Z(z-b)\phi(b)db \\
&\qquad +\left(1-\frac{1}{n}\right)p\int_z^\infty(b-z)\phi(b)db \\
&= \left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+c+\left(\frac{1}{n}-1\right)p\right\}z+\left(1-\frac{1}{n}\right)p\int_0^\infty b\phi(b)db \\
&\qquad +\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\int_0^Z(z-b)\phi(b)db
\end{aligned} \tag{1.3}$$

ここに $E\{C(B,z)\}$ は確率変数 B の関数 $C(B,z)$ の期待値を，$E\{I_1(B,z)\}$ および $E\{I_2(B,z)\}$ はそれぞれ確率変数 B の関数 $I_1(B,z)$，$I_2(B,z)$ の期待値を表す。

$E\{C(B,z)\}$ を最小にする z の値は式(1.3)が2階連続微分可能な下に凸な関数であるから，式(1.3)の z に関する第1次微分を0とおくことによって求められる。

$$E\{C(B,z)\}'=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+c+\left(\frac{1}{n}-1\right)p+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\int_0^z\phi(b)db=0$$

より，$E\{C(B,z)\}$ を最小にする z の値は

$$\int_0^z\phi(b)db=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)p+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)h-c}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)} \tag{1.4}$$

をみたす z の値として求められる。$(1-1/n)p+(1/m-1/n)h>c$ ならば式(1.3)をみたす z の値 z^* が $0<z^*<\infty$ で唯一存在することが容易に確かめられる。$E\{C(B,z)\}''$ は次のよう

になる。

$$E\{C(B,z)\}'' = \left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\phi(z) \geqq 0$$

式(1.4)で $m \to \infty$, $n \to \infty$ とすると，

$$\int_0^z \phi(b)db = \frac{p-c}{h+p} \tag{1.5}$$

となり，発注量が期首に即時的にみたされ，需要が 1 回きりで，期首にすべて払いだされるモデルの場合になる。式(1.4)で $m=n=\ell$ とすると，

$$\int_0^z \phi(b)db = \frac{\left(1-\frac{1}{\ell}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{\ell}\right)(h+p)} \equiv q \tag{1.6}$$

したがって，最適購入政策は，繰越在庫量 x が与えられたとき，$B \leqq z^*$ となる確率が q となるような z^* に関し

$$\left.\begin{matrix} z^* > x \\ z^* \leq x \end{matrix}\right\} \text{ならば，発注量} = \begin{cases} z^* - x \\ 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

(2)　$m < n$

z, x および b の大小関係により在庫状態は図 2 のようになる。

$I_1(b,z)$ および $I_2(b,z)$ はつぎのように表される。

$$I_1(b,z) = \begin{cases} \left\{x\cdot\frac{t}{n} + (x-b)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)t + (z-b)\left(1-\frac{1}{n}\right)t\right\} = \frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z - \left(1-\frac{1}{n}\right)b, & b < x \\ \left\{x\cdot\frac{t}{n} + (z-b)\left(1-\frac{1}{m}\right)t\right\}/t = \frac{x}{n} + \left(1-\frac{1}{m}\right)(z-b), & x \leq b < z \\ \left\{x\cdot\frac{t}{n}\right\}/t = \frac{x}{n}, & z \leq b \end{cases} \tag{1.8}$$

$$I_2(b,z) = \begin{cases} 0, & b < x \\ \left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)(b-x)t\right\}/t = \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)(b-x), & x \leq b < z \\ \left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)(b-x)t + \left(1-\frac{1}{m}\right)(b-z)t\right\}/t = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x - \left(1-\frac{1}{m}\right)z \\ \qquad + \left(1-\frac{1}{n}\right)b, & b \geq z \end{cases} \tag{1.9}$$

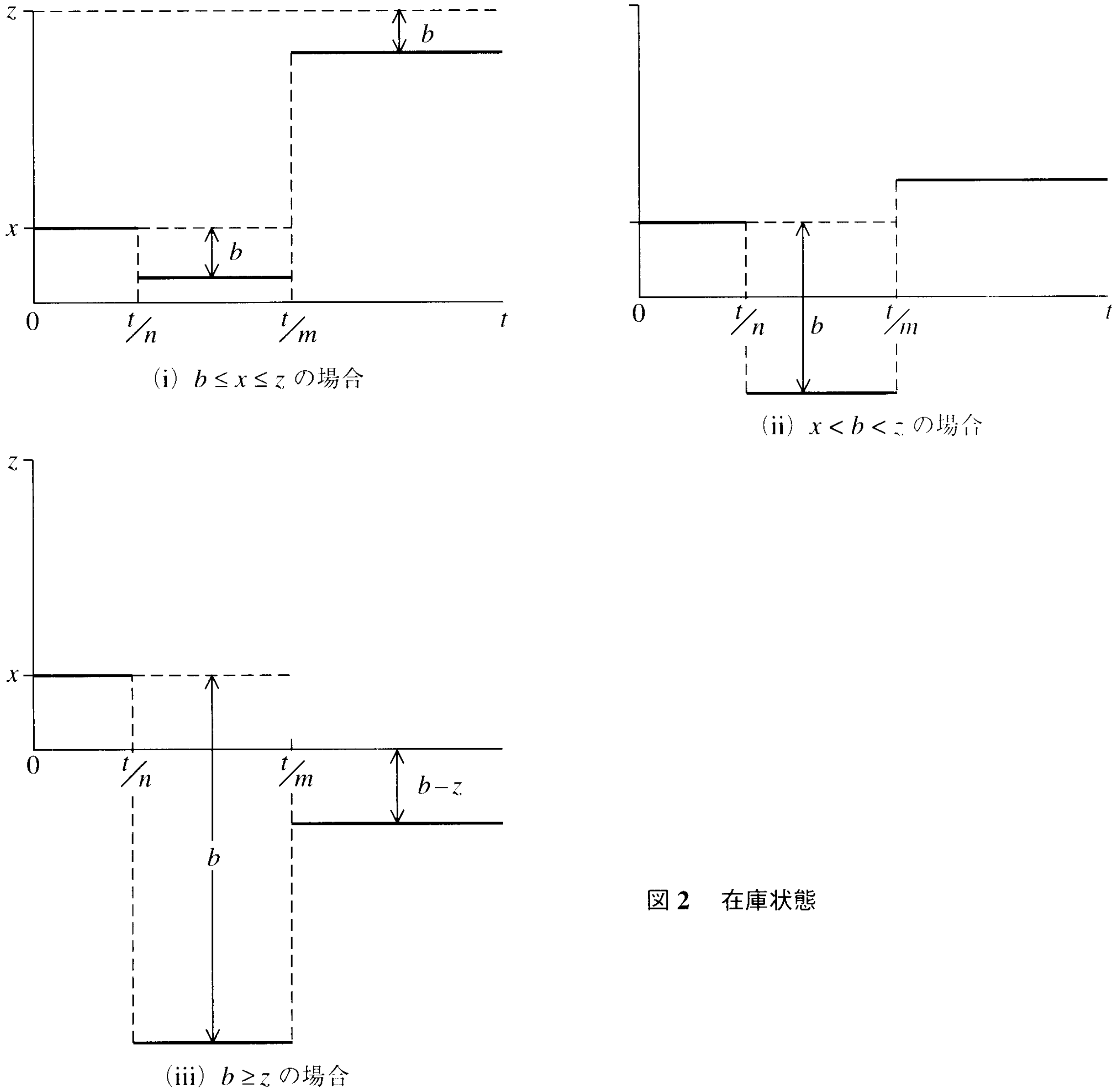


図 2　在庫状態

したがって

$$
\begin{aligned}
E\{C(B,z) &= c(z-x) + h\int_0^\infty I_1(b,z)\phi(b)db + p\int_0^\infty I_2(b,z)\phi(b)db \\
&= c(z-x) + h\left\{\int_0^x \left(\frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z - \left(1-\frac{1}{m}\right)b\right)\phi(b)db\right. \\
&\quad \left. + \int_x^z \left(\frac{x}{n} + \left(1-\frac{1}{m}\right)(z-b)\right)\phi(b)db + \int_z^\infty \frac{x}{n}\phi(b)db\right\} + p\left\{\int_x^z \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)(b-x)\phi(b)db\right. \\
&\quad \left. + \int_z^\infty \left(\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)(b-x) + \left(1-\frac{1}{m}\right)(b-z)\right)\phi(b)db\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c(z-x) + h\left\{\frac{x}{n} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)x\int_0^x \phi(b)ab + \left(1-\frac{1}{m}\right)z\int_0^z \phi(b)db - \left(1-\frac{1}{n}\right)\int_0^x b\phi(b)db\right. \\
&\quad \left. -\left(1-\frac{1}{m}\right)\int_x^z b\phi(b)db\right\} + p\left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\int_x^\infty (b-x)\phi(b)db\right. \\
&\quad \left. +\left(1-\frac{1}{m}\right)\int_z^\infty (b-z)\phi(b)db\right\} \\
&= \left\{C + p\left(\frac{1}{m}-1\right)\right\}z + \left\{\frac{h}{n} - p\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\right\}x + p\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_0^\infty b\phi(b)db \\
&\quad + (h+p)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)x\int_0^x \phi(b)db + (h+p)\left(\frac{1}{n}-1\right)\int_0^x b\phi(b)db \\
&\quad + (h+p)\left(\frac{1}{m}-1\right)\int_x^z b\phi(b)db + (h+p)\left(1-\frac{1}{m}\right)z\int_0^z \phi(b)db
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

となる。また，

$$
\begin{aligned}
E\{C(B,z)\}' &= c + p\left(\frac{1}{m}-1\right) + (h+p)\left(\frac{1}{m}-1\right)z\phi(z) + (h+p)\left(1-\frac{1}{m}\right)\int_0^z \phi(b)db \\
&\quad + (h+p)\left(1-\frac{1}{m}\right)z\phi(z) \\
&= c + p\left(\frac{1}{m}-1\right) + (h+p)\left(1-\frac{1}{m}\right)\int_0^z \phi(b)db = 0
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

$$
E\{C(B,z)\}'' = (h+p)\left(1-\frac{1}{m}\right)\phi(z) \geqq 0 \tag{1.12}
$$

より，$E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値は

$$
\int_0^z \phi(b)db = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)p - c}{\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)} \equiv q \tag{1.13}
$$

をみたす z の値 z^* によって与えられる。$\left(1-\frac{1}{m}\right)p > c$ ならば z^* は唯一存在する（$0 < z^* < \infty$）。したがって最適購入政策は，

$$
\left.\begin{array}{l} z^* > x \\ z^* \leq x \end{array}\right\} \text{ならば，発注量} = \left\{\begin{array}{l} z^* - x \\ 0 \end{array}\right. \tag{1.14}
$$

2.　一様需要の購入・販売在庫モデル

需要は t/n 時点から t 時点まで一様に発生する場合を考察する。しかし，他の条件は 1 の場合と同じとする。在庫状態は図 3 のようになる。

(1)　$m > n$

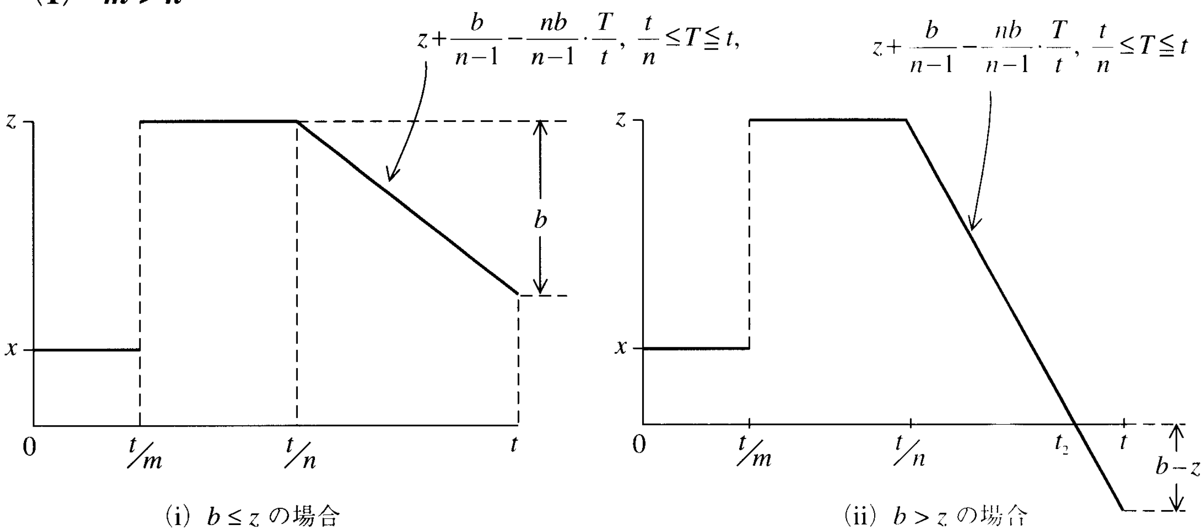


図 3　在庫状態，$m > n$

T 時点の在庫量を $Q(T)$ とすると，$t/n \leqq T \leqq t$ における $Q(T)$ は $z + b/(n-1) - nb\,T/((n-1)t)$ で与えられる。これは $Q(T) = a + CT$ とおき，$Q(t/n) = a + c\cdot\dfrac{t}{n} = z$，$Q(t) = A + ct = z - b$ より，$c = -nb/\{(n-1)t\}$，$a = z + b/(n-1)$ を得る。

$$Q(T)=\begin{cases} x, & 0\leq T< t/m \\ z, & t/m\leq T< t/n \\ z+\dfrac{b}{n-1}-\dfrac{nb}{n-1}\cdot\dfrac{T}{t}, & t/n\leq T\leq t \end{cases} \tag{2.1}$$

(i)　$b \leq z$ の場合

$$\left.\begin{aligned} I_1(b,z)&=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{m}+z\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)t+\frac{(z+(z-b))\left(1-\dfrac{1}{n}\right)t}{2}\right\} \\ &=\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2} \\ I_2(b,z)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

(ii)　$b > z$ の場合

$$\begin{aligned} I_1(b,z)&=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{m}+z\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)t+z\left(t_2-\frac{t}{n}\right)/2\right\} \\ &=\frac{x}{m}+z\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)+\frac{z}{2}\left(\frac{t_2}{t}-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{m} + z\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2b} \tag{2.3}$$

$$\left(\because Q(t_2) = z + \frac{b}{n-1} - \frac{nb}{n-1}\cdot\frac{t_2}{t} = 0 \text{ より}\right.$$

$$\left.\frac{t_2}{t} = \{(n-1)z + b\} / \{nb\} = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{z}{b}\right)$$

$$I_2(b,z) = \frac{1}{t}\{(b-z)(t-t_2)/2\} = \frac{(b-z)}{2}\left(1 - \frac{t_2}{t}\right)$$

$$= \frac{(b-z)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{z}{b}\right)}{2} \tag{2.4}$$

したがって

$$E\{C(B,z)\} = c(z-x) + h\int_0^\infty I_1(b,z)\phi(b)db + p\int_0^\infty I_2(b,z)\phi(b)db$$

$$= c(z-x) + h\left\{\int_0^z\left(\frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z - \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2}\right)\phi(b)db\right.$$

$$\left. + \int_z^\infty\left(\frac{x}{m} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)z + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2b}\right)\phi(b)db\right\}$$

$$+ p\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2}\int_z^\infty (b-z)\left(1-\frac{z}{b}\right)\phi(b)db$$

$$= \left(c - \frac{h}{m}\right)(z-x) + \left\{\frac{h}{n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)p\right\}z + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2}p\int_0^\infty b\phi(b)db$$

$$+ (h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)z\int_0^z\phi(b)db - \frac{(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2}\int_0^z b\phi(b)db$$

$$+ \frac{(h+p)\left(1-\frac{1}{h}\right)z^2}{2}\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db \tag{2.5}$$

$$E\{C(B,z)\}' = c - \frac{h}{m} + \frac{h}{n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)p + (h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_0^z\phi(b)db$$

$$+ (h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)z\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{t}db \tag{2.6}$$

$$E\{C(B,z)\}'' = (h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_z^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}db \geq 0 \tag{2.7}$$

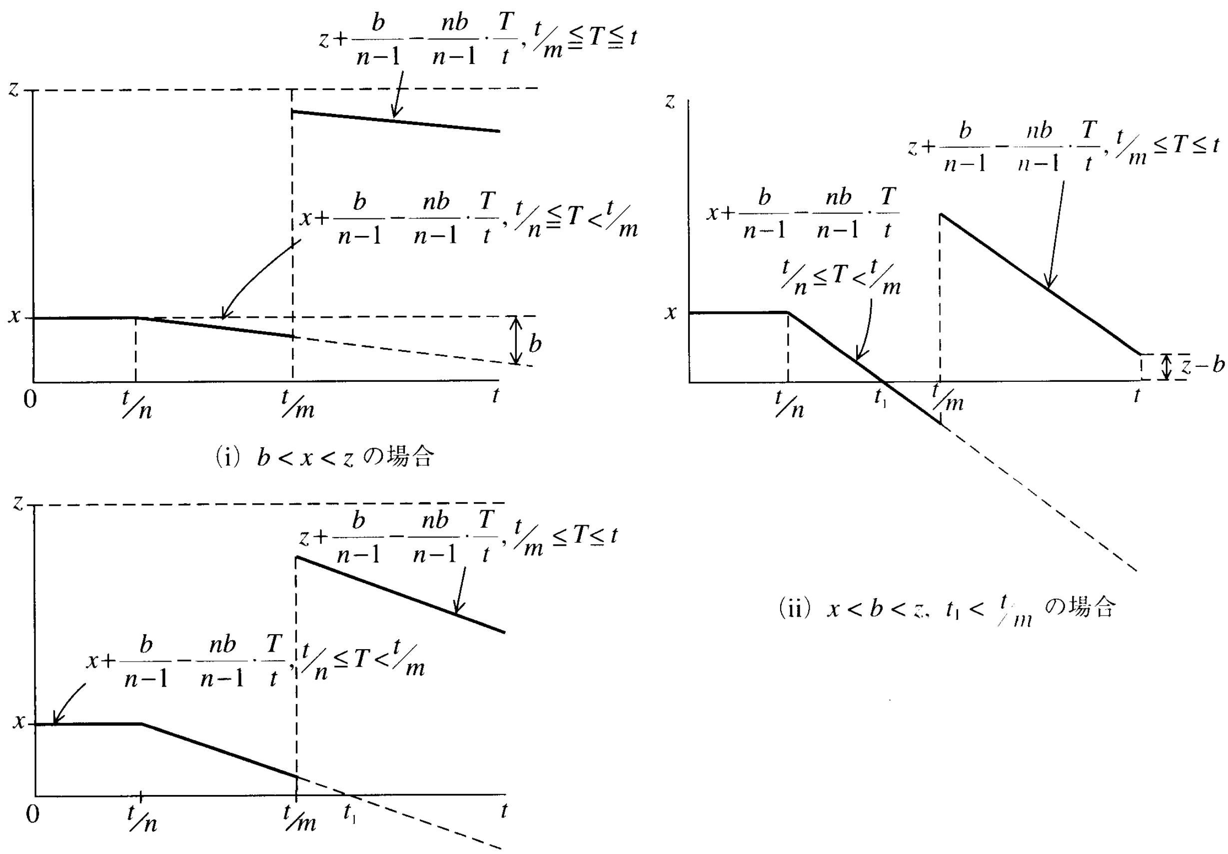
となる。よって $E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値 z^* は $\left(1/m - 1/n\right)h + \left(1 - 1/n\right)p > c$ ならば，つぎの式(2.8)をみたす $0 < z^* < \infty$ なる唯一の z^* によって与えられる。

$$\int_0^z \phi(b)db + z\int_z^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}db = \frac{\dfrac{h}{m} + \left(1-\dfrac{1}{n}\right)p - \dfrac{h}{n} - c}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)(h+p)} \tag{2.8}$$

(2)　$m \leq n$

この場合の在庫状態は図 4 で示される。このときの時点 T における在庫量 $Q(T)$ はつぎの式で与えられる。

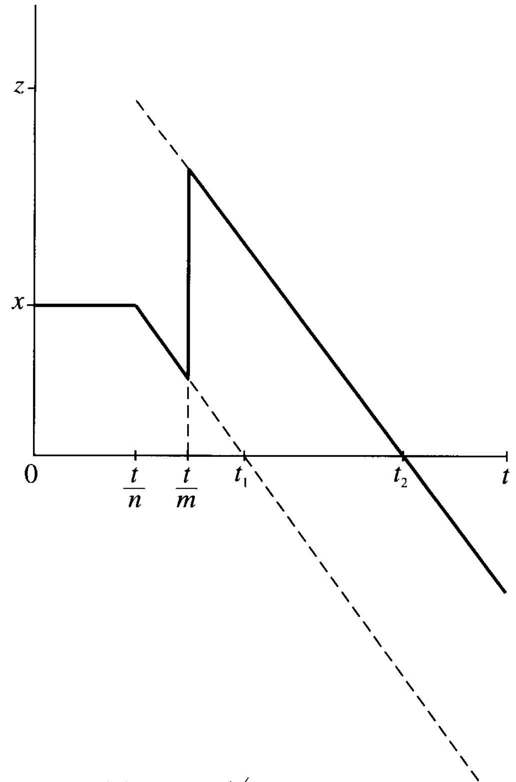
$$Q(T) = \begin{cases} x, & 0 \leq T \leq t/n \\ x + \dfrac{b}{n-1} - \dfrac{nb}{n-1}\cdot\dfrac{T}{t}, & t/n \leq T < t/m \\ z + \dfrac{b}{n-1} - \dfrac{nb}{n-1}\cdot\dfrac{T}{t}, & t/m \leq T \leq t \end{cases} \tag{2.9}$$



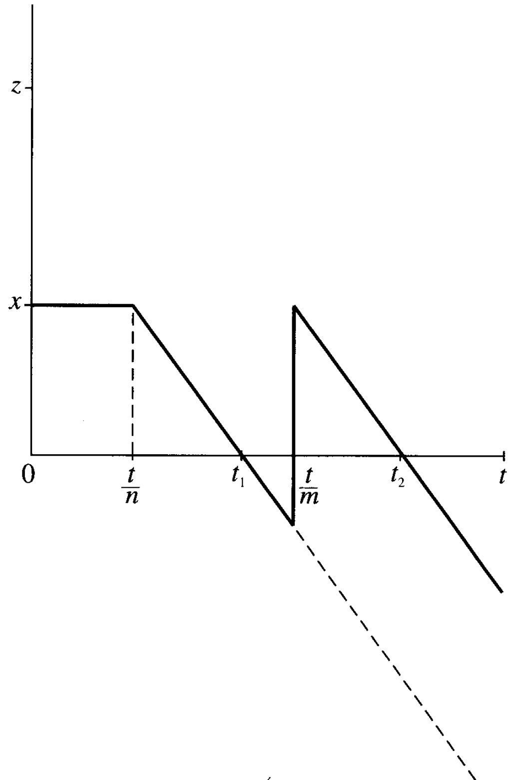
(i) $b < x < z$ の場合

(ii) $x < b < z$, $t_1 < t/m$ の場合

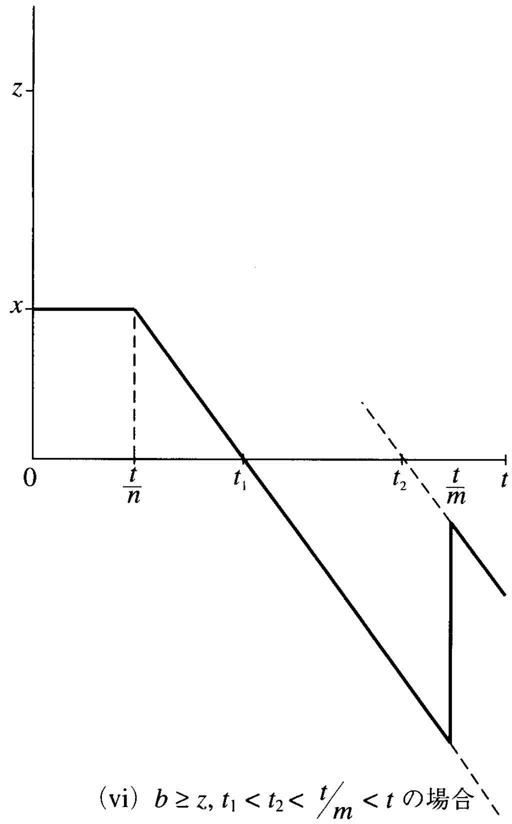
(iii) $x < b < z$, $t_1 \geq t/m$ の場合



(v) $b \ge z,\ {}^{t}\!/_{m} < t_1 < t_2 < t$ の場合



(iv) $b \ge z,\ t_1 < t < {}^{t}\!/_{m} < t_2 < t$ の場合



(vi) $b \ge z,\ t_1 < t_2 < {}^{t}\!/_{m} < t$ の場合

図4　在庫状態

(i) $b<x$ の場合

$$\left.\begin{aligned}
I_1(b,z) &= \frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\left(x+x+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)t/2\right.\\
&\quad\left.+\left(z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}+z-b\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)t/2\right\}\\
&= \frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2m}\left\{\frac{m-n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)+1-m\right\}\\
&= \frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)\\
I_2(b,z) &= 0
\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

(ii)　$x<b\leqq z,\ t_1<t/m<t/t_2$ の場合（図４，(ii) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+x\left(t_1-\frac{t}{n}\right)/2+\left(z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}+z-b\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)t/2\right\}$$

$$=\frac{x}{2n}+\frac{x}{2}\cdot\frac{t_1}{t}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2}\left\{\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right\}\left(1-\frac{1}{m}\right)$$

ここで，$x+\dfrac{b}{n-1}-\dfrac{nb}{n-1}\cdot\dfrac{t_1}{t}=0$ より $\dfrac{t_1}{t}=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{x}{b}$　これを上式に代入して

$$=\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2b}\left(1-\frac{1}{n}\right)+z\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{b}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left\{\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right\}\tag{2.11}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\left(\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}-x-\frac{b}{n-1}\right)\left(\frac{t}{m}-t_1\right)/2\right\}$$

$$=\left(\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}-x-\frac{b}{n-1}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}\right)/2$$

$$=-x\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\frac{x^2}{2b}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{b}{2}-\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)/(n-1)\tag{2.12}$$

つぎに $t_1\geq t/m$ の場合を考察しよう。

(iii)　$\boldsymbol{x<b\leq z,\ t/m<t_1<t<t_2}$ の場合（図４，(iii) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\left(x+x+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(\frac{t}{m}-\frac{t}{n}\right)/2\right.$$

$$\left.+\left(z+\frac{b}{n-1}+\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}+z-b\right)\left(t-\frac{t}{m}\right)/2\right\}$$

$$=\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)\tag{2.13}$$

$$I_2(b,z)=0 \tag{2.14}$$

（iv）　$b>z,\ t_1<{}^{t}\!/_{m}<t_2<t$ の場合（図４，（iv）を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+x\left(t_1-\frac{t}{n}\right)/2+\left(z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(t_2-\frac{t}{m}\right)/2\right\}$$

$$=\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2b}-\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z}{b}\right)/2$$

$$\left(\because\ z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{t_2}{t}=0\text{ より }\frac{t_2}{t}=\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z}{b}\right)$$

$$=\frac{x}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)(x^2+z^2)\frac{1}{2b}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{b}{2(n-1)} \tag{2.15}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\left(\frac{t}{m}-t_1\right)\left(\frac{n}{m}\cdot\frac{nb}{n-1}-\frac{b}{n-1}-x\right)/2+(t-t_2)\left(\frac{nb}{n-1}-\frac{b}{n-1}-z\right)/2\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{m}-\frac{t_1}{t}\right)\left(\frac{b}{n-1}\left(\frac{n}{m}-1\right)-x\right)/2+\left(1-\frac{t_2}{t}\right)(b-z)/2$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x-\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{2b}\left(1-\frac{1}{n}\right)(x^2+z^2)+\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{m}-1\right)\right)b \tag{2.16}$$

（v）　$\boldsymbol{b>z,\ {}^{t}\!/_{m}<t_1<t_2<t}$ の場合（図４，（v）を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\left(x+x+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right){}^{t}\!/_{2}\right.$$

$$\left.+\left(z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(t_2\cdot\frac{t}{m}\right)/2\right\}$$

$$=\frac{x}{m}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2b}\ \left(\because {}^{t_2}\!/_{t}={}^{1}\!/_{n}+\left(1-{}^{1}\!/_{n}\right)n/b\right) \tag{2.17}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\{(b-z)(t-t_2)/2\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{(b-z)^2}{2b}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(-z+\frac{b}{2}+\frac{z^2}{2b}\right) \tag{2.18}$$

（vi）　$b>z,\ t_1<t_2<{}^{t}\!/_{m}<t$ の場合（図４，（vi）を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t_1}\left(x+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{T}{t}\right)dT\right\}$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x+\frac{b}{n-1}\right)\left(\frac{t_1}{t}-\frac{1}{n}\right)-\frac{nb}{2(n-1)}\left(\left(\frac{t_1}{t}\right)^2-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x+\frac{b}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}-\frac{nb}{2(n-1)}\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{x}{b}\right)^2+\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}\right\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)x\left(\frac{x}{2b}+\frac{1}{n-1}\right) \tag{2.19}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t/m}\left(\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{T}{t}-\frac{b}{n-1}-x\right)dT+\int_{t/m}^{t}\left(\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{T}{b}-\frac{b}{n-1}-z\right)dT\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t}\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{T}{t}dT-\left(\frac{b}{m}-t_1\right)\left(\frac{b}{n-1}+x\right)-\left(t-\frac{t}{m}\right)\left(\frac{b}{n-1}+z\right)\right\}$$

$$=\frac{nb}{2(n-1)}\left\{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{x}{b}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}\right)\left(\frac{b}{n-1}+x\right)\right\}-\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{b}{n-1}+z\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(b+\frac{x^2}{b}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+\left(\frac{1}{m-1}-1\right)z \tag{2.20}$$

したがって次の 6 つのケースにわけて $E\{C(B,z)\}$ を求めることができる。

ケース 1.　i）$b<x,\ t<t_1<t_2$，ii）$x<b<z,\ t_1<t/m<t<t_2$，iii）$b\geq z,\ t_1<t/m<t_2<t$

この場合は，(i)，(ii)，(iv)（図 4，(i)，(ii)，(iv) を参照）より

$$E\{C(B,z)\}=c(z-x)+h\int_0^{\infty}I_1(b,z)\phi(b)db+p\int_0^{\infty}I_2(b,z)\phi(b)db$$

$$=c(z-x)+h\left\{\int_0^{x}I_1(b,z)\phi(b)db+\int_x^{z}I_1(b,z)\phi(b)db+\int_z^{\infty}I_1(b,z)\phi(b)db\right\}$$

$$+p\left\{\int_0^{x}I_2(b,z)\phi(b)db+\int_x^{z}I_2(b,z)\phi(b)db+\int_z^{\infty}I_2(b,z)\phi(b)db\right\}$$

$$=c(z-x)+h\left\{\int_0^{x}\left(\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)\right)\phi(b)db\right.$$

$$+\int_x^{z}\left\{\frac{x}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right)\right\}\phi(b)db$$

$$+\int_z^{\infty}\left\{\frac{x}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\frac{1}{2b}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(x^2+z^2\right)\right.$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\frac{b}{2(n-1)}\left(1-\frac{n}{m}\right)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$+p\int_x^z\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}+\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2(n-1)}\right\}\phi(b)db$$

$$+p\int_z^\infty\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x-\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{2b}\left(1-\frac{1}{n}\right)(x^2+z^2)\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{m}-1\right)\frac{b}{2}\right)\phi(b)db\right. \tag{2.21}$$

$$=\left(\frac{h}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)p-c\right)x+\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)p+\frac{(h+p)}{2(n-1)}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{n}{m}\right)\right\}$$

$$\cdot\int_0^\infty b\phi(b)db+(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2}\int_0^\infty\frac{\phi(0)}{b}db+(h+p)\left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)x\int_0^x\phi(b)db\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(n-1)}\left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{1}{m}\int_0^x b\phi(b)db-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2\int_0^x\frac{\phi(b)}{b}db\right\}$$

$$+\left(\frac{n}{m}-1\right)\left\{\frac{p+(2-n)h}{2n(n-1)}\right\}\int_0^x b\phi(b)db+\left(c+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p\right)z$$

$$+(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2}\int_0^\infty\frac{\phi(b)}{b}db+(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{z\int_0^z\phi(b)db\right.$$

$$\left.-\frac{z^2}{2}\int_0^z\frac{\phi(b)}{b}db\right\}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)(h+p)\int_0^z b\phi(b)db \tag{2.22}$$

$$E\{C(B,z)\}'=c+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p+(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)z\int_0^\infty\frac{\phi(b)}{b}db+(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\cdot\left\{\int_0^z\phi(b)db+z\phi(z)-z\int_0^z\frac{\phi(b)}{b}db-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{\phi(z)}{z}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)(h+p)z\phi(z)$$

$$=c+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p+(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{\int_0^z\phi(b)db+z\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db\right\} \tag{2.23}$$

$$E\{C(B,z)\}''=(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db\geq 0 \tag{2.24}$$

となる。したがって $E\{C(B,z)\}$ を最小にする z の値は $\left(1-\frac{1}{n}\right)p+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)h-c>0$ ならば

$$\int_0^{z^*}\phi(b)db + z^*\int_{z^*}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}db = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)p+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)h-c}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)} \tag{2.25}$$

をみたす唯一の $0<z^*<\infty$ なる正根 z^* によって与えられる。

ケース **2.**　i）$b<x,\ t<t_1<t_2$，ii）$x<b<z,\ {}^{t}\!/_{m}<t_1<t<t_2$，iii）$b>z,\ {}^{t}\!/_{m}<t_1<t_2<t$
この場合は，(i)，(iii)，(v)（図４，(i)，(iii)，(v) を参照）より

$$\begin{aligned}
E\{C(B,z)\} &= c(z-x)+h\left\{\int_0^x\left(\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)\right)\phi(b)db\right.\\
&\quad+\int_x^z\left(\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2}-\left(\frac{1}{n}-1\right)\right)\phi(b)db+\int_z^{\infty}\left\{\frac{x}{m}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z\right.\\
&\quad\left.+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2b}\phi(b)db\right\}+p\int_z^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(-z+\frac{b}{2}+\frac{z^2}{2b}\right)\phi(b)db\\
&= c(z-x)+\frac{hx}{m}+\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p\right)z+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)p\int_0^{\infty}b\phi(b)db\\
&\quad+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\frac{z^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}db+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)z\int_0^{z}\phi(b)db\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)(h+p)\int_0^{z}b\phi(b)db+\left(\frac{1}{n}-1\right)(h+p)-\frac{z^2}{2}\int_0^{z}\frac{\phi(b)}{b}db
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
E\{C(B,z)\}' &= c+\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)z\int_0^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}db\\
&\quad+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\int_0^{z}\phi(b)db+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)z\phi(z)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)(h+p)z\phi(z)\\
&\quad+\left(\frac{1}{n}-1\right)(h+p)z\int_0^{z}\frac{\phi(b)}{b}db+\left(\frac{1}{n}-1\right)(h+p)\frac{z^2}{2}\cdot\frac{\phi(z)}{z}\\
&= c+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\left\{\int_0^{z}\phi(b)db+z\int_z^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}db\right\}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$E\{C(B,z)\}'' = (h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_z^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}db \ge 0 \tag{2.28}$$

となる。したがって $E\{C(B,z)\}$ を最小にする z の値 z^* は $\left(1-{}^{1}\!/_{n}\right)p+\left({}^{1}\!/_{m}-{}^{1}\!/_{n}\right)h-c>0$ ならば

$$\int_0^{z^*}\phi(b)db + z^*\int_{z^*}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}db = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)p + \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)h - c}{(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)} \tag{2.29}$$

をみたす唯一の $0<z^*<\infty$ なる正根 z^* によって与えられる。

ここで，ケース 1 とケース 2 によるモデルの違いは期待総費用 $E\{C(B, z)\}$ が異なるが，$E\{C(B,z)\}'$，$E\{C(B,z)\}''$ は同じである。つまり最適条件を与える z の値 z^* の値は同じであることに注意いしよう。

ケース 3. i) $b \le x$, $t<t_1<t_2$，ii) $x<b<z$, $t_1 < t/m < t < t_2$，iii) $b \ge z$, $t_1<t_2<t/m<t$
この場合は，(i)，(ii)，(vi)（図 4，(i)，(ii)，(vi) を参照）より

$$\begin{aligned}
E\{C(B,z)\} &= c(z-x) + h\Biggl\{\int_0^x\left(\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)b\right)\phi(b)db \\
&\quad + \int_x^z\left\{\frac{x}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left\{\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right\}\right\}\phi(b)db \\
&\quad + \int_z^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)x\left(\frac{x}{2b}+\frac{1}{n-1}\right)\right\}\phi(b)db\Biggr\} \\
&\quad + p\Biggl\{\int_x^z\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}+\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2(n-1)}\right\}\phi(b)db \\
&\quad + \int_z^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(b+\frac{x^2}{b}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+\left(\frac{1}{m}-1\right)z\right\}\phi(b)db\Biggr\} \\
&= c(z-x) + h\Biggl\{\int_0^x\left(\frac{x}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)b\right)\phi(b)db + \left(1-\frac{1}{m}\right)z\int_0^z\phi(b)ab \\
&\quad + \int_x^z\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right)b\phi(b)db \\
&\quad + \int_x^{\infty}\left(\frac{x}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}\right)\phi(b)db\Biggr\} \\
&\quad + p\Biggl\{\int_x^z\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2(n-1)}\phi(b)db \\
&\quad + \int_x^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}\right)\phi(b)db \\
&\quad + \int_z^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)z\right)\phi(b)db\Biggr\}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$E\{C(B,z)\}' = c + h\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)\int_0^z \phi(b)db + \left(1-\frac{1}{m}\right)z\phi(z)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right)z\phi(z)\right\}$$
$$+ p\left\{\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{z}{2(n-1)}\phi(z) - \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z}{2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)z\right)\phi(z)\right.$$
$$\left. -\left(1-\frac{1}{m}\right)\int_z^\infty \phi(b)db\right\}$$
$$= c - \left(1-\frac{1}{m}\right)p + \left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)\int_0^z \phi(b)db + \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \frac{(h+p)nz\phi(z)}{2(n-1)}$$
(2.31)

$E\{C(B,z)\}'' \geq 0$を仮定すると，$E\{C(B,z)\}$を最小にするzの値z^*は

$$\int_0^{z^*} \phi(b)db + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{nz^*\phi(z^*)}{2(n-1)} = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)p - c}{\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)} \qquad (2.32)$$

をみたさなければならない。

ケース 4. i) $b<x,\ t<t_1<t_2$，ii) $x<b<z,\ t_1<t/m<t<t_2$，iii) $b \geq z,\ t/m<t_1<t_2<t$

ケース 5. i) $b<x,\ t<t_1<t_2$，ii) $x<b<z,\ t/m<t_1<t<t_2$，iii) $b \geq z,\ t_1<t/m<t_2<t$

ケース 6. i) $b<x,\ t<t_1<t_2$，ii) $x<b<z,\ t/m<t_1<t<t_2$，iii) $b \geq z,\ t_1<t_2<t/m<t$

はおこらない。

3. 一般的需要の購入・販売在庫モデル

1. における需要形態は突発需要で，それが t/n 時点に発生し，発注は t/m 時点に即時的に入荷する例になっており，2. のそれは t/n 時点から t まで一様に需要が発生する場合である。ここでは発注は 1. および 2. と同様に t/m 時点に即時点に入荷するが，需要形態としては 1. および 2. を特殊な場合として含む一般的かつ総合的需要形態を表すモデルとして，

$g(b, T/t)$

を用いることにする。ここに

b：期間 t における需要量

t： 1 期間の長さ

$g(b, T/t)$：時点 $T(T \leqq t)$ における需要量

$g(b, x)$: $g(b, x) = 0,\ 0 \le x \le {}^{t}\!/_{n},\ g(0, x) = 0,\ g(b, 1) = b$ となる x の微分可能な単調増加関数

そこでわれわれの目的は，$g(b, x)$ を需要形態を表す 1 つの統一モデルとして使用し，そのときの最適条件を求め，1. および 2. のモデルが特殊な場合として含まれることを示す。この点を除き他の仮定や記号は 1. および 2. の場合と全く同じとする。

需要量 B は仮定によって確定的でない。このため在庫量 z, x と需要量 B の実現値 b の大小関係は確率的であり，その大小関係および m と n の大小関係に応じて在庫状態は図 5 および図 6 のようになる。

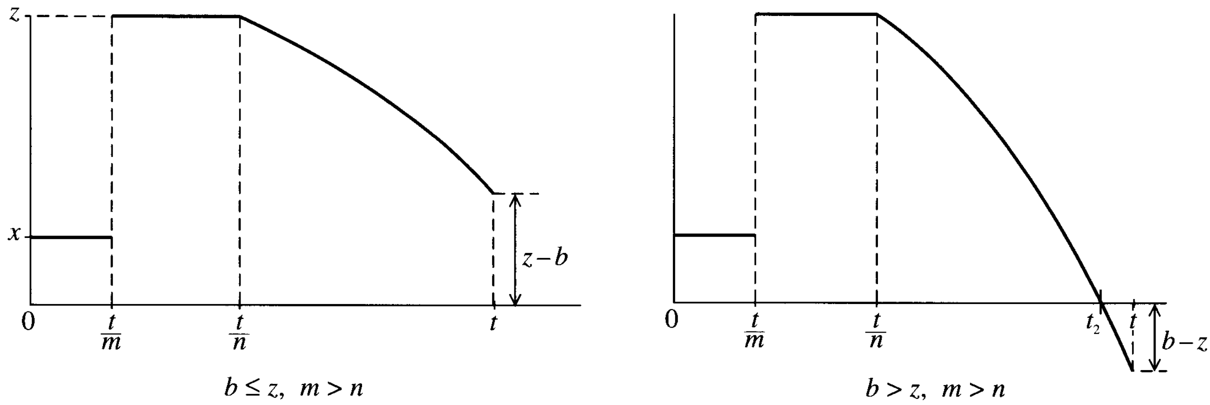


図 5　在庫状態

時点 T における在庫量を $Q(T)$ とすると

$$Q(T) = \begin{cases} x, & 0 \le T < {}^{t}\!/_{m} \\ z, & {}^{t}\!/_{m} \le T \le {}^{t}\!/_{n} \\ z - b + g(b, g^{-1}(b,n) - g(b, g^{-1}(b,n){}^{T}\!/_{t}), & {}^{t}\!/_{n} \le T \le t \end{cases} \tag{3.1}$$

${}^{t}\!/_{n} \le T \le t$ における在庫量が上式で与えられることは，つぎのようにして示される。${}^{T}\!/_{t}$ の関数 $a - g(b, C{}^{T}\!/_{t})$ が $T = t$ で $z{-}b$，$T = {}^{t}\!/_{n}$ で z となるように a，c をきめる。$a - g(b, c) = z - b$，$a - g(b, {}^{c}\!/_{n}) = z$ より $g(b, c) -\ g(b, {}^{c}\!/_{n}) = b$ この式をみたす C の値を $g^{-1}(b, n)$ で表す（$c > 1$ で存在することは $g(b, x)$ の仮定より明らか，$n \to \infty$ のとき，$c = g^{-1}(b, \infty) = 1$）よって $a = z - b + g(b, g^{-1}(b,n)) = z + g(b, g^{-1}(b,n)/n)$ となる。よって ${}^{t}\!/_{n} \le T < t$ において，$Q(T) = a - g(b, CT/t) = z - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g^{-1}(b,n)T/t)$ となる。

つぎに $I_1(b,z)$，$I_2(b,z)$ および $E\{C(B, z))$ を求める。

(1)　$m > n$

期平均在庫量 $I_1(b, z)$ および期平均在庫不足量 $I_2(b, z)$ は図 5 より

(i)　$b \leqq z$ の場合

$$I_1(b,z) = \frac{1}{t}\left\{x \cdot \frac{t}{m} + z\left(\frac{t}{n} - \frac{t}{m}\right) + \int_{t/n}^{t}\left(z - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right.$$

$$= \frac{x}{m} + z\left(1 - \frac{1}{m}\right) + (g(b, g^{-1}(b,n)) - b)\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}(G(b, g^{-1}(b,n))$$

$$- G(b, g^{-1}(b,n)/n)) \tag{3.2}$$

ここに，

$$G(b,u) = \int_0^u g(b,v)dv \tag{3.3}$$

$$I_2(b,z) = 0 \tag{3.4}$$

(ii)　$0 \leq z < b$ の場合

図5において

$$z - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g^{-1}(b,n)T/t) = 0,\ t/n \leq T \leq t \tag{3.5}$$

は唯一の $t/n < t_2 \leq t$ なる根 t_2 をもつ（$\because z - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g^{-1}(b,n)/n) = z$, $z - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g^{-1}(b,n)) = z - b$，また，仮定より $g(b, g^{-1}(b,n)T/t)$ は T の単調増加関数であることより明らか）この値 t_2/t を

$$\frac{t_2}{t} = g_2^{-1}(b,z,n)$$

とおく。この t_2/t を用いて

$$I_1(b,z) = \frac{1}{t}\left\{x \cdot \frac{t}{m} + \left(\frac{t}{n} - \frac{1}{m}\right)z + \int_{t/n}^{t_2}(z - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g^{-1}(b,n)T/t))dT\right.$$

$$= \frac{x}{m} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)z + \left(z - b + g(b, g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{t_2}{t} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\int_{g^{-1}(b,n)/n}^{t_2 g^{-1}(b,n)/t} g(b,\ell)d\ell$$

$$= \frac{x}{m} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)z + \left(z - b + g(b, g^{-1}(b,n))\right)\left(g_2^{-1}(b,z,n) - \frac{1}{n}\right)$$

$$- \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b, g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)) - G(b, g^{-1}(b,n)/n)\right\} \tag{3.6}$$

$$I_2(b,z) = \frac{1}{t}\int_{t_2}^{t}\left\{g(b, g^{-1}(b,n)T/t) - g(b, g^{-1}(b,n)) + b - z\right\}dT$$

$$= \left\{b - z - g(b, g^{-1}(b,n))\right\}\left(1 - \frac{t_2}{t}\right) + \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b, g^{-1}(b,n)) - G\left(b, \frac{t_2}{t}g^{-1}(b,n)\right)\right\}$$

$$= \left\{b - z - g(b, g^{-1}(b,n))\right\}\left\{1 - g_2^{-1}(b,z,n)\right\} + \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b, g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\left.- G(b, g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right\} \tag{3.7}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
E\{C(B,z)\} = {} & c(z-x) + h\int_0^z \left(\frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z + \left(g(b,g^{-1}(b,n)) - b\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right. \\
& \left. - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)) - G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\right\}\phi(b)db \\
& + h\int_z^\infty \left\{\frac{x}{m} + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z + \left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g^{-1}(b,z,n) - \frac{1}{n}\right)\right. \\
& \left. - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)) - G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\right\}\phi(b)db \\
& + p\int_z^\infty \left\{\left(b-z-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(1-g_2^{-1}(b,z,n)\right) + \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))\right.\right. \\
& \left.\left. - G\left(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)\right)\right)\right\}\phi(b)db \\
= {} & \left(\frac{h}{m}-c\right)x + \left(c-\frac{h}{m}-p\right)z + h\int_0^\infty \frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)db \\
& + p\int_0^\infty \frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)db + \left(\frac{h}{n}+p\right)\int_0^\infty\left(b-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\phi(b)db \\
& + (h+p)\int_0^z \left\{z-b+g(b,g^{-1}(b,n)) - \frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)db \\
& + (h+p)\int_z^\infty \left\{\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)g_2^{-1}(b,z,n)\right. \\
& \left. - \frac{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)db
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
E\{C(B,z)\}' = {} & c - \frac{h}{m} - p + (h+p)\int_0^z \phi(b)db + (h+p)\left\{g(z,g^{-1}(z,n))\right. \\
& \left. - \frac{G(z,g^{-1}(z,n))}{g^{-1}(z,n)}\right\}\phi(z) + (h+p)\int_z^\infty \left\{g_2^{-1}(b,z,n) + \left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\right. \\
& \left. \frac{\partial g_2^{-1}(b,z,n)}{\partial z} - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\frac{\partial G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))}{\partial z}\right\}\phi(b)db \\
& - (h+p)\left\{g(z,g^{-1}(z,n))g_2^{-1}(z,z,n) - \frac{G(z,g_2^{-1}(z,z,n)g^{-1}(z,n))}{g^{-1}(z,n)}\right\}\phi(z)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

ここで関係式

$$\begin{cases} g_1^{-1}(z,z,n)=1 \\ \dfrac{\partial G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)}{\partial z}=g(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))g^{-1}(b,n)\dfrac{\partial g_2^{-1}(b,z,n)}{\partial z} \\ g(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)=z-b+g_2(b,g^{-1}(b,n)) \end{cases} \tag{3.10}$$

を用いて整理すると

$$E\{C(B,z)\}'=c-\frac{h}{m}-p+(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)db+\int_z^\infty g_2^{-1}(b,z,n)\phi(b)db\right\} \tag{3.11}$$

$$E\{C(B,z)\}''=(h+p)\int_z^\infty\frac{\partial g_2^{-1}(b,z,n)}{\partial e}\phi(b)db\geq 0 \tag{3.12}$$

となる。したがって $E\{C(B,z)\}$ を最小にする z の値は $p+\dfrac{h}{m}-c>0$ ならば

$$\int_0^{z^*}\phi(b)db+\int_{z*}^\infty g_2^{-1}(b,z,n)\phi(b)db=\frac{p+\dfrac{h}{m}-c}{(h+p)} \tag{3.13}$$

をみたす唯一の $0<z^*<\infty$ なる正根 z^* によって与えられる。

ここで，$n\to\infty$，$m\to\infty$とすると，

$$c=g^{-1}(b,\infty)=1,\ z=g(b,T/t)$$

となり

$$\frac{T}{t}=g^{-1}(b,z)=g_2^{-1}(b,z,\infty)$$

とおくと，式(3.2)～式(3.12)は

$$I_1(b,z)=z-G(b,1) \tag*{(3.2)*}$$

$$I_2(b,z)=0 \tag*{(3.4)*}$$

$$I_1(b,z)=zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z)) \tag*{(3.6)*}$$

$$I_2(b,z)=G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z))-z(1-g^{-1}(b,z)) \tag*{(3.7)*}$$

$$\begin{aligned} E\{C(B,z)\}=c(z-x)&+h\int_0^z\{z-G(b,1)\}\phi(b)db+p\int_z^\infty\{G(b,1)-z\}\phi(b)db \\ &+(h+p)\int_z^\infty\left\{zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))\right\}\phi(b)db \end{aligned} \tag*{(3.8)*}$$

$$E\{C(B,z)\}'=c-p+(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)db+\int_z^\infty g^{-1}(b,z)\phi(b)db\right\} \tag*{(3.11)*}$$

$$E\{C(B,z)\}''=(h+p)\int_z^\infty\frac{\partial g^{-1}(b,z)}{\partial z}\phi(b)db\geq 0 \tag*{(3.12)*}$$

$$\int_0^{z^*}\phi(b)db+\int_{z^*}^{\infty}g^{-1}(b,z^*)\phi(b)db=\frac{p-c}{p+h},\ p>c \tag{3.13)*}$$

となる。

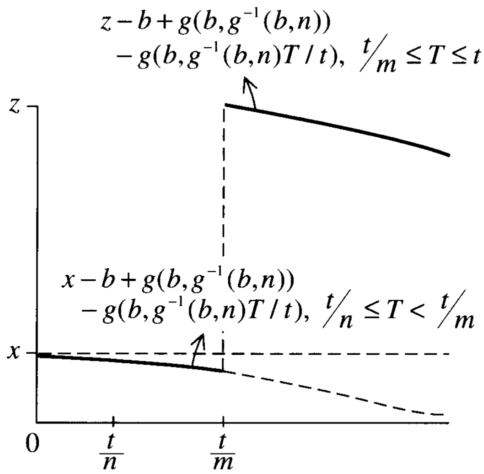
(2)　m ≤ n

この場合は t_1, t_2, t および $t/_m$ の大小関係により在庫状態は図６のようになる。

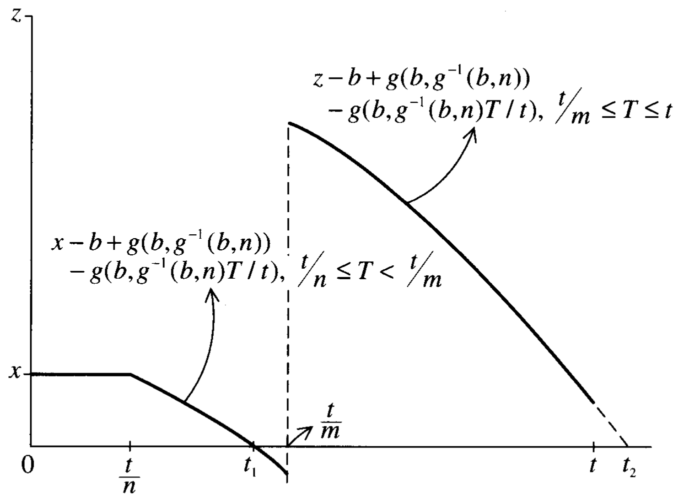
(i)　$b \le x < z$ の場合（図６，(i) を参照）

このときは，明らかに $t_1 > t/_m$ となる。$t_1 \le t/_m$ の場合を考察する必要はない。

$$\begin{aligned}
I_1(b,z)&=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/_n}^{t/_m}\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n))T/t\right)dT\right.\\
&\quad\left.+\int_{t/_m}^{t}\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n)-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right\}\\
&=\frac{x}{m}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right.\\
&\quad\left.-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\\
&\quad-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right)\\
&=\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\\
&\quad-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$



(i)　$b<x<z$, $t/_m<t_1<t_2$ の場合



(ii)　$x<b<z$, $t_1<t/m<t<t_2$ の場合

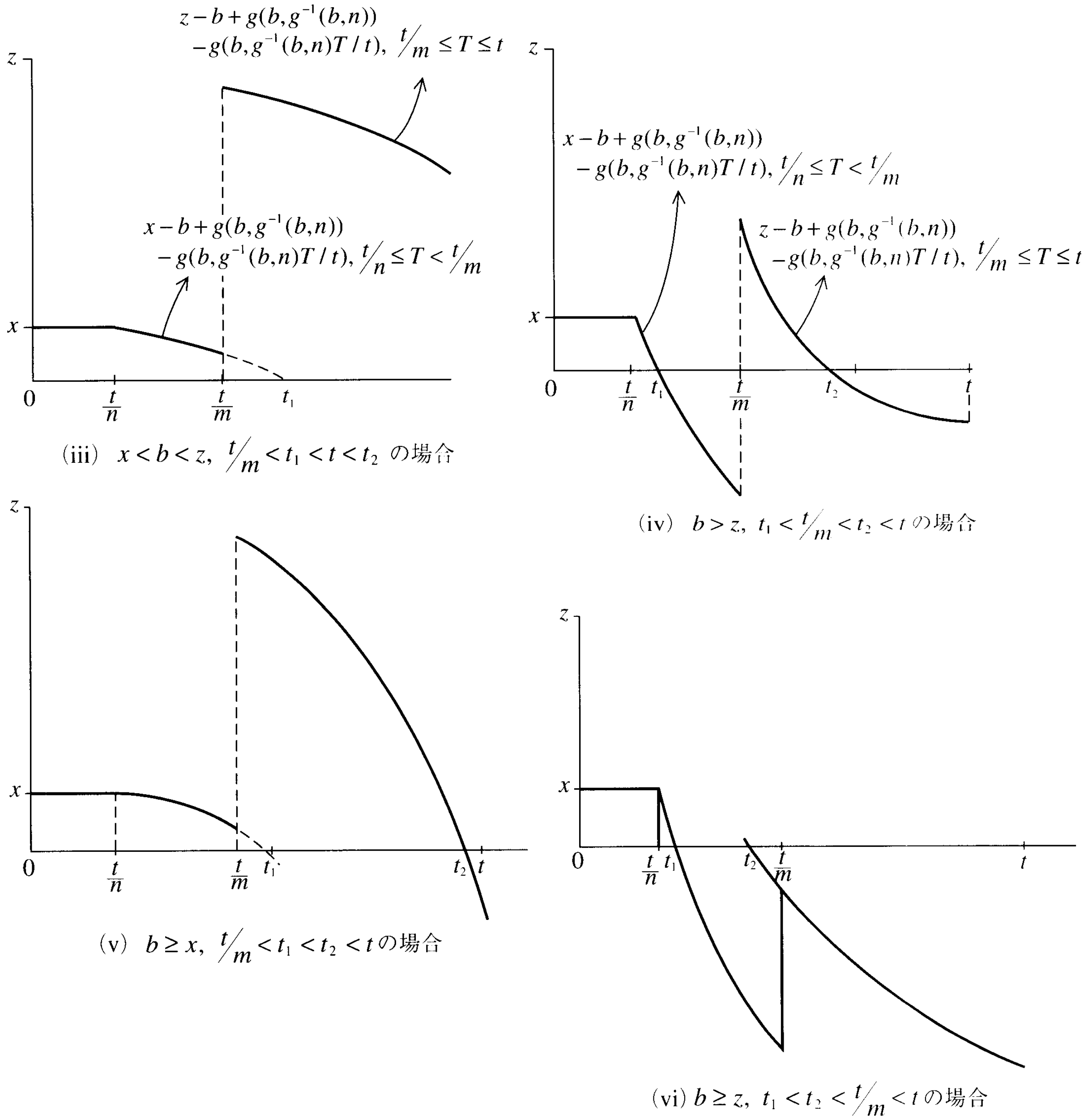


図6　在庫状態，m ≤ n

$$I_2(b,z)=0 \tag{3.15}$$

(ii)　$x<b<z,\ t_1 \le t/m\ (<t<t_2)$ の場合

$x<b<z$ のときは，$t_1 < t/m$ と $t_1 \ge t/m$ に分けて検討する必要がある。

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t_1}\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right.$$
$$\left.+\int_{t/m}^{t}\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right\}$$

$$= \frac{x}{n} + \left(x - b + g(b, g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{t_1}{t} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b, g_1^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)\right.$$

$$-G(b, g^{-1}(b,n)/n)) + (z - b + g(b, g^{-1}(b,n)))\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b, g^{-1}(b,n)) - G(b, g^{-1}(b,n)/m)\right)$$

$$= xg_1^{-1}(b,x,n) + \left(1 - \frac{1}{m}\right)z + \left(g(b, g^{-1}(b,n)) - b\right)\left(1 - \frac{1}{m} + g_1^{-1}(b,x,n) - \frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b, g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n)) - G(b, g^{-1}(b,n)/n) + G(b, g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\left.-G(b, g^{-1}(b,n)/m)\right) \tag{3.16}$$

ここに，t_1/t の値は

$$x - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g^{-1}(b,n)T/t) = 0, \quad t/n \le T < t/m \tag{3.17}$$

をみたす唯一の根で $g_1^{-1}(b,x,n)$ とおく。

$$I_2(b,z) = \frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t/m}\left(g(b, g^{-1}(b,n)T/t) - g(b, g^{-1}(b,n)) + b - x\right)dT\right\}$$

$$= \left(b - x - g(b, g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{1}{m} - g_1^{-1}(b,x,n)\right) + \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b, g^{-1}(b,n)/m)\right.$$

$$\left.-G(b, g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))\right) \tag{3.18}$$

(iii)　$x < b < z.\ t/m < t_1 (< t)$ の場合（図６，(iii) を参照）

$$I_1(b,z) = \frac{1}{t}\left\{x \cdot \frac{t}{n} + \int_{t/n}^{t/m}\left(x - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right.$$

$$\left.+\int_{t/m}^{t}\left(z - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right\}$$

$$= \frac{x}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)z + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(g(b, g^{-1}(b,n)) - b)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b, g^{-1}(b,n)) - G(b, g^{-1}(b,n)/n)\right) \tag{3.19}$$

$$I_2(b,z) = 0 \tag{3.20}$$

(iv)　$b>z,\ t_1<{}^{t}\!/_{m}<t_2<t$ の場合（図6，(iv) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t_1}\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right.$$

$$\left.+\int_{t/m}^{t_2}\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n))T/t\right)dT\right.$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,x)\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$+\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{m}\right)$$

$$-\int_{g^{-1}(b,n)/n}^{g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n)}g(b,\ell)-\frac{d\ell}{g^{-1}(b,n)}-\int_{g^{-1}(b,n)/m}^{g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)}g(b,\ell)\frac{d\ell}{g^{-1}(b,n)}$$

$$=-\frac{z}{m}+xg_1^{-1}(b,x,n)+zg_2^{-1}(b,z,n)+\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\right.$$

$$\left.+g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{m}\right)-\left\{G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right.$$

$$\left.+G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right\}\frac{1}{g^{-1}(b,n)} \tag{3.21}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t/m}(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-x)\phi(b)db\right.$$

$$\left.+\int_{t_2}^{t}(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z)\phi(b)db\right\}$$

$$=\left\{-\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)x-(1-g_2^{-1}(b,x,n))z+(b-g(b,g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\cdot\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)+1-g_2^{-1}(b,z,n)\right)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b,g^{-1}(b,n)/m)-G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\left.\left.+G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right\}\right\} \tag{3.22}$$

(v)　$b>z,\ {}^{t}\!/_{m}<t_1<t_2<t$ の場合（図6，(V) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t/m}\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right.$$

$$+\int_{t/m}^{t_2}\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\Bigg\}$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{t_2}{t}-\frac{1}{m}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(t,n)}\left\{\int_{g^{-1}(b,n)/n}^{g^{-1}(b,n)/m}g(b,\ell)d\ell+\int_{g^{-1}(b,n)/m}^{g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)}g(b,\ell)d\ell\right\}$$

$$=\frac{x}{m}-\frac{z}{m}+g_2^{-1}(b,z,n)z+\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right\} \tag{3.23}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_2}^{t}\left(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)dT\right\}$$

$$=\left(1-\frac{t_2}{t}\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\int_{g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)}^{g^{-1}(b,n)}g(b,\ell)d\ell$$

$$=(1-g_2^{-1}(b,z,n))\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big\{G(b,g^{-1}(b,n))$$

$$-G\left(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)\right)\Big\} \tag{3.24}$$

（vi）　$b>z,\ t_2<{}^{t}\!/_{m}$の場合（図６，（vi）を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t_1}\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right\}$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{t_1}{t}-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))$$

$$-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right) \tag{3.25}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\Bigg\{\int_{t_1}^{t/m}\left(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-x\right)dT$$

$$+\int_{t/m}^{t}\left(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)dT\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t} g(b,g^{-1}(b,n)T/t)dT+\left(\frac{t}{m}-t_1\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-x\right)\right.$$
$$\left.+\left(t-\frac{t}{m}\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))\right\}$$
$$+\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-x\right)+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right) \tag{3.26}$$

したがって，次の 6 つのケースにわけて $E\{C(B,z)\}$ を求めることができる。

ケース 1. i) $b<x\ (t<t_1<t_2)$, ii) $x<b<x$, $t_1<{}^{t}\!/_{m}<t<t_2$, iii) $b\geq z$, $t_1<{}^{t}\!/_{m}<t_2<t$
この場合は，(i)，(ii)，(iv)（図 6，(i)，(ii)，(iv) を参照）より

$$E\{C(B,z)\}=c(z-x)+h\int_0^\infty I_1(b,z)\phi(b)db+p\int_0^\infty I_2(b,z)\phi(b)db$$
$$=c(z-x)+h\left\{\int_0^x I_1(b,z)\phi(b)db+\int_x^z I_1(b,z)\phi(b)db+\int_z^\infty I_1(b,z)\phi(b)db\right\}$$
$$+p\left\{\int_0^x I_2(b,z)\phi(b)db+\int_x^z I_2(b,z)\phi(b)db+\int_z^\infty I_2(b,z)\phi(b)db\right\}$$
$$=c(z-x)+h\int_0^x\left\{\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\right.$$
$$\left.-\frac{G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)db$$
$$+h\int_x^z\left\{xg_1^{-1}(b,x,n)+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}+g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{m}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\right.$$
$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)+G(b,g^{-1}(b,n))\right.$$
$$\left.\left.-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right)\right\}\phi(b)db$$
$$+h\int_z^\infty\left\{-\frac{z}{m}+xg_1^{-1}(b,x,n)+zg_2^{-1}(b,z,n)+\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{n}+g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{m}\right)$$
$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right.$$

$$+G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\Big)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$+p\int_x^z\Bigg\{\big(b-x-g(b,g^{-1}(b,n))\big)\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)/m)-G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))\Big)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$+p\int_z^\infty\Bigg\{-\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)x-(1-g_2^{-1}(b,x,n))z$$

$$+\big(b-g(b,g^{-1}(b,n))\big)\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)+1-g_2^{-1}(b,z,n)\right)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)/m)-G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))$$

$$+G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\Big)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$=c(z-x)+h\left(1-\frac{1}{m}\right)z\int_0^z\phi(b)db+h\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_0^z\big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\big)\phi(b)db$$

$$+h\int_0^z\frac{\{G(b,g^{-1}(b,n)/n)-G(b,g^{-1}(b,n)\}}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)db$$

$$+h\int_x^\infty\Bigg\{xg_1^{-1}(b,x,n)+\big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\big)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{m}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\Big)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$+h\int_z^\infty\Bigg\{\big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\big)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{n}\right)+\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{m}\right)z$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$+p\int_x^\infty\Bigg\{\big(b-x-g(b,g^{-1}(b,n))\big)\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)/m)-G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))\Big)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$+p\int_z^\infty\Bigg\{(1-g_2^{-1}(b,z,n))\big(b-z-g(b,g^{-1}(b,z))\big)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\Big)\Bigg\}\phi(b)db \tag{3.27}$$

となる。また，

$$E\{C(B,z)\}' = c - \frac{h}{m} - p + (h+p)\left\{\int_0^z \phi(b)db + \int_z^\infty g_2^{-1}(b,z,n)\phi(b)db\right\} \tag{3.28}$$

$$E\{C(B,z)\}'' = (h+p)\int_z^\infty \frac{\partial g_2^{-1}(b,z,n)}{\partial z}\phi(b)db \geq 0$$

となる。ここで関係式

$$\left.\begin{array}{l} g_2^{-1}(z,z,n) = 1 \\ z - b + g(b, g^{-1}(b,n)) - g(b, g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)) = 0 \\ g(z, g^{-1}(z,n)) = g(z, g_2^{-1}(z,z,n)g^{-1}(z,n)) \end{array}\right\} \tag{3.29}$$

を用いた。

したがって $E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値 z^* は

$$\int_0^{z^*}\phi(b)db + \int_{z^*}^\infty g_2^{-1}(b,z,n)\phi(b)db = \frac{p + \dfrac{h}{m} - c}{(h+p)} \tag{3.30}$$

をみたさなければならない。

ケース 2. i) $b > x$ $(t < t_1 < t_2)$, ii) $x < b < z$, $t/m < t_1 < t < t_2$, iii) $b \geq z$, $t/m < t_1 < t_2 < t$

この場合は（i)，(iii)，(v)（図 6，(i)，(iii)，(v) を参照）より

$$\begin{aligned} E\{C(B,z)\} &= c(z-x) + h\int_0^\infty I_1(b,z)\phi(b)db + p\int_0^\infty I_2(b,z)\phi(b)db \\ &= c(z-x) + h\left\{\int_0^x \left\{\frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(b, g^{-1}(b,n)) - b\right)\right.\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)) - G(b, g^{-1}(b,n)/n)\right)\right\}\phi(b)db \\ &\quad + \int_x^z \left\{\frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n)) - b\right)\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)) - G(b,g^{-1}(b,n)/n\right)\right\}\phi(b)db \\ &\quad + \int_z^\infty \left\{\frac{x}{m} - \frac{z}{m} + g_2^{-1}(b,z,n)z + \left(g(b,g^{-1}(b,n)) - b\right)\left(g_2^{-1}(b,z,n) - \frac{1}{n}\right)\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b, g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)) - G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\right\}\phi(b)db \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+p\int_z^\infty\Bigg\{(1-g_2^{-1}(b,z,n))\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)\\
&+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right)\Bigg\}\phi(b)db\\
&=c(z-x)+h\Bigg\{\int_0^z\Bigg\{\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\\
&-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\Bigg\}\phi(b)db\\
&+\int_z^\infty\Bigg\{\frac{x-z}{m}+g_2^{-1}(b,z,n)z+\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{n}\right)\\
&-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\Bigg\}\phi(b)db\Bigg\}\\
&+p\int_z^\infty\Bigg\{(1-g_2^{-1}(b,z,n))\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)\\
&+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right)\Bigg\}\phi(b)db\\
&=c(z-x)+\frac{h}{m}(x-z)+h\int_0^\infty\Bigg\{\frac{1}{n}\left(b-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\\
&+\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}\Bigg\}\phi(b)db\\
&+(h+p)\int_z^\infty\Bigg\{\left(g(b,g^{-1}(b,n))+z-b\right)g_2^{-1}(b,z,n)\\
&-\frac{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\Bigg\}\phi(b)db\\
&+h\int_0^z\Bigg\{z+g(b,g^{-1}(b,n))-b-\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\Bigg\}\phi(b)db\\
&-p\int_z^\infty\Bigg\{z+g(b,g^{-1}(b,n))-b-\frac{G(b,g^{-1}(b,n)}{g^{-1}(b,n)}\Bigg\}\phi(b)db
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

関係式(3.29)を用いて $E\{C(B,z)\}'$ を計算すると，

$$
E\{C(B,z)\}'=c-\frac{h}{m}-p+(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)db+\int_z^\infty g_2^{-1}(b,z,n)\phi(b)db\right\}
\tag{3.32}
$$

となる。また，

$$E\{C(B,z)\}'' = (h+p)\int_z^{\infty} \frac{\partial g_2^{-1}(b,z,n)}{\partial z}\phi(b)db \geq 0 \tag{3.33}$$

となる。したがって $E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値 z^* は

$$\int_0^{z^*}\phi(b)db + \int_{z^*}^{\infty} g_2^{-1}(b,z,n)\phi(b)db = \frac{p+\dfrac{h}{m}-c}{(h+p)},\quad p+\frac{h}{m}-c>0 \tag{3.34}$$

をみたさなければならない。

ケース3. i) $b \leq x,\ t < t_1 < t_2$, ii) $x < b \leq z,\ t_1 < t/m < t < t_2$, iii) $b \geq z,\ t_1 < t_2 < t/m < t$

この場合は，(i)，(ii)，(vi)（図6，(i)，(ii)，(vi) を参照）より

$$E\{C(B,z)\} = c(z-x) + h\int_0^{\infty} I_1(b,z)\phi(b)db + p\int_0^{\infty} I_2(b,z)\phi(b)db$$

$$= c(z-x) + h\int_0^{x}\left\{\frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n)-b\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)) - G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\right\}\phi(b)db$$

$$+ h\int_x^{z}\left\{xg_1^{-1}(b,x,n) + \left(1-\frac{1}{m}z\right)\right.$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}+g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{m}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n)) - G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)$$

$$\left. + G(b,g^{-1}(b,n)) - G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right)\right\}\phi(b)db$$

$$+ h\int_z^{\infty}\left\{\frac{x}{n} + \left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n)) - G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\right\}\phi(b)db$$

$$+ p\int_x^{z}\left\{\left(b-x-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)/m) - G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n)\right)\right\}\phi(b)db$$

$$+ p\int_z^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)\left(-g(bg^{-1}(b,n)) + b - x\right)\right.$$

$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))\right)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$=c(z-x)+h\Bigg\{\frac{x}{m}\int_0^x\phi(b)db+\int_0^z\Bigg\{\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$+\int_x^z\Bigg\{xg_1^{-1}(b,x,n)+\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{m}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$+\int_z^\infty\Bigg\{\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\Bigg\}\phi(b)db\Bigg\}$$

$$+p\Bigg\{\int_x^\infty\Bigg\{\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)\left(b-x-g(b,g^{-1}(b,n))\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))\right)\Bigg\}\phi(b)db$$

$$+\int_x^z\left\{\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/m)}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)db+\int_z^\infty\Bigg\{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(b-z-g(b,g^{-1}(b,n))\right)$$

$$+\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\Bigg\}\phi(b)db\Bigg\} \tag{3.35}$$

$$E\{C(B,z)\}'=c+h\Bigg\{\int_0^z\left(1-\frac{1}{m}\right)\phi(b)db+\Bigg\{\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)(g(z,g^{-1}(z,n)-z)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(z,n)}\left(G(z,g^{-1}(z,n))-G(z,g^{-1}(z,n)/n)\right)\Bigg\}\phi(z)$$

$$+\Bigg\{xg_1^{-1}(z,x,n)+\left(g_1^{-1}(z,x,n)-\frac{1}{m}\right)\left(g(z,g^{-1}(z,n))-z\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(z,n)}\left(G(z,g_1^{-1}(z,x,n)g^{-1}(z,n))-G(z,g^{-1}(z,n)/m)\right)\Bigg\}\phi(z)$$

$$
\begin{aligned}
&-\left\{\frac{x}{n}+\left(x-z+g(z,g^{-1}(z,n))\right)\left(g_1^{-1}(z,x,n)-\frac{1}{n}\right)\right.\\
&\left.-\frac{1}{g^{-1}(z,n)}\left(G(z,g_1^{-1}(z,x,n)g^{-1}(z,n)-G(z,g^{-1}(z,n)/m)\right\}\phi(z)\right\}\\
&+p\left\{\frac{G(z,g^{-1}(z,n)/m)}{g^{-1}(z,n)}\phi(z)-\left(1-\frac{1}{m}\right)\int_z^{\infty}\phi(b)db\right.\\
&\left.+\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)g(z,g^{-1}(z,n))-\frac{G(z,g^{-1}(z,n)}{g^{-1}(z,n)}\right)\phi(z)\right\}\\
&=c-\left(1-\frac{1}{m}\right)p+\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)\int_0^{z}\phi(b)db\\
&+(h+p)\phi(z)\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)g(z,g^{-1}(z,n))+\frac{1}{g^{-1}(z,n)}\left(G(z,g^{-1}(z,n)/n)\right.\right.\\
&\left.\left.-G(z,g^{-1}(z,n))\right)\right\} \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

$E\{C(B,z)\}''\geq 0$を仮定すると，$E\{C(B,z)\}$を最小にする z の値 z^* は

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{z^*}\phi(b)db+\phi(z^*)\left\{g(z^*,g^{-1}(z^*,n))+\frac{1}{\left(1-\frac{1}{m}\right)g^{-1}(z,n)}\left(G(z^*,g^{-1}(z^*,n)/m)\right.\right.\\
&\left.\left.-G(z^*,g^{-1}(z^*,n))\right)\right\}=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{m}(h+p)\right)} \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

をみたさなければならない。

ケース 4. i）$b\leq x, t<t_1<t_2$，ii）$x<b<z, t/m<t_1<t<t_2$，iii）$b\geq z, t/m<t_1<t_2<t$

ケース 5. i）$b\leq x, t<t_1<t_2$，ii）$x<b<z, t/m<t_1<t<t_2$，iii）$b\geq z, t_1<t/m<t_2<t$

ケース 6. i）$b\leq x, t<t_1<t_2$，ii）$x<b<z, t/m<t_1<t<t_2$，iii）$b\geq z, t_1<t_2<t/m<t$

はおこらない。

4.　一般的需要関数の特定化

3. では需要形態を表わす関数 $g(b, T/t)$ は，T/t に関して微分可能な単調増加関数という条件を付しただけであった。そこでこれを若干具体的にして $b(T/t)^k$ $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \infty;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots$ とおいてみよう。もちろん，これが上記条件をみたすことは明らかである。このとき，

$$G(b,\ell)=\int_0^\ell g(b,s)ds=b\int_0^\ell s^k ds==\frac{b\ell^{k+1}}{k+1} \tag{4.1}$$

また，

$$g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)/n)=b \tag{4.2}$$

より

$$b(g^{-1}(b,n))^k-b(g^{-1}(b,n)/n)^k=b,\quad k\fallingdotseq 0$$

よって

$$g^{-1}(b,n)=\frac{n}{(n^k-1)^{1/k}},\ k\fallingdotseq 0,\ k=0\ \text{のとき},\ g^{-1}(b,n)=1\ \text{とする。} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}g(b,g^{-1}(b,n))=b(g^{-1}(b,n))^k&=b\frac{n^k}{n^k-1},\ k\fallingdotseq 0,\\&=b,\ k=0\end{aligned} \tag{4.4}$$

となり，

$$\begin{aligned}&x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)g_1(b,x,n))\\&=x-b+b\frac{n^k}{n^k-1}-b\frac{n^k}{n^k-1}g_1(b,x,n)^k=0,\ k\fallingdotseq 0\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}&z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)g_2(b,z,n))\\&=z-b+b\frac{n^k}{n^k-1}-b\frac{n^k}{n^k-1}g_2(b,x,n)^k=0,\ k\fallingdotseq 0\end{aligned}$$

より，

$$g_1^{-1}(b,x,n)=\left(1-\frac{1}{n^k}\right)^{1/k}\left(\frac{x}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k}=\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\left(\frac{x}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k},\ k\fallingdotseq 0 \tag{4.5}$$

$$g_2^{-1}(b,z,n)=\left(1-\frac{1}{n^k}\right)^{1/k}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k}=\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k},\ k\fallingdotseq 0 \tag{4.6}$$

$$g_1^{-1}(b,x,n)=g_2^{-1}(b,z,n)=\frac{1}{n},\ k=0 \tag{4.7}$$

となる。

また式(4.1)，(4.3)，(4.4)，(4.5)および(4.6)を用いて

$$G(b,g^{-1}(b,n)=\frac{b}{k+1}(g^{-1}(b,n)^{k+1}=\frac{b}{k+1}\left(\frac{n}{(n^k-1)^{1/k}}\right)^{k+1}=\frac{b}{k+1}\cdot\frac{n^k}{n^k-1}\cdot\frac{n}{(n^k-1)^k},\ k\fallingdotseq 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{G(b,g^{-1}(b,n)}{g^{-1}(b,n)}=\frac{n^k b}{(n^k-1)(k+1)},\ k\fallingdotseq 0 \tag{4.9}$$

$$G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))=\frac{b}{k+1}(g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))^{k+1}=\frac{b}{k+1}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1+\frac{1}{k}},k\fallingdotseq 0 \tag{4.10}$$

$$\frac{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}=\frac{(n^k-1)^{1/k}b}{n(k+1)}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1+1/k},\ k\fallingdotseq 0 \tag{4.11}$$

$$G(b,g^{-1}(b,n)/n)=\frac{b}{k+1}(g^{-1}(b,n)/n)^{k+1}=\frac{b}{(k+1)(n^k-1)^{1+1/k}},\ k\fallingdotseq 0 \tag{4.12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}=\frac{b}{n(k+1)(n^k-1)},\ k\neq 0\\
&G(b,g^{-1}(b,n))-\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}=b,\ k=0,\\
&G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))=\frac{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}=\frac{b}{n},\ k=0\\
&G(b,g^{-1}(b,n)/n)=\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}=\frac{b}{n},k=0
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

これらを用いて 3. における諸式を計算すると，つぎのようになる。重要な式番号に＊印をつけておく。

(1)　$m>n$

$$E\{C(B,z)\}=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+h\int_0^\infty\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\cdot\frac{b}{k+1}\left(\frac{1}{(n^k-1)^{1/k}}\right)^{k+1}\phi(b)db$$

$$+p\int_0^\infty\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n},\ \frac{b}{k+1}\left(\frac{n}{(n^k-1)^{1/k}}\right)^{k+1}\phi(b)db$$

$$+\left(\frac{h}{n}+p\right)\int_0^\infty\left(b-b\frac{n^k}{n^k-1}\right)\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_0^z\left\{z-b+\frac{n^k b}{n^k-1}-\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\cdot\frac{b}{k+1}\left(\frac{n}{(n^k-1)^{1/k}}\right)^{k+1}\right\}\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_z^\infty\left\{\left(z-b+b\frac{n^k}{n^k-1}\right)\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k}\right.$$

$$\left.-\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\cdot\frac{b}{k+1}\left(\frac{n}{(n^k-1)^{1/k}}\cdot\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k}\right)^{k+1}\right\}\phi(b)db$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+\frac{h}{n(k+1)(n^k-1)}\int_0^\infty b\phi(b)db$$

$$+\frac{n^k p}{(k+1)(n^k-1)}\int_0^\infty b\phi(b)db-\left(\frac{h}{n}+p\right)\frac{1}{(n^k-1)}\int_0^\infty b\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_0^z\left(z+\frac{(k+1-n^k)b}{(n^k-1)(k+1)}\right)\phi(b)db$$

$$+\frac{k(n^k-1)^{1/k}(h+p)}{n(k+1)}\int_z^\infty\left(z+\frac{b}{n^k-1}\right)\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k}\phi(b)db$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+\frac{np(n^k-k-1)-kh}{n(n^k-1)(k+1)}\int_0^\infty b\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_0^z\left(z+\frac{(k+1-n^k)b}{(n^k-1)(k+1)}\right)\phi(b)db$$

$$+\frac{(n^k-1)^{1/k}k+(h+p)}{n(k+1)}\int_z^\infty b\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1+1/k}\phi(b)db \qquad (3.8)^*$$

$$E\{C(B,z)\}'=c-\frac{k}{m}-p+(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)db+\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\int_z^\infty\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k}\phi(b)bd\right\} \qquad (3.11)^*$$

$$E\{C(B,z)\}''=(h+p)\left\{\frac{(n^k-1)}{nk}\int_z^\infty\frac{1}{b}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k-1}\phi(b)db\right\}\geq 0 \qquad (3.12)^*$$

$$\int_0^{z^*}\phi(b)db+\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\int_z^\infty\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k}\phi(b)db=\frac{p+\frac{h}{m}-c}{(h+p)} \qquad (3.13)^*$$

ここで，$k=1$ とおくと，

式(3.8)* は式(2.5)，式(3.11)* は式(2.6)，式(3.13)* は式(2.8)にそれぞれ一致する。こ

れは，つぎのように計算で確かめられる。

$k=1$ とおくと，

式(3.8)* は

$$\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+\frac{np(n-2)-h}{2n(n-1)}\int_0^\infty b\phi(b)db+(h+p)\int_0^z\left(z+\frac{(2-n)b}{2(n-1)}\right)\phi(b)db$$

$$+\frac{(n-1)(h+p)}{2n}\int_z^\infty b\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n-1}\right)^2\phi(b)db$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+\frac{np(n-2)-h}{2n(n-1)}\int_0^\infty b\phi(b)db+(h+p)z\int_0^z\phi(b)db$$

$$+\frac{(h+p)(2-n)}{2(n-1)}\int_0^z b\phi(b)db+\frac{(n-1)(h+p)}{2n}\left\{z^2\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{2z}{n-1}\int_z^\infty\phi(b)db\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n-1)^2}\int_z^\infty b\phi(b)db\right\}$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+\frac{np(n-2)-h}{2n(n-1)}\int_0^\infty b\phi(b)db+(h+p)z\int_0^z\phi(b)db$$

$$+\frac{(h+p)(2-n)}{2(n-1)}\int_0^z b\phi(b)db+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\frac{z^2}{2}\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db$$

$$+\frac{(h+p)z}{n}\left(1-\int_0^z\phi(b)db\right)+\frac{(h+p)}{2n(n-1)}\left(\int_0^\infty b\phi(b)db-\int_0^z b\phi(b)db\right)$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+\frac{(h+p)z}{n}+\left(\frac{np(n-2)-h}{2n(n-1)}+\frac{h+p}{2n(n-1)}\right)\int_0^\infty b\phi(b)db$$

$$+(h+p)\left(1-\frac{1}{n}\right)z\int_0^z\phi(b)db+\frac{(h+p)}{2(n-1)}\left(2-n-\frac{1}{n}\right)\int_0^z b\phi(b)db$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\frac{z^2}{2}\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)h+\left(1-\frac{1}{n}\right)p\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{p}{2}\int_0^\infty b\phi(b)db$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)z\int_0^z\phi(b)db+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{(h+p)}{2}\int_0^z b\phi(b)db$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\frac{z^2}{2}\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db$$

式(3.11)* は

$$c-\frac{h}{m}-p+(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)db+\frac{(n-1)}{n}\int_z^\infty\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n-1}\right)\phi(b)db\right.$$

$$=c-\frac{h}{m}-p+(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)db+\left(1-\frac{1}{n}\right)z\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{n}\int_z^\infty\phi(b)db\right\}$$

$$=c-\frac{h}{m}-p+(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)db+\left(1-\frac{1}{n}\right)z\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{n}\left(1-\int_0^z\phi(b)db\right)\right\}$$

$$=c-\frac{h}{m}-p+(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_0^z\phi(b)db+\left(1-\frac{1}{n}\right)z\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{n}\right\}$$

$$=c-\frac{h}{m}-p+\frac{h+p}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\left\{\int_0^z\phi(b)db+z\int_z^\infty\frac{\phi(b)}{b}db\right\}$$

式(3.13)*は

$$\int_0^{z^*}\phi(b)db+\left(1-\frac{1}{n}\right)z^*\int_{z^*}^\infty\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{n}\int_{z^*}^\infty\phi(b)db$$

$$=\int_0^{z^*}\phi(b)db+\left(1-\frac{1}{n}\right)z^*\int_{z^*}^\infty\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{n}\left(1-\int_0^{z^*}\phi(b)db\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_0^{z^*}\phi(b)db+\left(1-\frac{1}{n}\right)z^*\int_{z^*}^\infty\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{n}$$

この値が $\left(p+{}^{h}\!/_{m}-c\right)/(h+p)$ となることより

$$\int_0^{z^*}\phi(b)db+z^*\int_{z^*}^\infty\frac{\phi(b)}{b}db=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left\{\frac{p+\frac{h}{m}-c}{(h+p}-\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)h+\left(1-\frac{1}{n}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)}$$

となる。

$k=0$ とおくと，式(3.8)に式(4.1)，(4.3)，(4.4)，(4.7)，(4.13) を代入して

$$E\{C(B,z)\}=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+\left(\frac{h}{n}+p\right)\int_0^\infty b\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_0^z(z-b)\phi(b)db+(h+p)\int_z^\infty\frac{1}{n}(z-b)\phi(b)db$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+c+\left(\frac{1}{n}-1\right)p\right\}z+\left(1-\frac{1}{n}\right)p\int_0^\infty b\phi(b)db$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\int_0^z(z-b)\phi(b)db$$

となり式(1.3)と一致する。

む　す　び

発注時点，需要の払い出し始点および需要形態の確率的在庫モデルへの影響について，一期間モデルに限定して検討した。多期間モデルの検討は今後の課題である。

付記．本論文は2001年度広島修道大学総合研究所調査研究費（研究課題「動的計画法の理論的・応用的研究」）による研究成果の一部である。

参　考　文　献

[1] Kabak, I. W.: "Partial Returns in the Single Period Inventory Model," IE News. **19**(2), 1984, pp.1–3.

[2] Bellman, R: *Dynamic Programming*, Princetion, N. J., Princetion Univ. Press, 1957.

[3] 兒玉正憲：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅰ）」経済学研究，Vol. **55**, No. 6，九州大学経済学会，1990，pp. 31–48.

[4] 兒玉正憲：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅱ）」経済学研究，Vol. **56**, No. 1・2, 九州大学経済学会，1990，pp. 277–293.

[5] 兒玉正憲：「返却および追加注文を許す多期間確率的在庫モデル」経済学研究，Vol. **56**, No. 4，九州大学経済学会，1991，pp. 1–26.

[6] 兒玉正憲：「ある非凸期待費用関数の最適政策（Ⅰ）」経済学研究，Vol. **57**, No. 2，九州大学経済学会，1991，pp. 1–26.

[7] 兒玉正憲：「ある非凸期待費用関数の最適政策（Ⅱ）」経済学研究，Vol. **57**, No. 3・4，九州大学経済学会，1991，pp. 175–198.

[8] 兒玉正憲：「ある確率的システムの最適政策（Ⅰ）」経済学研究，Vol. **58**，No. 2，九州大学経済学会，1992，pp. 35–50.

[9] 兒玉正憲：「ある確率的システムの最適政策（Ⅱ）」経済学研究，Vol. **58**，No. 3，九州大学経済学会，1993，pp. 17–27.

[10] Kodama, M.: "Some Probabilistic Inventory Problems with Various Demmand Pattern", Journal of Information & Optimization Science, Vol. **17**, No. 1, 1996, pp. 17–48.

[11] 兒玉正憲：「区分的費用関数をもと動的在庫モデル（Ⅰ）」経済科学研究，第1巻第1・2合併号，広島修道大学経済科学会，1998，pp. 99–122.

[12] 兒玉正憲：「区分的費用関数をもつ動的在庫モデル（Ⅱ）」経済科学研究，第2巻第1号，広島修道大学経済科学会，1998，pp. 33–60.

[13] 兒玉正憲，北原貞輔：「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究．**47**(5–6)，九州大学経済学会，1983，pp. 49–72.

[14] 兒玉正憲，坂口通則：「区分的費用関数をもつ動的在庫モデルの最適政策（Ⅰ）」経済科学研究，第2巻第2号，広島修道大学経済科学会，1999，pp. 143–150.

[15] 兒玉正憲，坂口通則：「区分的費用関数をもつ動的在庫モデルの最適政策（Ⅱ）」経済科学研究，第3巻

第 1 号，広島修道大学経済科学会，1999，pp. 95–136.
[16] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Some comments on the probabilistic dynamic inventory problems with piecewise cost functions", to appear, Narosa New Delhi.
[17] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Stochastic inventory models with piecewise cost functions", to appear, Narosa New Delhi.
[18] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Probalilistic analysis of dynamic inventory models with general demand pattern, Journal of Information & Optimization Sciences, Vol. **22**, No.1, 2001, pp. 57–72.
[19] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "On the dynamic programming on the probabilistic inventory models with multiple piecewise cost functions", to apper in Journal of Information & Optimization Sciences.
[20] 兒玉正憲：「生産・在庫管理システムの基礎」，九州大学出版会，1996.
[21] 兒玉正憲，坂口通則：「区分的費用関数をもつ確率的在庫モデルの研究」，広島修道大学研究叢書，2002.
[22] Monks, J.G.: *Operations Management. Theory and Problem*, McGraw Hill, 1977.
[23] Naddor, E.: *Inventory System*, John Wiley, 1966.
[24] Scharf, H. E., D. M. Gilford, and M. W. Shelly: *Multistage Inventory Models and Techniques*, Stanford, Calif, Stanford Univ. Press, 1963.
[25] 徂徠三十六，有薗育生，大田　宏：「返却および追加注文を許す一期間モデルの解法」日本経営工学会誌 **37**(2), 1986, pp. 100–105.