追加注文を許す動的在庫問題の一考察

坂口　通則・兒玉　正憲

（受付　2002年5月10日）

1. は じ め に

参考文献［2］から［15］までで，著者達は区分的費用関数をもつ動的在庫モデルの研究を行ってきた。購入費用，在庫維持費用，品切損失費用の和を総費用として，多期間に渡っての費用を考える。このとき，各期間で行う経済的な発注量を求めるという在庫問題である。動的基本モデルとして，発注費を考慮する必要がなく，発注量は期首に即時的にみたされ，需要量は確率的に変化するモデルがある。すなわち，x を前期からの繰越在庫量，$\phi(b)$ を一期間の需要 B の確率密度関数とする。更に，c を購入費用（単位当たり），h を在庫維持費用（単位当たり，期当たり），p を品切費用（単位当たり，期当たり）とし，z を期首在庫量とする。これは期首の正規発注量が $z-x$ であることを示す。このとき，一期の総費用の期待値 $E\{C(B,z)\}$ は

$$E\{C(B,z)\} = c(z-x) + hE\{\text{在庫維持費}\} + pE\{\text{品切損失費}\}.$$

である。問題の解析のために関数 $H(z)$ を等式 $E\{C(B,z)\} = -cx + H(z)$ で定義し，繰り越し在庫が x のとき，$f_1(x)$ を一期間の総費用の最小期待値とする。このとき，

$$f_1(x) = \min_{z\geq x}\{-cx + H(z)\}$$

が成立する。

多期間を考えるときは，確率密度関数 $\phi(b)$ は各期間同一とし，需要は期間ごとに独立に起こるとする。多期間問題とのきは，価格の変化を考慮するために割引率 $\alpha\,(<1)$ を考える。$f_n(x)$ を各期首に最適政策を施した結果，n 期間の総費用の最小期待値とすると，等式

$$f_n(x) = \min_{z\geq x}\left\{-cx + H(z) + \alpha\int_0^\infty f_{k-1}(z-b)\phi(b)db\right\}$$

が成立する。$H(z)$ が区分的関数のとき，一連の論文で最適政策を求めるための理論が展開されてきた。

そのもとになる数学モデルの仮定は，次のようになる。$R_1, \ldots, R_m$ を $R_1 < \cdots < R_m$ となる数列とする。関数 $H(z)$ の区間［R_{i-1}, R_i］に制限した関数を $H_i(z)$ $(1 \leq i \leq m+1)$ とする。こ

こで，$(-\infty,\ R_1]$を $[R_0, R_1]$ と，$[R_m,\ \infty)$ を $[R_{\mathrm{m}}, R_{m+1}]$ と略記した。すべての関数 $H_i(z)$ は区間 $[R_{i-1},\ R_i]$ で連続な 2 次の導関数をもち，更に $[R_{i-1},\ R_i]$ で凸関数である。更に条件

$$H_i'(R_i) = H_{i+1}'(R_i) \quad (i \quad 1 \le i \le m)$$
$$\lim_{z\to-\infty} H_1'(z) < 0,\ \lim_{z\to\infty} H_{m+1}'(z) > c.$$

を満たす。

最近著者達は参考文献［16］から［18］で，上の数学モデルの拡張を試みた。すなわち，条件を緩めて

$$H_i'(R_i) \le H_{i+1}'(R_i) \quad (i \quad 1 \le i \le m)$$

であるモデルの解析を始めた。

多くの簡単な動的在庫モデルは，条件 $H_i'(R_i) = H_{i+1}'(R_i)$ を満たすと思われる。この論文では，論文［4］の手法を踏襲して，条件 $H_i'(R_i) \ne H_{i+1}'(R_i)$ をみたす応用モデルを示している。しかし，残念ながら，このモデルでは条件 $H_i'(R_i) \le H_{i+1}'(R_i)$ ではなくて条件 $H_i'(R_i) > H_{i+1}'(R_i)$ が起こっている。そのためには，確率変数 B について制限が必要となる。この論文では一期の議論だけ行うが，多期間の理論への拡張を考慮した扱いを行う。

2. 在 庫 モ デ ル

2.1　モデルの設定

(1)　多期間在庫モデルとして，過剰需要は後期需要として扱われる。需要の発生は，一般的な関数に従うものとする。また発注の段取り費用はかからないとし，発注後直ちに入荷するものとする。

(2)　各期の期首に正規発注が行われ，単価 c_1 で入荷し，発注間隔は t である。x を初期在庫量，z を正規発注後の初期在庫量，y を正規発注量とする。このとき，$z = x + y$ の関係式がある。

(3)　単位当たり 1 期間の在庫維持費を h とし，単位当たり 1 期間の品切費用を p とする。ただし $c_1 < p$ とする。

(4)　各期の需要 B は確率変数である。$\Phi(b)$ を B の分布関数，$\phi(b)$ をB の密度関数とし，$\phi(b) = 0\ \ (b < 0)$ とする。関数 $\Phi(b)$ と $\phi(b)$ は各期とも同じであって，各期の需要は互いに独立に発生するものとする。

(5)　各期の決められた時期 $t_0 (0 < t_0 < t)$ において在庫量が R 以下のとき，追加発注を単価 $c_2 (c_1 \le c_2)$ で在庫量が $S (R \le S)$ になるように行う。

(6) 各期内の需要の発生は，一般の関数 $g(T/t)b$ にしたがって起こるものとする。すなわち，b を 1 期の需要の実現値とするとき，時点 $T(0 \leq T \leq t)$ での在庫量は $z - g(T/t)b$ とする。ここで関数 $g(x)$ は，区間 $[0, 1]$ で微分可能な関数で，条件 $dg(x)/dx > 0$ $(0 < x < 1)$ と $g(0) = 0$，$g(1) = 1$ を満たすものとする。

(7) 総費用は，購入費，在庫維持費，品切費の和とし，その期待値を最小にする政策を求める。

(8) $\alpha(0 < \alpha < 1)$ を割引率とする。初期在庫量が x のとき，$f_n(x)$ は n 期に渡って各期に最適な在庫を決定したときの，n 期間の最小期待費用とする。

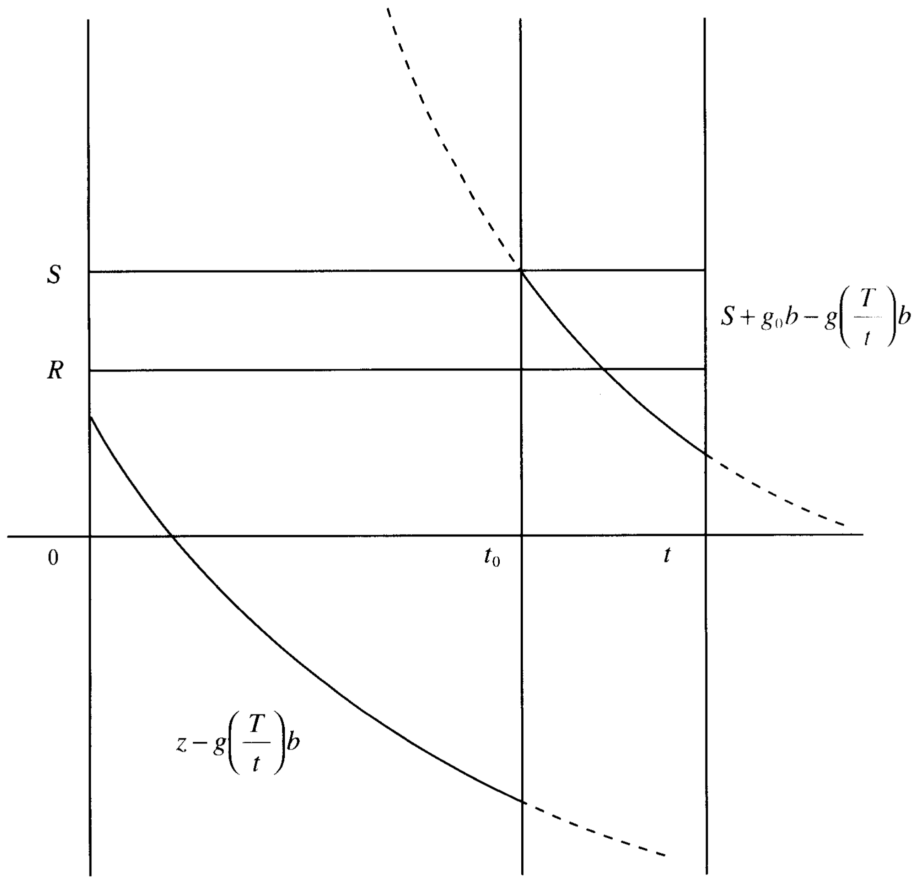

図 1

このモデルでは，過剰需要は後期需要とし扱うので，z が負のときも考える必要がある。簡単のため更なる仮定を置く。$T_0 = \dfrac{t_0}{t}$，$g_0 = g(T_0)$ とする。モデル設定の仮定から $0 < T_0 < 1$，$0 < g_0 < 1$ となる。さらに $g_0 \geq \dfrac{1}{2}$ かつ $R \leq g_0 S$ であるとする。また $\phi(b)$ は区間 $(0, \infty)$ で微分可能とする。

2.2　場合分け

場合分けは

$$\frac{z-R}{g_0},\ z,\ \frac{z}{g_0},\ \frac{S}{1-g_0}$$

の大小関係を考えて行う。そのために，次の事実が後の計算に必要になる。

(i)　$z \leq 0$ の場合。$\frac{z-R}{g_0} < 0,\ \frac{z}{g_0} \leq 0,\ 0 < \frac{S}{1-g_0}$ である。

(ii)　$0 \leq z \leq R$ の場合。$\frac{z-R}{g_0} \leq 0 \leq z \leq \frac{z}{g_0} \leq \frac{S}{1-g_0}$ である。このことは不等式

$$\frac{S}{1-g_0} - \frac{z}{g_0} \geq \frac{R}{1-g_0} - \frac{R}{g_0} = \frac{(2g_0-1)R}{(1-g_0)g_0} \geq 0$$

から分かる。

(iii)　$R \leq z \leq \frac{R}{1-g_0}$ の場合。$0 \leq \frac{z-R}{g_0} \leq z \leq \frac{z}{g_0} \leq \frac{S}{1-g_0}$ である。実際

$$z - \frac{z-R}{g_0} = \frac{(1-g_0)}{g_0}\left(\frac{R}{1-g_0} - z\right) \geq 0$$

である。

(iv)　$\frac{R}{1-g_0} \leq z \leq \frac{g_0 S}{1-g_0}$ の場合。不等式 $0 \leq z \leq \frac{z-R}{g_0} \leq \frac{z}{g_0} \leq \frac{S}{1-g_0}$ が成立する。

(v)　$\frac{g_0 S}{1-g_0} \leq z \leq R + \frac{g_0 S}{1-g_0}$ の場合。$0 \leq z \leq \frac{z-R}{g_0} \leq \frac{S}{1-g_0} \leq \frac{z}{g_0}$ である。それは

$$\frac{S}{1-g_0} - \frac{z-R}{g_0} = \frac{1}{g_0}\left(R + \frac{g_0 S}{1-g_0} - z\right) \geq 0$$

であることから分かる。

(vi)　$R + \frac{g_0 S}{1-g_0} \leq z$ の場合。$\frac{S}{1-g_0} \leq \frac{z-R}{g_0} \leq \frac{z}{g_0}$ かつ $z \leq \frac{z-R}{g_0}$ が成立する。その理由それは不等式

$$\frac{z-R}{g_0} - z = \frac{(1-g_0)}{g_0}\left(z - \frac{R}{1-g_0}\right) \geq \frac{(1-g_0)}{g_0}\left(R + \frac{g_0 S}{1-g_0} - \frac{R}{1-g_0}\right) = S - R \geq 0$$

が成り立つからである，

簡単のため $G(y)=\int_0^y g(x)dx$ とする。このとき，次の補題を得る。

補題 2.1　次の等式が成立する。

$$\frac{1}{t}\int_0^t [z-g(T/t)b]dT = z-G(1)b \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{t}\int_0^{t_0} [z-g(T/t)b]dT = T_0 z-G(T_0)b \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^t [z-g(T/t)b]dT = (1-T_0)z-(G(1)-G(T_0))b \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)} [z-g(T/t)b]dT = zg^{-1}(z/b)-G(g^{-1}(z/b))b \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)} [z-g(T/t)b]dT = (g^{-1}(z/b)-T_0)z+\left(G(T_0)-G(g^{-1}(z/b))\right)b \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^t [-z+g(T/t)b]dT = (g^{-1}(z/b)-1)z+\left(G(1)-G(g^{-1}(z/b))\right)b \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^t [S+g_0 b-g(T/t)b]dT = (1-T_0)(S+g_0 b)-(G(1)-G(T_0))b \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)} [S+g_0 b-g(T/t)b]dT &= \left(g^{-1}((S/b)+g_0)-T_0\right)(S+g_0 b)\\ &+\left(G(T_0)-G\left(g^{-1}((S/b)+g_0)\right)\right)b\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^t [-S-g_0 b+g(T/t)b]dT &= \left(g^{-1}((S/b)+g_0)-1\right)(S+g_0 b)\\ &+\left(G(1)-G(g^{-1}((S/b)+g_0))\right)b\end{aligned} \tag{2.9}$$

証明．この補題は簡単に確かめられる。

2.3　関数 $I_i(b,z)$，$I_{ij}(b,z)$，$H_i(z)$

初期在庫量が z で 1 期の需要量が b のとき，$I_1(b,z)$ を在庫維持量の期当たりの平均とする。さらに $I_{1j}(b,z)$ $(1\le j\le 5)$ を次の等式で定義する。

$$I_1(b,z)=\begin{cases} I_{11}(b,z) & z\le 0 \text{ のとき}, \\ I_{12}(b,z) & 0\le z\le R \text{ のとき}, \\ I_{13}(b,z) & R\le z\le \dfrac{R}{1-g_0} \text{ のとき}, \\ I_{14}(b,z) & \dfrac{R}{1-g_0}\le z\le R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0} \text{ のとき}, \\ I_{15}(b,z) & R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0}\le z \text{ のとき}. \end{cases} \tag{2.10}$$

同様に $I_2(b,z)$ を品切量の期当たりの平均とし，$I_{2j}(b,z)\,(1\le j\le 5)$ を次の式で定める。

$$I_1(b,z)=\begin{cases} I_{21}(b,z) & z\le 0 \text{ のとき}, \\ I_{22}(b,z) & 0\le z\le R \text{ のとき}, \\ I_{23}(b,z) & R\le z\le \dfrac{R}{1-g_0} \text{ のとき}, \\ I_{24}(b,z) & \dfrac{R}{1-g_0}\le z\le R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0} \text{ のとき}, \\ I_{25}(b,z) & R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0}\le z \text{ のとき}. \end{cases} \tag{2.11}$$

さらに $I_3(b,z)$ を時刻 t_0 での追加発注量とし，$I_{3j}(b,z)\,(1\le j\le 5)$ を次の式で定める。

$$I_1(b,z)=\begin{cases} I_{31}(b,z) & z\le 0 \text{ のとき}, \\ I_{32}(b,z) & 0\le z\le R \text{ のとき}, \\ I_{33}(b,z) & R\le z\le \dfrac{R}{1-g_0} \text{ のとき}, \\ I_{34}(b,z) & \dfrac{R}{1-g_0}\le z\le R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0} \text{ のとき}, \\ I_{35}(b,z) & R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0}\le z \text{ のとき}. \end{cases} \tag{2.12}$$

確率変数 B の実現値が b であると考えて，$I_i(b,z)$, $I_{ij}(b,z)$ の期待値をそれぞれ $E\{I_i(B,z)\}$, $E\{I_{ij}(B,z)\}$ とすると，1期の費用関数 $C(B,z)$ の期待値は

$$E\{C(B,z)\}=c_1(z-x)+hE\{I_1(B,z)\}+pE\{I_2(B,z)\}+c_2E\{I_3(B,z)\} \tag{2.13}$$

である。また z の範囲を考慮すると等式

$$E\{C(B,z)\}=c_1(z-x)+hE\{I_{1i}(B,z)\}+pE\{I_{2i}(B,z)\}+c_2E\{I_{3i}B,z)\} \tag{2.14}$$

を得る。関数 $H_i(z)$ $(1 \le i \le 5)$ を

$$H_i(z) = c_1 z + hE\{I_{1i}(B,z)\} + pE\{I_{2i}(B,z)\} + c_2 E\{I_{3i}(B,z)\} \tag{2.15}$$

とし，さらに関数 $H(z)$ を

$$H(z) = \begin{cases} H_1(z) & z \le 0 \quad \text{のとき,} \\ H_2(z) & 0 \le z \le R \quad \text{のとき,} \\ H_3(z) & R \le z \le \dfrac{R}{1-g_0} \quad \text{のとき,} \\ H_4(z) & \dfrac{R}{1-g_0} \le z \le R + \dfrac{g_0 S}{1-g_0} \quad \text{のとき,} \\ H_5(z) & R + \dfrac{g_0 S}{1-g_0} \le z \quad \text{のとき} \end{cases} \tag{2.16}$$

とする。このとき

$$f_1(x) = -c_1 x + \min_{z \ge x} H(z) \tag{2.17}$$

が成立する。

3. 平均在庫量，平均品切量，平均追加注文量のそれぞれの期待値

3.1 $E\{I_1(B,z)\}$について

$E\{I_1(B,z)\}$を各場合ごとに求める。まず $z \le 0$ のとき,

$$E\{I_{11}(B,z)\} = \int_{t_0}^{\frac{S}{1-g_0}} \left(\frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} [S + g_0 b - g(T/t)b] dT \right) \phi(b) db$$
$$+ \int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty} \left(\frac{1}{t} \int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)} [S + g_0 b - g(T/t)b] dT \right) \phi(b) db, \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dz} E\{I_{11}(B,z)\} = 0 \text{ and } \frac{d^2}{dz^2} E\{I_{11}(B,z)\} = 0 \tag{3.2}$$

となる。

次に $0 \le z \le R$ のとき, 補題2.1を使って

$$E\{I_{12}(B,z)\}=\int_0^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{t}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$
$$+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{t}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$
$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$
$$=\int_0^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$
$$+\int_0^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$
$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$
$$=\int_0^{\frac{z}{g_0}}[T_0z-G(T_0)b]\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}[zg^{-1}(z/b)-G(g^{-1}(z/b))b]\phi(b)db$$
$$+\int_0^{\frac{S}{1-g_0}}[(1-T_0)(S+g_0b)-(G(1)-G(T_0))b]\phi(b)db$$
$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}[(g^{-1}((S/b)+g_0)-T_0)(S+g_0b)+(G(T_0)-G(g^{-1}((S/b)+g_0)))b]\phi(b)db \tag{3.3}$$

となる。この導関数は

$$\frac{d}{dz}E\{I_{12}(B,z)\}=\int_0^{\frac{z}{g_0}}T_0\phi(b)db+\frac{1}{g_0}\left[T_0z-G(T_0)\left(\frac{z}{g_0}\right)\right]\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)$$
$$+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db-\frac{1}{g_0}\left[T_0z-G(T_0)\frac{z}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)$$
$$=T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db, \tag{3.4}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}E\{I_{12}(B,z)\}=\frac{T_0}{g_0}\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial g^{-1}}{\partial z}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db-\frac{T_0}{g_0}\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)$$
$$=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial g^{-1}}{\partial z}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db. \tag{3.5}$$

である。

$R \le z \le \dfrac{R}{1-g_0}$ のときに，平均在庫量の期待値を求める。このときは

$$E\{I_{13}(B,z)\} = \int_0^{\frac{z-R}{g_0}} \left(\frac{1}{t} \left\{ \int_0^t [z-g(T/t)b]dT \right\} \right) \phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{z}{g_0}} \left(\frac{1}{t} \left\{ \int_0^{t_0} [z-g(T/t)b]dT + \int_{t_0}^{t} [S+g_0 b - g(T/t)b]dT \right\} \right) \phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}} \left(\frac{1}{t} \left\{ \int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)} [z-g(T/t)b]dT + \int_{t_0}^{t} [S+g_0 b - g(T/t)b]dT \right\} \right) \phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty} \left(\frac{1}{t} \left\{ \int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)} [z-g(T/t)b]dT + \int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)} [S+g_0 b - g(T/t)b]dT \right\} \right) \phi(b)db$$

$$= \int_0^{\frac{z-R}{g_0}} \left(\frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} [z-g(T/t)b]dT \right) \phi(b)db + \int_0^{\frac{z}{g_0}} \left(\frac{1}{t} \int_0^{t_0} [z-g(T/t)b]dT \right) \phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)} [z-g(T/t)b]dT \right) \phi(b)db + \int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}} \left(\frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} [S+g_0 b - g(T/t)b]dT \right) \phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty} \left(\frac{1}{t} \int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)} [S+g_0 b - g(T/t)b]dT \right) \phi(b)db \tag{3.6}$$

となる。これを補題2.1を使って書き改めると

$$E\{I_{13}(B,z)\} = \int_0^{\frac{z-R}{g_0}} [(1-T_0)z - (G(1)-G(T_0))b]\phi(b)db$$

$$+\int_0^{\frac{z}{g_0}} [T_0 z - G(T_0)b]\phi(b)db + \int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} [zg^{-1}(z/b) - G(g^{-1}(z/b))b]\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}} [(1-T_0)(S+g_0 b) - (G(1)-G(T_0))b]\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty} [(g^{-1}((S/b)+g_0)-T_0)(S+g_0 b) + (G(T_0) - G(g^{-1}((S/b)+g_0)))b]\phi(b)db \tag{3.7}$$

となる。この関数の導関数は

$$\frac{d}{dz}E\{I_{13}(B,z)\} = \int_0^{\frac{z-R}{g_0}} (1-T_0)\phi(b)db + \frac{1}{g_0}\left[(1-T_0)z - (G(1)-G(T_0))\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$+\int_0^{\frac{z}{g_0}} T_0\phi(b)db + \frac{1}{g_0}\left[T_0 z - G(T_0)\frac{z}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z}{g_0}\right) + \int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db$$

$$-\frac{1}{g_0}\left[T_0 z-G(T_0)\frac{z}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)-\frac{1}{g_0}\left[(1-T_0)(S-R+z)-(G(1)-G(T_0))\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$=(1-T_0)\Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db-\frac{1}{g_0}(1-T_0)(S-R)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right), \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}E\{I_{13}(B,z)\}=\frac{1}{g_0}\left[(1-T_0)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+T_0\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)\right]+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db$$

$$-\frac{1}{g_0}T_0\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db-\frac{1}{g_0^2}(1-T_0)(S-R)\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$=\frac{1}{g_0}(1-T_0)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db-\frac{1}{g_0^2}(1-T_0)(S-R)\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right) \quad (3.9)$$

となる.

$\dfrac{R}{1-g_0}\leq z\leq R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0}$ のとき，2つの場合に分けて期待値を計算する。

まず $\dfrac{R}{1-g_0}\leq z\leq\dfrac{g_0 S}{1-g_0}$ のとき,

$$E\{I_{14}(B,z)\}=\int_0^z\left(\frac{1}{t}\int_0^t[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{t}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{t}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$=\int_0^z\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^t[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_0^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$(3.10)$$

である。補題2.1 を使って整理すると

$$
\begin{aligned}
E\{I_{14}(B,z)\} &= \int_0^z [(1-T_0)z-(G(1)-G(T_0))b]\phi(b)db \\
&+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}} \left[\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right)z+\left(G(T_0)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right)b\right]\phi(b)db \\
&+\int_0^{\frac{z}{g_0}} [T_0 z-G(T_0)b]\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]\phi(b)db \\
&+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}} [(1-T_0)(S+g_0b)-(G(1)-G(T_0))b]\phi(b)db \\
&+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)-T_0\right)(S+g_0b)+\left(G(T_0)-G\left(g^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)\right)\right)b\right]\phi(b)db
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

となり，この関数を z について微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}E\{I_{14}(B,z)\} &= \int_0^z (1-T_0)\phi(b)db+[(1-T_0)z-(G(1)-G(T_0))z]\phi(z) \\
&+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left[g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right]\phi(b)db \\
&+\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)-T_0\right)z+\left(G(T_0)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) \\
&-[(1-T_0)z-(G(1)-G(T_0))z]\phi(z)+\int_0^{\frac{z}{g_0}} T_0\phi(b)db \\
&+\frac{1}{g_0}\left[T_0z-G(T_0)\frac{z}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db-\frac{1}{g_0}\left[T_0z-G(T_0)\frac{z}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z}{g_0}\right) \\
&-\frac{1}{g_0}\left[(1-T_0)(S-R+z)-(G(1)-G(T_0))\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) \\
&=(1-T_0)\Phi(z)+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right)\phi(b)db+T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db \\
&-\frac{1}{g_0}\left[(1-T_0)(S-R)+\left(1-g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)z-\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right),
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
\frac{d^2}{dz^2}E\{I_{14}(B,z)\}=(1-T_0)\phi(z)+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{g_0}\left[g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)-T_0\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&-(1-T_0)\phi(z)+\frac{T_0}{g_0}\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db-\frac{T_0}{g_0}\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)\\
&-\frac{1}{g_0}\left[1-g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-\frac{1}{g_0}\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\\
&-\frac{1}{g_0^2}\left[(1-T_0)(S-R)+\left(1-g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)z-\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\\
&=\int_{z}^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db\\
&+\frac{1}{g_0}\left[2g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1-T_0+\frac{1}{g_0}\left(G(1)-g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\\
&-\frac{1}{g_0^2}\left[(1-T_0)(S-R)+\left(1-g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)z-\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

となる。

次に $\dfrac{S}{1-g_0}\le z\le R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0}$ のとき，計算すると

$$
\begin{aligned}
E\{I_{14}(B,z)\}&=\int_0^z\left(\frac{1}{t}\int_0^t[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db\\
&+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{t}[S+g_0 b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db\\
&+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0 b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db\\
&+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0 b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db\\
&=\int_0^z\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db\\
&+\int_0^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db\\
&+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[S+g_0 b-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0 b-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

となり，これは (3.10) と同じ z の関数になる。

最後に $R+\dfrac{S}{1-g_0}\le z$ のとき，

$$E\{I_{15}(B,z)\}=\int_0^z\left(\frac{1}{t}\int_0^t[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT+\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$=\int_0^z\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^t[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_0^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}[z-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}[S+g_0b-g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db \tag{3.15}$$

となり，前の議論のようにして

$$E\{I_{15}(B,z)\}=\int_0^z[(1-T_0)z-(G(1)-G(T_0))b]\phi(b)db$$

$$+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right)z+\left(G(T_0)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right)b\right]\phi(b)db$$

$$+\int_0^{\frac{z}{g_0}}[T_0z-G(T_0)b]\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)b\right]\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\infty}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)-T_0\right)(S+g_0b)+\left(G(T_0)-G\left(g^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)\right)\right)b\right]\phi(b)db \tag{3.16}$$

となる。この関数を z に関して微分すると

$$\frac{d}{dz}E\{I_{15}(B,z)\}=\int_0^z(1-T_0)\phi(b)db+[(1-T_0)z-(G(1)-G(T_0))z]\phi(z)$$

$$+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left[g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right]\phi(b)db+\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)-T_0\right)z\right.$$

$$+\left(G(T_0)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\Bigg]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$-[(1-T_0)z-(G(1)-G(T_0))z]\phi(z)+\int_0^{\frac{z}{g_0}} T_0\phi(b)db$$

$$+\frac{1}{g_0}\left[T_0 z-G(T_0)\frac{z}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db-\frac{1}{g_0}\left[T_0 z-G(T_0)\frac{z}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)$$

$$-\frac{1}{g_0}\Bigg[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)-T_0\right)(S-R+z)$$

$$+\left(G(T_0)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\Bigg]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$=(1-T_0)\Phi(z)+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right)\phi(b)db+T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db$$

$$+\frac{1}{g_0}\Bigg[zg^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)+g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)(R-S-z)+T_0(S-R)$$

$$+\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\Bigg]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right), \tag{3.17}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}E\{I_{15}(B,z)\}$$

$$=(1-T_0)\phi(z)+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{g_0}\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-T_0\right)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$-(1-T_0)\phi(z)+\frac{T_0}{g_0}\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db-\frac{1}{g_0}T_0\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)$$

$$+\frac{1}{g_0}\Bigg[g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-\frac{g_0 Rz}{(z-R)^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)-g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)$$

$$-\frac{g_0 Sz}{(z-R)^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)(R-S-z)-\frac{g_0 S(S-R+z)}{(z-R)^2}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)$$

$$+\frac{g_0 Rz}{(z-R)^2}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)+\frac{1}{g_0}\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\Bigg]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$+\frac{1}{g_0^2}\Bigg[zg^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)+g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)(R-S-z)+T_0(S-R)$$

$$+\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\Bigg]\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$=\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{g_0}\left[g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-T_0\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db$$

$$+\frac{1}{g_0}\left[g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)+\frac{1}{g_0}\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+\frac{1}{g_0^2}\left[zg^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)+g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)(R-S-z)\right.$$

$$\left.+T_0(S-R)+\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right) \tag{3.18}$$

となる。

3.2 $E\{I_2(B,z)\}$について

$z\leq 0$ のとき，期当たりの平均品切量の期待値 $E\{I_{21}(B,z)\}$ は

$$E\{I_{21}(B,z)\}=\int_0^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT+\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT+\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0 b+g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0 b+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db \tag{3.19}$$

となり，補題2.1から

$$E\{I_{21}(B,z)\}=\int_0^{\infty}[G(T_0)b-T_0 z]\,\phi(b)db+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}[(g^{-1}((S/b)+g_0)-1)(S+g_0 b)$$
$$+(G(1)-G(g^{-1}((S/b)+g_0)))b]\phi(b)db \tag{3.20}$$

である。この導関数は

$$\frac{d}{dz}E\{I_{21}(B,z)\}=-T_0,\quad \frac{d^2}{dz^2}E\{I_{21}(B,z)\}=0 \tag{3.21}$$

である。

$0\leq z\leq R$ のとき，

$$E\{I_{22}(B,z)\}=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT+\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0b+g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0b+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db \tag{3.22}$$

であり，整理して

$$E\{I_{22}(B,z)\}=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}[(g^{-1}(z/b)-T_0)z+(G(T_0)-G(g^{-1}(z/b)))b]\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}[(g^{-1}((S/b)+g_0)-1)(S+g_0b)+(G(1)-G(g^{-1}((S/b)+g_0)))b]\phi(b)db \tag{3.23}$$

となる。これから

$$\frac{d}{dz}E\{I_{22}(B,z)\}=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left[g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right]\phi(b)db=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db+T_0\left(\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)-1\right), \tag{3.24}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}E\{I_{22}(B,z)\}=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db \tag{3.25}$$

となる。

$R\le z\le\dfrac{R}{1-g_0}$ のとき，

$$E\{I_{23}(B,z)\}=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT+\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0b+g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0b+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db, \tag{3.26}$$

$$E\{I_{23}(B,z)\}=\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}[(g^{-1}(z/b)-T_0)z+(G(T_0)-G(g^{-1}(z/b)))b]\,\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}[(g^{-1}((S/b)+g_0)-1)(S+g_0b)+(G(1)-G(g^{-1}((R/b)+g_0)))b]\,\phi(b)db \qquad (3.27)$$

であり，$E\{I_{22}(B,z)\}=E\{I_{23}(B,z)\}$ である。したがってその導関数も一致する。

$\dfrac{R}{1-g_0}\le z\le\dfrac{g_0S}{1-g_0}$ のとき，

$$E\{I_{24}(B,z)\}$$

$$=\int_{z}^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\frac{S}{1-g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT+\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0b+g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$=\int_{z}^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0b+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db \qquad (3.28)$$

であり，

$$E\{I_{24}(B,z)\}=\int_{z}^{\frac{z-R}{g_0}}[(g^{-1}(z/b)-1)z+(G(1)-G((g^{-1}(z/b)))b]\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}[(g^{-1}(z/b)-T_0)z+(G(T_0)-G(g^{-1}(z/b)))b]\,\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}[(g^{-1}((S/b)+g_0)-1)(S+g_0b)+(G(1)-G(g^{-1}((S/b)+g_0)))b]\,\phi(b)db \qquad (3.29)$$

となる。これから

$$\frac{d}{dz}E\{I_{24}(B,z)\}=\int_{z}^{\frac{z-R}{g_0}}\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-1\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left[g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right]\phi(b)db$$

$$+\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)-1\right)z+(G(1)-G\left(\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$=\int_{z}^{\frac{z-R}{g_0}}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db+\Phi(z)-\Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-T_0\left(1-\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1\right)z+\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right), \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dz^2}E\{I_{24}(B,z)\} &= \int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db\\
&+\frac{1}{g_0}g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-\phi(z)-\frac{T_0}{g_0}\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\phi(z)-\frac{1}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+\frac{T_0}{g_0}\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)\\
&+\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1\right)+\frac{1}{g_0}\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\\
&+\frac{1}{g_0^2}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1\right)z+\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\\
&=\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db\\
&+\frac{1}{g_0}\left[2\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1\right)+\frac{1}{g_0}\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\\
&+\frac{1}{g_0^2}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1\right)z+\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

である。

$\frac{g_0 S}{1-g_0}\le z\le R+\frac{g_0 S}{1-g_0}$ のとき，

$$\begin{aligned}
&E\{I_{24}(B,z)\}\\
&=\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-S-g_0 b+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db\\
&+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT+\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0 b+g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db\\
&=\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db\\
&+\int_{\frac{S}{1-g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0 b+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db
\end{aligned} \tag{3.32}$$

となり，これは（3.28）と同じ関数になる。

$R+\dfrac{g_0S}{1-g_0}\le z$ のとき，

$$E\{I_{25}(B,z)\}$$

$$=\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t}[-z+g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\frac{z}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0b+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT+\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0b+g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db$$

$$=\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t}[-z+g(T/t)b]dT\right\}\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)}^{t_0}[-z+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}\left(\frac{S}{b}+g_0\right)}^{t}[-S-g_0b+g(T/t)b]dT\right)\phi(b)db \tag{3.33}$$

となり，

$$E\{I_{25}(B,z)\}=\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}[(g^{-1}(z/b)-1)z+(G(1)-G(g^{-1}(z/b)))b]\,\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}[(g^{-1}(z/b)-T_0)z+(G(T_0)-G(g^{-1}(z/b)))b]\,\phi(b)db$$

$$+\int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\infty}[(g^{-1}((S/b)+g_0)-1)(S+g_0b)+(G(1)-G(g^{-1}((S/b)+g_0)))b]\,\phi(b)db \tag{3.34}$$

である。よって

$$\frac{d}{dz}E\{I_{25}(B,z)\}=\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left[g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-1\right]\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\left[g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right]\phi(b)db$$

$$+\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)-1\right)z+\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$-\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)-1\right)(z+S-R)\right.$$

$$\left.+\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$= \Phi(z) - \Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) - T_0\left(1-\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)\right) + \int_z^{\frac{z-R}{g_0}} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db + \int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db$$

$$+\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1\right)z - G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$-\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)-1\right)(z+S-R)\right.$$

$$\left.-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right), \tag{3.35}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}E\{I_{25}(B,z)\} = \phi(z) - \frac{1}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) + \frac{T_0}{g_0}\phi\left(\frac{z}{g_0}\right) + \int_z^{\frac{z-R}{g_0}} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db$$

$$+\frac{1}{g_0}g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) - \phi(z) + \int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db - \frac{T_0}{g_0}\phi\left(\frac{z}{g_0}\right)$$

$$+\frac{1}{g_0}\left[g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right) - 1 - \frac{1}{g_0}G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$+\frac{1}{g_0^2}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1\right)z - G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$-\frac{1}{g_0}\left[g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right) - 1 - \frac{1}{g_0}G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$-\frac{1}{g_0^2}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)-1\right)(z+S-R)\right.$$

$$\left.-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$= \int_z^{\frac{z-R}{g_0}} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db + \int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db$$

$$+\frac{1}{g_0^2}\left[g_0\left(2g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right) - 1 - g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\right.$$

$$\left.-\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right) - G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\right)\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$+\frac{1}{g_0^2}\left[S - R + zg^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right) - (z+S-R)\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\right)$$

$$-\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg] \tag{3.36}$$

である。

3.3 $E\{I_3(B,z)\}$ について

時点 t_0 で追加発注される量の期待値を求める。

$z \le 0$ のとき，$m = E(B)$ と記すと

$$E\{I_{31}(B,z)\} = \int_0^\infty [S + g_0 b - z]\phi(b)db = S + g_0 m - z \tag{3.37}$$

$$\frac{d}{dz}E\{I_{31}(B,z)\} = -1, \quad \frac{d^2}{dz^2}E\{I_{31}(B,z)\} = 0 \tag{3.38}$$

となる。

$0 \le z \le R$ のとき，

$$E\{I_{32}(B,z)\} = \int_0^\infty [S + g_0 b - z]\phi(b)db \tag{3.39}$$

であり，$E\{I_{32}(B,z)\} = E\{I_{31}(B,z)\}$ となる。

$R \le z \le \dfrac{R}{1-g_0}$ のとき，

$$E\{I_{33}(B,z)\} = \int_{\frac{z-R}{g_0}}^\infty [S + g_0 b - z]\phi(b)db \tag{3.40}$$

であり，

$$\frac{d}{dz}E\{I_{33}(B,z)\} = -\int_{\frac{z-R}{g_0}}^\infty \phi(b)db - \frac{S-R}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) = \Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) - 1 - \frac{S-R}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right),$$

$$\frac{d^2}{dz^2}E\{I_{33}(B,z)\} = \frac{1}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) - \frac{S-R}{g_0^2}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right) \tag{3.41}$$

である。

$\dfrac{R}{1-g_0} \le z \le R + \dfrac{g_0 S}{1-g_0}$ のとき，

$$E\{I_{34}(B,z)\} = \int_{\frac{z-R}{g_0}}^\infty [S + g_0 b - z]\phi(b)db \tag{3.42}$$

であり，

$R + \dfrac{g_0 S}{1-g_0} \le z$ のときも，

$$E\{I_{35}(B,z)\} = \int_{\frac{z-R}{g_0}}^{\infty} [S + g_0 b - z]\,\phi(b)db \tag{3.43}$$

であり，

$$E\{I_{34}(B,z)\} = E\{I_{33}(B,z)\}, \quad E\{I_{35}(B,z)\} = E\{I_{33}(B,z)\} \tag{3.44}$$

となる。

4.　関数 $H(z)$ の性質

（2.13）から

$$H(z) = c_1 z + hE\{I_1(B,z)\} + pE\{I_2(B,z)\} + c_2 E\{I_3(B,z)\}$$

である。モデルの作成方法から，次の命題を得る。このことは，各 $E\{I_{ij}(B,z)\}$ の連続性を調べても確かめられる。

命題 4.1　$H(z)$ は連続関数である。

4.1　$H'(z)$ について

（2.15）から，各 j（$1 \le j \le 5$）に対して

$$H_j(z) = c_1 z + hE\{I_{1j}(B,z)\} + pE\{I_{2j}(B,z)\} + c_2 E\{I_{3j}(B,z)\}$$

である。よって，

$$H_j'(z) = c_1 + h\frac{d}{dz}E\{I_{1j}(B,z)\} + p\frac{d}{dz}E\{I_{2j}(B,z)\} + c_2\frac{d}{dz}E\{I_{3j}(B,z)\} \tag{4.1}$$

となる。

$z \le 0$ のとき，式（3.2），（3.21），（3.38）より

$$H_1'(z) = c_1 - pT_0 - c_2 \tag{4.2}$$

となる。$c_1 \le c_2$ であることを仮定しているので，$H_1'(z) < 0\ (z \le 0)$ となる。

$0 \le z \le R$ のとき，式（3.4），（3.24），（3.38）より

$$H_2'(z) = c_1 + h\left[T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right) + \int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right]$$

$$+p\left[\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db+T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)-T_0\right]-c_2$$

$$=c_1+(h+p)\left[T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right]-pT_0-c_2 \tag{4.3}$$

である。

$R\leq z\leq \dfrac{R}{1-g_0}$ のとき，式（3.8），（3.24），（3.41）より

$$H_3'(z)=c_1+h\left[(1-T_0)\Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right.$$

$$\left.-\frac{1}{g_0}(1-T_0)(S-R)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]$$

$$+p\left[\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db-T_0+T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)\right]+c_2\left[\Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-1-\frac{S-R}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right] \tag{4.4}$$

となる。$z=R$ を 式（4.3）と（4.4）に代入して

$$H_2'(R)=c_1+(h+p)\left[T_0\Phi\left(\frac{R}{g_0}\right)+\int_{\frac{R}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{R}{b}\right)\phi(b)db\right]-pT_0-c_2$$

$$H_3'(R)=c_1+h\left[T_0\Phi\left(\frac{R}{g_0}\right)+\int_{\frac{R}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{R}{b}\right)\phi(b)db-\frac{1}{g_0}(1-T_0)(S-R)\phi(0)\right]$$

$$+p\left[\int_{\frac{R}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{R}{b}\right)\phi(b)db-T_0+T_0\Phi\left(\frac{R}{g_0}\right)\right]+c_2\left[-1-\frac{S-R}{g_0}\phi(0)\right]$$

となる。ゆえに

$$H_3'(R)=H_2'(R)-\left[\frac{h}{g_0}(1-T_0)(S-R)+\frac{c_2(S-R)}{g_0}\right]\phi(0) \tag{4.5}$$

である。同様な手順を続けて，次のことを得る。

$\dfrac{R}{1-g_0}\leq z\leq R+\dfrac{g_0S}{1-g_0}$ のとき，

$$H_4'(z)=c_1+h\left[(1-T_0)\Phi(z)+\int_{z}^{\frac{z-R}{g_0}}\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right)\phi(b)db+T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right.$$

$$-\frac{1}{g_0}\left((1-T_0)(S-R)+\left(1-g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)z\right.$$

$$-\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg]$$

$$+p\left[\int_z^{\frac{z-R}{g_0}} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db+\Phi(z)-\Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-T_0\left(1-\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)\right)\right.$$

$$+\frac{1}{g_0}\left[\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1\right)z+\left(G(1)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right]\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg]$$

$$+c_2\left[\Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-1-\frac{S-R}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right] \tag{4.6}$$

である。

$R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0}\leq z$ のとき，

$$H_5'(z)=c_1+h\left[(1-T_0)\Phi(z)+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)-T_0\right)\phi(b)db+T_0\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right.$$

$$+\frac{1}{g_0}\left(zg^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)+g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)(R-S-z)+T_0(S-R)\right.$$

$$\left.+\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg]$$

$$+p\left[\Phi(z)-\Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-T_0\left(1-\Phi\left(\frac{z}{g_0}\right)\right)+\int_z^{\frac{z-R}{g_0}} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right.$$

$$+\frac{1}{g_0}\left(\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-1\right)z-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$-\frac{1}{g_0}\left(\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)-1\right)(z+S-R)\right.$$

$$\left.-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg]$$

$$+c_2\left[\Phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-1-\frac{S-R}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right] \tag{4.7}$$

である。

命題 4.2　次のことが成立する。

(1) $H_1'(0)=H_2'(0),\ \ H_3'\left(\dfrac{R}{1-g_0}\right)=H_4'\left(\dfrac{R}{1-g_0}\right),\ \ H_4'\left(R+\dfrac{g_0S}{1-g_0}\right)=H_5'\left(R+\dfrac{g_0S}{1-g_0}\right).$

(2) もし $\phi(0)=0$ ならば，$H(z)$ は微分可能であって $H_2'(R)=H_3'(R)$ である。

(3) もし $\phi(0)\neq 0$ ならば，$H_2'(R)>H_3'(R)$ である。

証明 (1)は式(4.2)，(4.3)，(4.4)，(4.6)，(4.7)に適当な z を代入して確かめればよい。(2)と(3)は，式(4.5)の結果である。

4.2 $H''(z)$ について

$H'(z)$ を得た方法で，$H''(z)$ を求めればよい。$H''(z)$ に関しては，連続性に注目するのではなくて，不等式 $H''(z)\geq 0$ が成立するかどうかを調べる。

$z\leq 0$ のとき，式(4.2)より

$$H_1''(z)=0 \tag{4.8}$$

$0\leq z\leq R$ のとき，式(4.3)より

$$H_2''(z)=(h+p)\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial g^{-1}}{\partial z}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db \tag{4.9}$$

である。

$R\leq z\leq \dfrac{R}{1-g_0}$ のとき，式(3.9)，(3.25)，(3.41)より

$$\begin{aligned}H_3''(z)=h\left[\frac{1}{g_0}(1-T_0)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db-\frac{1}{g_0^2}(1-T_0)(S-R)\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\\+p\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+c_2\left[\frac{1}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-\frac{S-R}{g_0^2}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.10}$$

である。

命題 4.3 次のことが成立する。

(1) $H_1''(z)\geq 0\ (z\leq 0)$，$H_2''(z)\geq 0\ (0\leq z\leq R)$ である。

(2) もし $\phi'(z)\leq 0\ \left(R\leq z\leq \dfrac{R}{1-g_0}\right)$ であれば，$H_3''(z)\geq 0\ \left(R\leq z\leq \dfrac{R}{1-g_0}\right)$ である。

$\dfrac{R}{1-g_0}\leq z\leq R+\dfrac{g_0S}{1-g_0}$ のとき，式(3.13)，(3.31)，(3.41)より

$$
\begin{aligned}
H_4''(z) = h\Bigg[& \int_z^{\frac{z-R}{g_0}} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db + \int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db \\
& + \frac{1}{g_0}\left\{2g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right) - 1 - T_0 + \frac{1}{g_0}\left(G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\right\}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) \\
& - \frac{1}{g_0^2}\left\{(1-T_0)(S-R) + \left(1 - g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)z \right. \\
& \qquad \left. - \left(G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right\}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg] \\
& + p\Bigg[\int_z^{\frac{z-R}{g_0}} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db + \int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db \\
& + \frac{1}{g_0}\left\{2\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right) - 1\right) + \frac{1}{g_0}\left(G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\right\}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) \\
& + \frac{1}{g_0^2}\left\{\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right) - 1\right)z + \left(G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\right\}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg] \\
& + \frac{c_2}{g_0}\left[\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) - \frac{S-R}{g_0}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

となる。これを整理して

$$
\begin{aligned}
H_4''(z) = (h+p)\Bigg[& \int_z^{\frac{z-R}{g_0}} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db + \int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db \\
& + \frac{1}{g_0^2}\left(1 - g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\left(-2g_0\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) - z\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right) \\
& + \frac{1}{g_0^2}\left(G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\left(\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) + \frac{z-R}{g_0}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right)\Bigg] \\
& + \frac{h}{g_0^2}(1-T_0)\left(g_0\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) - (S-R)\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right) + \frac{c_2}{g_0}\left[\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right) - \frac{S-R}{g_0}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

である。この等式から，次の命題を得る。

命題 4.4　$\dfrac{R}{1-g_0} \le z \le R + \dfrac{g_0 S}{1-g_0}$ のとき，条件

(1) $2g_0\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+z\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\le 0$

(2) $\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+\frac{z-R}{g_0}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\ge 0$

(3) $\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\le 0$

が成立するならば，$H_4''(z)\ge 0$である。

$R+\frac{g_0S}{1-g_0}\le z$のとき，式(3.18)，(3.36)，(3.41)より

$$
\begin{aligned}
H_5''(z)=h\Bigg[&\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{g_0}\left\{g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)-T_0\right\}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\\
&+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{g_0}\Bigg\{g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)-g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\\
&+\frac{1}{g_0}\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)\right)\Bigg\}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\\
&+\frac{1}{g_0^2}\Bigg\{zg^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)+g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)(R-S-z)+T_0(S-R)\\
&+\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\Bigg\}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg]\\
&+p\Bigg[\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db\\
&+\frac{1}{g_0^2}\Bigg\{g_0\left(2g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)-1-g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\\
&-\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\right)\Bigg\}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\\
&+\frac{1}{g_0^2}\Bigg\{S-R+zg^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)-(z+S-R)\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\\
&-\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0z}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(z+S-R)}{z-R}\right)\right)\right)\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg\}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg]\\
&+\frac{c_2}{g_0}\left[\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-\frac{S-R}{g_0}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

となる。これを整理して

$$H_5''(z)=(h+p)\Bigg[\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\frac{1}{g_0}\Bigg\{2g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)$$

$$-g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)+G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\Bigg\}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$+\frac{1}{g_0^2}\Bigg\{z\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)+g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)(R-S)$$

$$+\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\frac{z-R}{g_0}\Bigg\}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\Bigg]$$

$$-\frac{hT_0+p}{g_0}\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+\frac{(S-R)(hT_0+p)}{g_0^2}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+\frac{c_2}{g_0}\left[\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-\frac{S-R}{g_0}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right]$$

$$=(h+p)\left(\int_z^{\frac{z-R}{g_0}}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db+\int_{\frac{z}{g_0}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\frac{\phi(b)}{b}db\right)$$

$$+\frac{h+p}{g_0^2}\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)\left(g_0\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+z\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right)$$

$$+\frac{h+p}{g_0^3}\left(G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)\right)-G\left(g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)\right)\right)\left(g_0^2\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)+(z-R)\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{g_0}\left((h+p)g^{-1}\left(\frac{g_0 z}{z-R}\right)-(hT_0+p)\right)\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$-\frac{S-R}{g_0^2}\left((h+p)g^{-1}\left(\frac{g_0(S-R+z)}{z-R}\right)-(hT_0+p)\right)\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)$$

$$+\frac{c_2}{g_0}\left[\phi\left(\frac{z-R}{g_0}\right)-\frac{S-R}{g_0}\phi'\left(\frac{z-R}{g_0}\right)\right] \tag{4.14}$$

となる。この式から，次の命題を得る。

命題 4.5　$R+\dfrac{g_0 S}{1-g_0}\leq z$ のとき，条件

(1)　$g_0\phi\left(\dfrac{z-R}{g_0}\right)+z\phi'\left(\dfrac{z-R}{g_0}\right)\leq 0$

(2)　$g_0^2\phi\left(\dfrac{z-R}{g_0}\right)+(z-R)\phi'\left(\dfrac{z-R}{g_0}\right)\geq 0$

(3)　$g^{-1}\left(\dfrac{g_0 z}{z-R}\right)\geq\dfrac{hT_0+p}{h+p}$

(4)　$\phi'\left(\dfrac{z-R}{g_0}\right)\leq 0$

が成立するならば，$H_5''(z)\geq 0$ である。

付記．本稿は2001～2003年度広島修道大学総合研究所調査研究費（研究課題「動的計画法の理論的・応用的研究」）による研究成果の一部である。

参　考　文　献

[1] Kabak, I. W.: "Partial Returns in the Single Period Inventory Model", IE News, Vol.19, No. 2, 1984, pp. 1–3.

[2] 児玉正憲："返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅰ）", 経済学研究，九州大学経済学会，Vol. 55, No. 6, 1990, pp. 35–44.

[3] 児玉正憲："返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅱ）", 経済学研究，九州大学経済学会，Vol. 56, No. 1・2, 1990, pp. 277–293.

[4] 児玉正憲："返却および追加注文を許す多期間確率的在庫モデル", 経済学研究，九州大学経済学会，Vol. 56, No. 4, 1991, pp. 1–26.

[5] Kodama, M.: "Some Probabilistic Inventory Problems with Various Demmand Pattern", Journal of Information & Optimization Science, Vol. 17, No. 1, 1996, pp. 17–48.

[6] 児玉正憲："生産・在庫管理システムの基礎，九州大学出版会", 1996

[7] 児玉正憲："区分的費用関数をもつ動的在庫モデル（Ⅰ）", 経済科学研究，広島修道大学，Vol. 1, No. 1–2, 1998, pp. 99–122.

[8] 児玉正憲："区分的費用関数をもつ動的在庫モデル（Ⅱ）", 経済科学研究，広島修道大学，Vol. 2, No. 1, 1998, pp. 33–60.

[9] 児玉正憲・坂口通則："区分的費用関数をもつ動的在庫モデルの最適政策（Ⅰ）", 経済科学研究，広島修道大学，Vol. 2, No. 2, 1999, pp. 143–150.

[10] 児玉正憲・坂口通則："区分的費用関数をもつ動的在庫モデルの最適政策（Ⅱ）", 経済科学研究，広島修道大学，Vol. 3, No. 1, 1999, pp. 95–136.

[11] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Some Comments on the Probabilistic Dynamic Inventory Problems with Piecewise Cost Functions", Recent Dvelopments in Operations Research, Narosa, New Delhi, 2001, pp. 191–196.

[12] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Probabilistic analysis of dynamic inventory models with multiple piecewise cost functions", Journal of Information & Optimization Science, Vol. 22, No. 1, 2001, pp. 57–72.

[13] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Dynamic programming on the probabilistic inventory models with multiple piecewise cost functions", Journal of Information & Optimization Science, Vol. 22, No. 3, 2001, pp. 419–440.

[14] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Stochastic inventory models with piecewise cost functions", Advances in Probability and Stochastic, Notable Publications, New Jerssey Inc., 2001, pp. 91–106.

[15] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Dynamic programming on the probabilistic inventory models with multiple piecewise cost functions", Journal of Information & Optimization Science, Vol. 22, No. 3,

2001, pp. 419–440.

[16] 児玉正憲・坂口通則："区分的費用関数をもつ確率的在庫モデルの研究"，広島修道大学総合研究所，2002.

[17] Sakaguchi, M. and Kodama, M.: "On the dynamic probabilistic inventory problems with piecewise cost functions which may not be piecewise smooth", to appear in *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, Kyushu University.

[18] Sakaguchi, M. and Kodama, M.: "An application of dynamic probabilistic inventory models with piecewise cost functions", Preprint.