階層分析技法へのコンピュータ支援の提案

白　石　高　義

（受付　2003年5月8日）

目　　　次

Abstract

Analytic Hierarchy Process (AHP) is a decision making proccess that was proposed in 1971 by Thomas L. Saaty (Pittsburgh University).

This paper used MS-Excell and calculated "Order Value" by a geometric average calculation and verified "Consistency Index" by a calculation of matrix product.

1. は　じ　め　に

階層分析技法（Analytic Hierarchy Process（AHP））は1971 年Thomas L. Saaty（ピッツバーグ大学）により，意思決定手法として提案された。この手法は，問題分析に，主観的判断とシステム理論を整合させたものである。

この階層分析技法（AHP）を行う際，問題解決の要素相互の数量化と要素の順位値の計算を行う。これには線形代数の固有値の考え方を使うのだとしていた。本提案では，MS-Excel を使用し，幾何平均により順位値を計算しマトリクス積の計算により首尾一貫性を検証する。

2. AHP の原理

今，ある事象（A1, A2, …, An）に順位を設定するとき，その度合い（w1, w2, …, wn）を求めたい。

その度合いにより，各事象間（Ai, Aj）の順位関係（aij）は

aij = wi / wj

となる。即ち，

$$m = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \cdot & a1n \\ a21 & a22 & \cdot & a2n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ an1 & an2 & \cdot & ann \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$w = \begin{bmatrix} w1 \\ w2 \\ \cdot \\ wn \end{bmatrix}, \ \sum_{i=1}^{n} wi = 1 \tag{2}$$

$$aij = wi / wj, \quad aji = wj / wi \tag{3}$$

であり，

$$aij \cdot ajk = aik \tag{4}$$

が成立する必要がある。このことは，意思決定者の判断が完全に首尾一貫していることを示している。

ここで

$$M \cdot w = n \cdot w \tag{5}$$

となり，

$$(M - nI) \cdot w = 0$$

から，n は M の固有値にならなければならない固有値問題となるとされていた。

即ち，w は，M の最大固有値 λ_{max} に対する正規化したベクトルになる。これにより，未知の wi が求まる。

しかし，ここでは度合い（Wi）を順位関係（aij）から求める。

i 行の ai1, ai2, …, ain の幾何平均は，

$$\sqrt[n]{ai1 \cdot ai2 \cdots ain} = \sqrt[n]{\frac{wi}{w1} \frac{wi}{w2} \cdots \frac{wi}{wn}} = wi \cdot Rw \tag{6}$$

とし，各行の幾何平均値の和で正規化すると

$$\frac{wi \cdot Rw}{\sum_{j=1}^{n} wj \cdot Rw} = wi \tag{7}$$

を得る。これが求められる wi であり，この関係を利用して分析を進める。

3. Microsoft Excel による AHP

AHP の手順は，

1) 問題点を階層別にし，個々の要素を決める。

2) マトリクス(M)を作るため，各要素間での数量化(aij)を行う。数量化は，要素iが要素jより順位レベルが高いことをaijに数量化する。これに対するajiは，(3)式によりaji = 1/aijで求める。したがって，事象間で順位関係の高いものをまず数量化し，それの対となる項は逆数とする。

3) 得られたマトリクス（M）より順位度合（w）を計算する。

4) (5)式の計算により，平均的な固有値（λ）を求め，（近似値）

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1} \tag{8}$$

の首尾一貫性指標を計算し，

$$CL < 0.1 \tag{9}$$

でなければ手順2）に戻る。この時，(3)式で，各順位関係（aij）を計算し決定値と大幅に異なるところを重点に調整する。

5) 各層での順位度が求まれば総合順位度を計算し決定する。

となる。

次に，Microsoft Excelを使い，例題で説明する。

今，A, B, Cを上位層に，P, Q, R, Sをその下の層であるとしたときの意思決定を考える。

①まず上位総出の順位度を求める。

aijはiのjに対する度合いを定める。イチロウ（i）は松井（j）より盗塁がうまい，これを

aij = 5　　とすると，　　aji = 1/5　　となる。

この値を対応する「セル」に記入する。

②記入完了すると，各行について幾何平均を計算する。

ここでの場合，

POWER(B2*C2*D2,1/3)

又は，POWER(PRODUCT(B2:D2),1/3)

③順位度合の計算は，幾何平均の列の和で基準化する。

ここでは，幾何平均の列は「E」で，その和は，

E5 = SUM（E2:E4)

基準値whは，各々，

F2 = E2/$E$5, …, F4 = E4/$E$5

④固有値を求めるために，

M・wh = λ・whによりまずM・whを求める。

これは，M・whの行列が入る領域（G2:G4）をアクティブにし，

=MMULT(B2:D4,F2:F4)

と記入し，[Shift] + [Ctrl] + [Enter] キ ーを押すことにより処理される。

ここに，B2:D4 は行列 M の領域，F2:F4 は行列 wh の領域である。

⑤これを順位度（wh）で割算してこれの平均を固有値と見なす，

H2 = G2/F2, ⋯, H4 = G4/F4

λ = AVERAGE（H2 : H4）

⑥首尾一貫性指標の計算を行う。

$$CI = \frac{\lambda - n}{n-1} \text{ で， } CI = \frac{H5-3}{2}$$

CI < 0.1 ならば OK，でなければ，①に戻って調整する。

この例題について Excel での結果を示すと

	A	B	C	幾何平均	wh	M・wh	λ
A	1	2	9	2.621	0.655	2.013	3.074
B	1/2	1	2	1	0.250	0.768	3.074
C	1/9	1/2	1	0.382	0.095	0.293	3.074

演算した演算式は，

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		A	B	C	幾何平均	wh	M・wh	λ
2	A	1	2	9	=POWER(B2*C2*D2, 1/3)	=E2/$E$5	=MMULT(B2:D4,F2:F4)	=G2/F2
3	B	0.5	1	2	=POWER(B3*C3*D3,1/3)	=E3/$E$5	=MMULT(B2:D4,F2:F4)	=G3/F3
4	C	0.111	0.5	1	=POWER(B4*C4*D4,1/3)	=E4/$E$5	=MMULT(B2:D4,F2:F4)	=G4/F4
5					=SUM(E2:E4)		=AVERAGE(H2:H4)	

となる。

但し，M・wh の行列が入る領域（G2:G4）は，この領域をアクティブにし，

=MMULT(B2:D4,F2:F4)

と記入し，[Shift] + [Ctrl] + [Enter] キ ーを押すことにより処理された。

ここに，B2:D4 は行列M の領域，F2:F4 は行列 wh の領域である。

この結果，CI =(3.074−3)/2 =0.037 <0.1 で 首尾一貫性指数は満足し，意思決定の一貫性は保たれている。

次に，P, Q, R, S に対する A, B, C 各々の立場からの関係を分析する。A の立場から

	P	Q	R	S	幾何平均	wLA	M・wLA	λ
P	1	2	1	5	1.778	0.412	2.157	5.232
Q	1/2	1	1/3	1	0.639	0.148	0.669	4.516
R	1	3	1	1/7	0.809	0.188	1.080	5.759
S	1/5	1	7	1	1.088	0.252	1.795	7.121
					4.314			5.657
							CI=	0.552

この場合，CI = 0.55 となり，首尾一貫性が満足していない，従って①に戻って再検討するのであるが，

aij = wi/wj

の関係により各「セル」をっ逆算してみると，

	P	Q	R	S
P	1.000	2.783	2.198	1.635
Q	0.359	1.000	0.790	0.587
R	0.455	1.266	1.000	0.744
S	0.612	1.702	1.344	1.000

これを参考にして，大幅に異なっている箇所を重点的に検討調整する。

この例では，aps　当初　5，逆算　1.635

asr　当初　7，逆算　1.344

を検討，調整し aps = 2，asp = 1/2　asr = 1，ars = 1 に変更した。その結果，

	P	Q	R	S	幾何平均	wLA	M・wLA	λ
P	1	2	1	2	1.414	0.331	1.319	4.023
Q	1/2	1	1/3	1	0.639	0.150	0.609	4.109
R	1	3	1	1	1.316	0.308	1.272	4.170
S	1/2	1	1	1	0.841	0.197	0.812	4.166
					4.210			4.117
							CI=	0.039

を得た。

以下同様に，B の立場から，

	P	Q	R	S	幾何平均	wLB	M・wLB	λ
P	1	1/2	3	2	1.316	0.308	1.320	4.282
Q	2	1	2	1	1.414	0.331	1.434	4.328
R	1/3	1/2	1	1/2	0.537	0.126	0.512	4.063
S	1/2	1	2	1	1.000	0.234	0.972	4.147
					4.268			4.205
							CI=	0.068

C の立場から

	P	Q	R	S	幾何平均	wLC	M・wLC	λ
P	1	5	3	1	1.968	0.461	1.962	4.254
Q	1/5	1	2	1/2	0.669	0.157	0.658	4.196
R	1/3	1/2	1	1/5	0.427	0.100	0.416	4.150
S	1	2	5	1	1.778	0.417	1.692	4.060
					4.842			4.165
							CI=	0.055

PQRS に対する総合的な求めようとする順位は，各 A, B, C の立場で求めた結果を合わせたマトリクス（ML）と，A, B, C の順位（wh）との関連で求められる。

求める順位（w ）は

w = ML・wh

であり

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="3">ML</th><th rowspan="2">wh</th><th rowspan="2">w=ML・wh</th></tr>
<tr><th>wLA</th><th>wLB</th><th>wLC</th></tr>
<tr><td>P</td><td>0.331</td><td>0.308</td><td>0.461</td><td>0.655</td><td>0.338</td></tr>
<tr><td>Q</td><td>0.150</td><td>0.331</td><td>0.157</td><td>0.250</td><td>0.196</td></tr>
<tr><td>R</td><td>0.308</td><td>0.126</td><td>0.100</td><td>0.095</td><td>0.243</td></tr>
<tr><td>S</td><td>0.197</td><td>0.234</td><td>0.417</td><td></td><td>0.227</td></tr>
</table>

この結果を見ると，w は P > R > S > Q となっていて，選定する順序はこれに準じればよいことになる。

4. 結　　　言

AHP技法は早くから注目されていたが「固有値問題」へのこだわりから難しいと敬遠されてきた。

ここでは「幾何平均手法」を前面に出し，MS-EXCELのマトリクス演算機能の利用により手軽に結果を得ようとする方法を提案した。

提案した手法の要点をまとめると，

まず，各々の要素間について優位の程度を数量化し，表（マトリクス）に纏める。

各行の幾何平均を計算し，その和で正規化することにより順位度を求める

首尾一貫性指標により検証し，求められた順位度により意思決定を行う。

なを，「ジャンケン」などのような「巴問題」には適用しても有益な結果は得られないことに注意したい。

本論文は，本学調査研究費「グローバル経済における金融リスク管理」研究における成果の一部であり，金融リスク解析ツールとして利用する。

5. 参考文献，その他

木下：わかりやすい意思決定論入門，啓学出版社（1992）

木下：孫子の兵法の数学モデル，BLUE BACKS B1203 講談社（1999）

松原：意思決定の基礎，朝倉書店（2001）

生天目：戦略的意思決定，朝倉書店（2001）

桑島，高橋：組織と意思決定，朝倉書店（2001）

小川：組織と意思決定，朝倉書店（2001）

石原，金井：進化的意思決定，朝倉書店（2001）

MS-EXCELはマイクロソフト社の製品である。