不確実性を伴う意思決定の非合理性に対する合理的説明

河　野　敬　雄

（受付　2004 年 9 月 24 日）

要　　　　旨

決定論的世界観は，現実の力学的世界がニュートンに始まる微分方程式モデルを解くことによって決定論的に予測できる，という信念に裏付けられている。たとえ，現実にはあり得ないことが明白であっても綿 1 グラムと鉄 1 グラムを地上で落下させた場合，理想状態では同じ速度で落下する，と信じて疑わない。にもかかわらず不確実な予測を伴う場合，大数の法則を考慮したり，ベイズの定理を計算して予測に応用しよう，という態度は希薄でる。逆に人間の直感によって得られる解が如何に不合理であるか，という研究は数多く行われている。本稿では，その中で，Boudon が主観的合理性を論じる際に引用してある例（[10]）とゲーム理論の分野で知られているムカデ・ゲームについて, コルモゴロフ（1933，[22]）によって確立された純粋数学としての公理的確率論の公理を前提に，新しい合理的説明モデルを提案する。

§0.　序

直感的な「確率」を実証と照らし合わせて検証しようという試みは結構古い歴史を持っている。今，3 つのサイコロを同時に振って出た目の和が 9 である確率と10である確率を比較しよう。目の和が 9 となる場合は

$$(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)$$

の 6 通りであるのに対して，目の和が 10 となる場合は

$$(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$$

であり，同じく 6 通りである。にもかかわらずイタリアの貴族（＝賭博師？）による経験では目の和が 10 となる場合の方がわずかに起こりやすいことが知られていたようである。上記のように場合の数は同じであるから実現頻度はほぼ五分五分であろう，という素朴な推論は正しくない，何故か？と疑問に思い，当時最高の学者であったガリレオ・ガリレイ（1564－1642）に問いただした，ということ自体，まず評価されてよいことである。残念ながら筆者

が知る限り，日本または中国の王侯貴族，知識階級の人間で，このように数理的推論と事実との食い違いをさらに突き詰めて考察，探求しようとした例はないように思われる。

さて，ガリレオの解答はよく知られているように，たとえ見た目には区別がつかないサイコロであっても区別して場合の数を勘定せよ，というものであった。その結果は，3 つの目の和が 9 である場合の数は25，3 つの目の和が10である場合の数は27となって，わずかではあるが 3 つの目の和が10である場合の方が有利であり経験的事実をよく説明している，というものであった。経験的事実の集積，直感的推論，その検証，より深い考察に基づく数理モデルの提出，その検証というこの一連のプロセスは現代の（少なくとも自然科学の）研究においても基本的に何の変更を加えることなく通用する研究態度である。

しかしながら，不確実さを伴う判断ないし選択を強いられた場合，「確率」の値がはっきりと指定されている場合でも，必ずしも「合理的」推論が出来ず，直感と合わない，といって実証もできそうにない例というものも古くから知られている。そのひとつがいわゆるペテルスブルグ問題（ペテルスブルグのパラドックス）である。

いま，A が公平な硬貨を表が出るまで投げ続けて，n 回目に初めて表が出たとするとその時点で A は 2 の n 乗ドルもらえる，という賭けに誘われたとする。このとき，A は何ドルまでなら支払ってこの賭けをするのが有利であろうか，という問題である。当然，A の受け取る賞金の期待値以下であれば掛け金を払って賭けをする方が有利である。ところが，期待値は実現確率×そのとき受け取る金額の合計であるから，

$$\text{このゲームで受け取る賞金の期待値} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n} \times 2^{n}) = +\infty$$

となって，期待値は無限大，つまりいくら支払ってもこの賭けは A にとって有利なのである。しかし，多くの人は10ドルでもこの賭けのために支払おうとはしない，と言われている。何故か，とうことはこれまた古くから説明が試みられている。例えば，ダニエル・ベルヌーイ（1700−1752）は人間の評価（期待値）は金額が大きくなるに従って額面よりも小さくなる（効用逓減の法則を仮定した効用関数を導入することに相当する），として金額の対数をとって平均することを提案している。この場合，期待値が有限（きわめて小さい値）になることは確かであるが，客観的な実証データが得られるようには思われないので検証しようがない。

数学的には級数のいわゆる収束のオーダー（この場合は発散のオーダー）の問題のように思われる。つまり，2 百万ドル以上を得るためには20回以上裏が出続ける必要があるが，初めて表が出る平均回数はわずかに 2 回なのである。10回裏が続けて出た場合はその時点で 2 の11乗ドルを支払って賭けをやめて貰う，という変更をしても現実的にはさしたる変更ではないと感じるであろうが，この場合の期待値は12ドルである。数学的実証性から言えば，例え

ば1秒間に100億回の賭けをして，それを100億年続けた場合には，高い確率で十分大きな算術平均の値が得られるであろうが，現実的であるとは誰しも思わないであろう。

ペテルスブルグのパラドックスに関してはその後多くの人（ただし，数学者以外の人が多いようであるが）が論じているが筆者を納得させるような説明は見当たらない。

確率評価のパラドックスとして心理学の分野の実証研究では，例えばエルスバーグのつぼの問題がよく知られている（[38]）。客観的には同一の条件を与えても，合理的推論から人間の判断がずれる現象は「フレーミング効果」という名前で知られている。これらはいずれも期待値から予想される合理的判断と多くの人間の直感的判断にづれがあることを示している。

確率の直感的理解と合理的理解との乖離については，相当に数学的思考訓練を積んでいると思われる科学者でさえ例外ではない。たとえば，偏微分方程式論の分野では先駆的業績を残している数学者ダランベール（1717－1783）は，2枚の硬貨を同時に投げた場合，表が0枚，1枚，2枚出る確率が等しい，と終生信じていたといわれる（[44]）。なお，彼の考え方が自明に誤りである，と考えるのも誤りである。何故ならば，統計力学において，ある状況下では二つのボール（サイコロ，硬貨）を区別しないで場合の数を数える必要があるからである（ボーズ・アインシュタイン統計という。フェラー［15］，33頁を参照されたい）。

本稿においては，前述のように，微分方程式を前提とした決定論的推論と違って，未だに様々な考察あるいは疑問が提出されている人間の直感的確率評価と，数理モデルとの乖離を取り上げて新たな説明モデルを提案するものである。人間の直感的確率評価があてにならないことは古典的確率論の大成者であり，かつ決定論の権化（ラプラスの魔という）のようにいわれるラプラス（1749－1827）が「確率の見積もりにおける錯覚について」(([25]，132頁)，においてつとに指摘していることではあるが未だに定説をみていないように思われる。

以下本稿の内容は数理社会学会における口頭発表

(I)　確率評価の錯覚──主観的合理性の1側面──第33回数理社会学会（東京工業大学，2002年3月）

および

(II)　ムカデ・ゲーム再考──後ろ向き帰納法の回避モデル──第35回数理社会学会（慶応義塾大学，2003年9月）

のレジメに加筆修正を加えたものである[1)]

1）　本研究の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究（B））「秩序問題への進化ゲーム理論的アプローチ」（研究代表：大浦宏邦，課題番号：14310095，2002年－2004年）の援助を受けた

(I) 確率評価の錯覚――主観的合理性の 1 側面

§1.1. 動機および目的

Boudon（1989，［10］，174頁）は「主観的合理性」概念の重要性を論じる際に次のような例を引用している（[42]）。

「被験者は，実験者によってコインの表ー裏をあてるゲームの出る面を予測するように求められる。しかしながら，そのゲームで使われるコインは歪んでいて，表と裏は，0.8 と0.2 の確率で出現する，と被験者は告げられる。たいていの場合，被験者は誤った解決法を選択する。すなわち，彼らは，予測されようとする一連のデータと同じ確率によって制御された出現規則を生成するのである。言いかえれば，彼らは，0.8の確率で「表」の出現を，また0.2 の確率で「裏」の出現を予測することを選ぶのである。そうすることによって，彼らは，0.68（註：=0.8×0.8+0.2×0.2 ここでは，暗に独立性を仮定している）の確率で出現する面を正確に予測するのである。これは，もし彼らがすべての試行で表を予測することを選択する場合に得るであろう結果と比べても貧弱な結果である。なぜならば，それぞれの出現を彼らが正確に予測する確率は，この場合 0.8 と等しくなるからである。」

この事実は 1930 年代にすでに心理学の分野で動物実験，および人間について観察された現象と同一であると思われる。小野 茂 によると「確率一致現象」と呼ばれている（心理学の分野でどの程度普遍的用語かは不明（[30]，[31]）。なお，［30］の 2 章「確率学習」のデータは［16］によっている。）

確率一致現象を説明する数理モデルは心理学の分野ではすでにいろいろ知られている。例えば，Estes の刺激標本モデル（stimulus-sampling model），Atkinson の強弱条件付けモデル（strong and weak conditioning model），Suppes & Atkinson の観察反応モデル（observing-responsemodel）等である。確率一致現象はゲーム理論的合理性と矛盾するために，「合理性」の観点から様々に議論されてきた。（H. A. Simon（1982）［37］，Thrall, R. M. Coombs, C. H. & Davis, R. L.［11］）

§1.2. 主観的合理性

同じ長さの線分の両端の補助線の違いによって，視覚的には同じ長さに見えない，という視覚における錯覚現象はひろく知られている。しかしながら，この事実をもって，体系的に「主観的幾何学」なるものが考察されたことはない。一方，確率，特に条件付確率に対する直感的評価が必ずしも確率の公理からの計算結果と一致しないことは古典確率論を大成したといわれるラプラス自身が強調していることである。彼のエッセイ（『確率の哲学的試論』内井

惣七訳 岩波文庫青925-1（1997）132頁－142頁，「確率の見積もりにおける錯覚について」においても一章を割いて論じている。彼は「視覚に錯覚があるように精神にも錯覚がある。そして，さわってみて目の錯覚が正されるように，反省と計算によって精神の錯覚も正される」（同書 132 頁），と主張している。

なお，Feldman（[14]，440頁）によると「金銭でもって動機付けられると，被験者は二者択一実験で各回ごとに一番起こりそうな事象を予測することがわかった」と述べているから，一定の条件下では確率的錯覚を免れる可能性はある（丁度，視覚の錯覚が解消されるように）。ひとつの可能性として，予測することを求められているわけではなく，自己の利益を最大にすることを求められている，という違いではないだろうか。

本稿の目的は，「確率一致現象」が，数理モデルで表されるある種の「錯覚」から起こり得ることを示すことである。

§1.3.　確率評価の錯覚——数理モデルによる表現

被験者（プレーヤーⅠ）が実験者（プレーヤーⅡ）の提示するランダムな信号（a or b）を推量することを求められているから，プレーヤーⅠの利得行列は

	a	b
a	1	0
b	0	1

となる。（行がプレーヤーⅠの戦略，列がプレーヤーⅡの戦略）実験はまず，プレーヤーⅠが推量して，次にプレーヤーⅡが信号を提示してゆくので，本来は展開形のゲームであるが，基本的なアイディアを説明するためにまず標準形のゲームとして定式化する。混合戦略を含めて表現するためにプレーヤーⅠの選ぶ戦略 X は確率変数とみなすことが出来る（確率概念を用いる時に分布で表現するのはよい定式化ではない）。同様にプレーヤーⅡの選ぶ戦略を Y で表す。ただし，被験者は実験者が次に提示する信号を推量することを求められているから，X と Y は必ずしも独立な確率変数であるとは限らない（通常の非協力ゲームでは独立性を仮定している）。つまり，(X, Y) は (a, a)，(a, b)，(b, a)，(b, b) のどれかの値を取る確率変数である。このとき，プレーヤーⅠの利得 $u_{X,Y}$ は

$$u_{X,Y} = P(X = a,\ Y = a) + P(X = b,\ Y = b)$$

である。（注意：$u_{X,Y}$ は確率変数ではない。）この問題ではプレーヤーⅡの利得は考慮しないプレーヤーⅠのひとりゲームである。従って，

問題：確率変数 Y の周辺分布 $P(Y = a) = p,\ P(Y = b) = 1 - p$ を所与としたときに，プレー

ヤー I の利得 $u_{X,Y}$ を最大にする戦略 X を求めよ。ただし，確率変数 X と Y は必ずしも独立とは限らない。

この問題の解は次の定理によって与えられる。

定理 1：(X, Y) の分布を次のように定めた場合に，$u_{X,Y}$ は最大値をとる。

$$P(X=a,\ Y=a)=p,\ P(X=a,\ Y=b)=0,$$
$$P(X=b,\ Y=a)=0,\ P(X=b,\ Y=b)=1-p.$$

証明：(X, Y) の分布は今の場合，パラメーター 3 つで表現されるが（根元事象が 4 個あるから）$P(Y=a)=p$ が所与であるから，後 2 個のパラメーター (s, t) を次のように定める。

$$P(X=a/Y=a)=s,\ P(X=a/Y=b)=t.\ 0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1.$$

ここで，$P(A/B)$ は事象 B（ただし，$P(B)$　0）を与えたときの事象 A の条件付確率 $P(A\cap B)/P(B)$ を表す。このとき，

$$\begin{aligned}u_{X,Y} &= P(X=a,\ Y=a)+P(X=b,\ Y=b)\\ &= P(X=a/Y=a)P(Y=a)+P(X=b/Y=b)P(Y=b)\\ &= sp+(1-t)(1-p)\end{aligned}$$

従って，容易に分かるように $u_{X,Y}$ は $s=1,\ t=0$ の時に，最大値は 1 をとる。このことは確率分布が

$$P(X=a,\ Y=a)=p,\ P(X=a,\ Y=b)=0,$$
$$P(X=b,\ Y=a)=0,\ P(X=b,\ Y=b)=1-p,$$

を意味する，つまり定理が証明された。

しかしながら，この定理は $P(X=Y)=1$ を意味するから，ランダムに戦略を決めている相手の手を完全に予測することを意味しており，現実には不可能である。しかし，プレーヤー I は相手の手を予測するように要請されて，必死に予測を行なおうとする結果，次のような錯覚に陥るであろう。

確率評価の錯覚：プレーヤー I は最良の予測と信じて次のような戦略を選択する。

$$P(X=a/Y=a)=P(Y=a),\ P(X=b/Y=b)=P(Y=b).$$

この定式化は Boudon の次の文章を数式で表現したと見なすことも出来る。（[10]，175頁）

「the subjects made the conjecture that, in order to replicate a model, a goodstrategy is to generate the copy by applying the very rules that govern the production of the model.」

さて，上記のような錯覚に陥った場合の論理的帰結は次の定理によって示される。

定理 2：「確率評価の錯覚」のもとでは，確率変数 X と Y は独立である。

証明：仮定によって，$s = p,\ t = 1 - P(X = b / Y = b) = 1 - (1 - p) = p$ であるから，

$$\begin{aligned} P(X = a) &= P(X = a / Y = a)P(Y = a) \\ &\quad + P(X = a / Y = b)P(Y = b) \\ &= p^2 + p(1 - p) = p. \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} P(X = a,\ Y = a) &= P(X = a / Y = a)P(Y = a) \\ &= p^2 = P(X = a)P(Y = a). \end{aligned}$$

故に，事象 $(X = a)$ と $(Y = a)$ は独立。残りの組合せはこの等式から自動的に独立となることが知られている（簡単な計算によって確かめられる）から，確率変数 X と Y は独立である。なお，$P(X = a) = p$ となることから，「確率一致現象」も説明できる。**本稿の数理モデルの特徴は，確率変数 X と Y の独立性がアプリオリな大前提ではなくて，モデルからの帰結として導かれることである。**

確率変数 X と Y が独立となった結果，繰り返し試行においては強大数の法則が成り立ち，データの相対頻度は Y の分布と一致する。つまり，確率一致現象が観察される。ただし，繰り返し試行の数理モデルは厳密には確率変数列で表現しなければならないから，もう少し精密な定式化が必要である。

さて，もしも最初から X と Y の独立性を仮定すると

$$\begin{aligned} u_{X,Y} &= P(X = a,\ Y = a) + P(X = b,\ Y = b) \\ &= P(X = a)p + P(X = b)(1 - p) \\ &= P(X = a)(2p - 1) + 1 - p. \end{aligned}$$

となるから，$p > 1/2$ ならば $P\ (X = a) = 1$ とするのが合理的選択理論においては最良の戦略である。かくて，被験者は社会学者から「君の戦略は合理的ではないね」，と言われるのである。

§1.4.　コメント：問題点ならびに各種実験上の差異

（1）　確率とは何か，ということは自明なことではないと思われる。従って，被験者に確率評価を行なわせる場合，どのように問題を提示するかは重大な問題である。上記の文献に引用されている実験においては，問いかけそのものの妥当性に若干の疑義があるように思われる。もともとランダムな現象を予測させることに問題がある上に，正直に予測しようとすれば，応答が提示条件と独立にはならないのが自然であろう。にもかかわらず，最初から独立性を仮定した上での最適解を「正解」と見なすのはどうもだまされた気がする。また，提示

するランダム現象の確率を被験者にどう提示するかの違いが結果に本質的に関わってくる可能性は否定できないように思われる。少なくとも，3 通りの違いがある。

（a） 被験者自身が客観的に確率評価できる場合。辻（[42]）の実験においては，サイコロの目が1から4であるか，5または6であるか，を問題として提示している。

（b） 被験者に数字で確率を与える場合。Boudon に引用してある例では，確率は 0.8 と 0.2 である，と指示されている。被験者自身が状況判断したわけではない。

（c） 被験者には確率分布を教えないまま，ランダムに提示する。Feldman の例がこの場合に相当する，と考えられるが，相手が人間の場合，被験者と実験者との心理的駆け引きが行なわれる可能性があるので，（a）の場合とは心理的にかなりの違いが生じる可能性がある。動物実験においては当然この状況となる。この場合，被験者は経験的に確率分布を推定せざるを得ない。動物実験においても「確率一致現象」は起こり得る，と言われている。なお，引用文献では明示的な説明がないが，どのような仕方でランダムな列を与えたかは大きな問題である。なぜならば，これがランダムな数列だ，という定義は出来ないからである。

（2） Grant-Hake-Hornseth（[16]，p. 4r）では，被験者は

$$P(X = a,\ Y = b) = P(X = b, Y = a)$$

が成り立つように予測しているに違いない，というモデルを述べている。つまり，$\{X = a\}$ でのミスの確率と $\{X = b\}$ でのミスの確率が等しくなるように推量している，というのである。独立性を仮定すれば，この等式から容易に $P(X = a) = P(Y = a)$ が導かれる。しかし，大前提として独立性を仮定しているのは問題である。

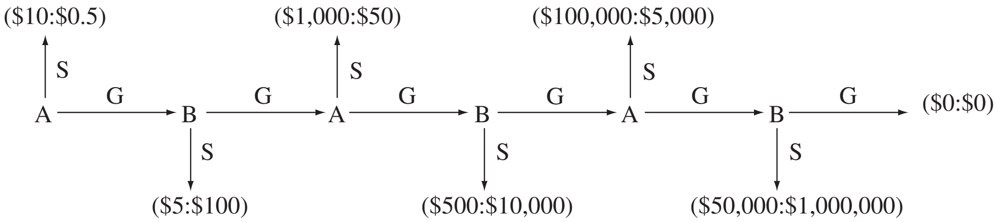
（II） ムカデ・ゲーム再考――後ろ向き帰納法の回避モデル――

§2.1. 動　　機

社会学あるいは心理学において，○○のパラドックスとか○○のジレンマと呼ばれている話は数理的に考えた場合，パラドックスでもジレンマでもなく正解は一意に，かつ自明に求められる場合が多い(注1)。では何故パラドックスとかジレンマと呼ばれるのであろうか。それはひとえに当該のモデルの結論が社会的常識に反し，心理的に受け入れ難いからである。社会科学における数理モデルが社会現象ないし，一般人の常識を可能な限り正確に説明しなければならない，とするならば数理モデルの前提となっている仮定を再検討し，説明力を増すようにモデルの仮定を修正する必要がある。本稿では土場（[12]）によって論じられ，佐藤（[35]）によって批判的に取り上げられている，いわゆる「ムカデ・ゲーム」を再考してみたい。

（注 1 ） Shubik（[36]，p. 193）の最後のフレーズには The paradox of the Prisoner’s Dilemma will neber be solved — or has already been solved — because it does not exist. とある。

§2.2. ムカデ・ゲーム



ムカデ・ゲームは展開形ゲームであって，上図のように偶然手番のない完全情報 2 人ゲームである。先手番 A の選択肢は S（ストップ）と G（ゴー）の二つで，もし S を選択するならばゲームはそこで終了し利得ベクトル（$10:$0.5）を得る。左側の数字がプレーヤー A の利得，右側の数字がプレーヤー B の利得である。もし A が G を選択するとゲームは続き，B の手番となる。B の選択肢も A と同じ S と G の二つで，意味も同じである。B が S を選択した場合，ゲームは終了し，利得ベクトル（$5:$100）が得られる。以下同様にゲームは終了するか続行するかが選択され，高々 $2n$ 回まで続けた後，$2n(n \geq 1)$ 回目にプレーヤー B が G を選択した場合は強制的にゲームを終了して，その利得は両者ともゼロであるとする。図のとおり，ゲームが終了した場合の利得は何回目で終了したかによって異なる。利得構造は次々回に自分の手番にもし戻って来た時に S を選択してゲームを止めると前回の自分の手番で止めたときより利得が多い。ところが，次回の相手の手番の時に相手が S を選択してゲームが終了すると自分の利得は今 S を選択してゲームを止めた時の利得よりは低い. しかし，長くゲームを続ければ，A，B どちらのプレーヤーにとっても初回の利得構造はパレート劣位になっているところがこのゲームのミソである。にも拘らず，最終回（$2n$ 回目）の手番において B は当然，合理的に判断をすると仮定すれば，S を選択するはずであるが，その前の回（$2n - 1$ 回目）の A にとっては，次回に B が S を選択することが明らかならば，自分の手番の時に S を選択する方が得であることは利得構造から明らかである。このように推論して行くと（逆向きの帰納法という）結局 A は初回に S を選択することが合理的である(注2)，という結論になる。もちろん，多少なりとも相手に対する信頼ないし期待があり，相手も G を選択してくれるのではないか，という幻想を持つのも自然な感情かもしれない。(独白：しかし，それはあなたが大学行政に関わらなかった幸せな学者バカであって，このような状況で判断をする場合，最初に S を選択するのは極めて合理的であり，何の問題もない。そのように考えることの出来ない人は部局長になる資質がない，と自覚すべきであろう。なお，初回

（注 2） Phillip-Sugden（[32]）は n 回繰り返し囚人のジレンマゲームにおいて，後ろ向き帰納法を用いた結果として初回にDを選択することが必ずしも合理的とは言えない，ということを主張している。

に A が S を選択することに対する現実的，心理的合理性はなにも後ろ向きの帰納法のせいだけではない。現状よりも悪いことが起こる可能性がある選択肢は絶対に選ばない，というリスク管理の観点から S を選択することはひとつの合理性である。この点も大学では日常茶飯事に経験することで，他学部相手の交渉で相手の善意をいささかでもあてにしてはいけない。しかし通常，合理的選択理論という場合は自分の利得（期待値を含む）を可能な限り最大化するように行動することが求められている。リスクを最小にする，相手との利得の合計を最大にする，相手の利得を最大にする（純粋利他行動）等を定式化する場合は，最初の利得関数を変換してから，通常の期待効用仮説に乗せる必要がある。)

この心理的葛藤は 1 回限りの囚人のジレンマとも共通する心理である（§4 参照)。つまり，プレーヤーの合理性と情報完備性（共有知識）の仮定のどちらか，あるいは両方に無理がある，といわれている。もっとも，「合理性」とは何を意味するのか，「共有知識」の中身は何か，といったことに関しては種々議論があり，必ずしも共通了解が得られているわけではないように思われる。

このムカデ・ゲームの「パラドックス」を回避するために Aumann（[2]）が採用した着眼点はゲーム理論で通常仮定する「共有知識」を再検討することであった。「共有知識」とは，自分は相手がゲームのルールを知っていることを知っており，そのことを相手も知っており，そのことを自分も知っており, , , , という無限の認識列を仮定することである，とされている。社会科学における概念構成は，しばしば自己言及に陥る危険があり，ある種の宿命である，という印象がある。言葉の上での無限系列からパラドックスを導く例としてはギリシャ以来有名なゼノンの逆理(注3) が連想される。しかし，これらの「パラドックス」からは何ら生産的結論は導かれない。その点は例えばラッセルのパラドックス(注4) とは決定的に異なる。ラッセルのパラドックスは集合論の公理化の必要性を認識させる，という成果があった。Aumann にしろ，土場にしろ，彼らの考察から何らかの積極的な成果が得られたとは到底言い難い。

では，ムカデ・ゲームのどこを修正すれば現実感のある結論，つまり初回に G を選択することの合理性が導かれるか，ということをゲーム理論の枠組みの中で考察したい。佐藤に引用がある Kreps（[24]）は合理性を緩めて，ある種の非合理性を導入することによってこの問題を解決しようとしたように思われる。このような立場は合理的選択理論の非現実性に対する批判への対案としてしばしば採用されている。しかし，Aumann（[2]，p. 224）に指摘してあるように非合理性を定義することは困難であり，相手との協調性を仮定してしまうと

(注 3）　先にいるのろまな亀に足の速いアキレスは永久に追いつくことが出来ない，というパラドックス。

(注 4）　すべての集合を集めたものを集合として扱うと矛盾が生じることを指摘した。

最初に設定した問題そのものが消滅する。例えば，Rosenthal（[34]）は G を選択する主観確率を $\min\{1,0.5+D\}$（ここで，D は二つの選択肢の利得の差）とアドホックに仮定して，最後のプレーヤーは S を確率 1 で選択するが，次第に遡って，ついには最初のプレーヤーは確率 1 で G を選択する，という結論を導いている。仮定がかなり不自然であるし，逆向き帰納的に確率を直感的にしろ計算できるとは到底思われない。一方，共有知識の仮定（情報完備）の仮定を緩めて情報不完備ゲームによる定式化も以前から知られていが，ムカデ・ゲームの場合，情報が完備でないことから「パラドックス」が導かれているわけではない。(Luce-Raiffa（[26]，3.6節）には「合理性」と「共有知識」の仮定が強すぎるとの批判があり，同書80−81頁にはゼロサムゲームについてムカデ・ゲームと本質的に同じ問題点を論じている。)

本稿では，形式上囚人のジレンマ・ゲームに対する Shubik（[36]）の結果（割引率を持つ無限繰り返し囚人のジレンマ・ゲーム）を殆どそのままムカデ・ゲームに適用する，という定式化によって，あくまで完全合理性と（主観的，心理的ではあるが）情報完備性を仮定して，A，B 両プレーヤーが初回に G を選択することが合理的である，という結論を導く（共有知識，という場合，結局は主観的，心理的であることは避けられないように思われる）

§2.3.　定式化と結論

割引率を持つ繰り返し囚人のジレンマ・ゲームの場合，よく知られているように All-D 以外にナッシュ均衡が存在してナッシュ均衡として協力が実現し得る。しかし，ある有限回 n で終わることが分かっている場合は逆向きの帰納法によって All-D 以外にナッシュ均衡はあり得ない。ここで，割引率を将来の利得を現時点で評価するから割り引いて評価する，と主観的に解釈することによって 1 回限りの囚人のジレンマを利得行列の違う別のゲームに変換してジレンマを回避する，という解釈がある。この定式化は，次のゲームが行われる確率が $0<\delta<1$ であり，そのことはプレーヤーとは独立に決まり（例えば硬貨を投げて決める），そのルールをプレーヤーは知っている（確率の公式から，見かけ上は無限繰り返しゲームではあるが，確率 1 でゲームは有限回で終了する），という数理モデルと形式上は同じ数理構造をしている。このような定式化によって，1 回限りの囚人のジレンマでも協力行動が（主観的に）合理的である，という解釈が成り立つ。もしこの割引率が各プレーヤーごとに主観的に決まるとするならば，プレーヤー A の割引率 δ_A とプレーヤー B の割引率 δ_B は一致している必要はない。その事実を共有知識として仮定すればよい。必ずしも共有知識でなくとも，結果として δ_A，δ_B ともに $(T-R)/(T-P)$ より大であると互いに評価していれば，両者とも Trigger 戦略を取るのが合理的選択となり，結果として協力が実現する。(§4 参照)。もうひとつ注意してほしいのは，この事実はある有限回 n でゲームが終了することをプレーヤーが知っている，ということとは全く異なる，ということである。無限回続くゲームは現実的ではない，

という批判は「確率 1 で有限回で終わる」という数理モデルを誤解していると思われる(注5)。ニュートンの力学モデルは体積ゼロで質量は持つ「質点」という仮想の概念を基本にしているが，現実の物体で体積がゼロということはありえないと言ってニュートン力学を否定する人はいない，従って，十分長い繰り返しゲームに対して，初回においては，いつ終わるかは分からないが有限回で終わる（という「共有知識」を持っている）ゲームである，と仮定することはモデルとして不自然ではないし，その数学的帰結として現実のゲーム（十分長い繰り返しゲーム，あるいはムカデ・ゲーム）に対する現象（実験結果）が説明できるならば，そのモデルはよいモデルである，と言ってよいのではないだろうか。少なくとも「合理性」や「共有知識」の解釈をめぐる「神学論争」をするよりは生産的である，と考える。（Aumann（[5]）は合理性を細分して substantive rationality と material rationality に分けている。）

以上のことを頭において，ムカデ・ゲームにおいてもまず，人間は十分先のことを正確には認識できないから，ゲームはいつまで続くかはわからない，と仮定する。従って，このように仮定すると逆向きの帰納法は使えない。しかし，G を選択した場合は利得が確定しない。G を選択する根拠は，将来のいつかの時点でゲームが終了した時に得られるであろう期待利得が今 S を選択するより有利である，という合理的根拠に基づく確信である。実際問題としても，いつ終わるか分からないがいつかはゲームが終わるであろう，ということは誰しも確信しているはずである（人間の寿命のように）。ムカデ・ゲームでの問題は，初回にプレーヤー A の立場に立ったとき，次のプレーヤーBがGを選択するのが合理的と判断するであろう，とプレーヤー A が合理的に推論できるか，ということである。この点に関しては 1 回限りの囚人のジレンマで何故「協力」を選択することが心理的，主観的に判断して合理的か，という解釈と同じである。もし A も B も G を選択するのが合理的である，と結論されるならば 3 回目以降はその時点で同じことを考察すればよい。

モデルの仮定

今，ゲームを始める時点でプレーヤー A とプレーヤー B は，$\{2, 3, ...\}$ に値をとる確率変数 X_A と $\{3, 4, ...\}$ に値をとる確率変数 X_B をそれぞれ主観的に心の中に持っていて，A は X_A の分布に従って，ゲームが終了すると信じ，B は X_B の分布に従って，ゲームが終了する，と信じていると仮定する。ゲームが終了する原因は相手の判断ミスか客観的理由によるのか，自分がその時点でやめようと思う可能性であるかは問わない。もし，この分布が共有知識となっていれば正しく判断され，もし間違って評価していれば結果として不合理な選択となる。それは現実に当てはめる際の問題であって，モデル上の問題ではない，つまりパラドックス

（注 5 ） Basu（[6]），Rosenthal（[33]，Neyman（[29]）も長さが有限の繰り返しゲームを扱っているが本稿とは定式化が全く異なる。

ではない。

割引率をもつ繰り返し囚人のジレンマ・ゲームの場合も，割引率 δ は共有知識である，と暗に仮定してあるが，それぞれのプレーヤーが主観的に別々の割引率を持っていて，利得行列を変換していたとすると，一方のプレーヤーが TFT 戦略を取るのが合理的であると思って初回に C を選択しても，他方のプレーヤーは彼の主観的に合理的な判断によって初回に D を選択するかもしれない。しかし，その時点でお互いに間違った評価をしたことに気づくことになる。2 回目以降に割引率をどのように評価し直すのが合理的か，という基準は次の問題である。

ここで，

$$P(X_A=n)=p_n>0,\ \sum_{n=2}^{+\infty}p_n=1,\ P(X_B=n)=q_n>0,\ \sum_{n=3}^{+\infty}q_n=1$$

と仮定する。分布の仮定から A にとっても B にとってもゲームは主観的にはいつかは終わる，と信じられていることになる。数理モデルは話を一般化した方がむしろ構造がよく見えて理解しやすいので，n 回目にゲームが終了したの時の利得ベクトルを (a_n, b_n) とする。ムカデ・ゲームというときは（上記のパラドックスが生じるのは）

$$a_2<a_1<a_4<a_3<a_6<a_5<\cdots(a_{2k}<a_{2k-1}<a_{2k+2}),$$

b_n に対しても同様に

$$b_2<b_1<b_4<b_3<b_6<b_5<\cdots(b_{2k}<b_{2k-1}<b_{2k+2})$$

を仮定することである。このとき，A が期待効用仮説に基づく合理的判断によって初回に G を選択するための条件は

$$(*)\ \ a_1<E[a_{X_A}]=a_2p_2+a_3p_3+\cdots$$

が成り立っているときである。ここで，$E[a_{X_A}]$は確率変数 a_{X_A} の期待値である。同様に B が期待効用仮説に基づく合理的判断によって自分の手番の初回に G を選択するための条件は

$$(**)\ \ b_2<E[b_{X_B}]=b_3q_3+b_4q_4+\cdots$$

が成り立っているときである。かつ，この場合，相手が G を選択しているときに自分がSを選択すると平均利得が下がる，という意味で G を選択することはナッシュ均衡である。均衡解のことや後ろ向き帰納法を最初から考えないと決めて，ただ現象を説明する数理モデルを立てる，というのであれば，何時終わるかわからない無限回ゲームを想定する必要はなく。上記の期待値の計算で予め定めた n までの和と初回に S を選択した時の利得とを比較すればよい。

最初の例で，$p_n=(1-\delta_A)\delta_A^{n-2}$，$q_n=(1-\delta_B)\delta_B^{n-3}$と仮定して（$\delta_A, \delta_B$ がゼロに近い程ゲームは早く終了すると予想していることになる），実際に計算してみると

$$\delta_A>0.00504\Rightarrow 10<5(1-\delta_A)+1{,}000(1-\delta_A)\delta_A++500(1-\delta_A)\delta_A^2\cdots$$

$$\delta_B>0.00504\Rightarrow 100<50(1-\delta_B)+10{,}000(1-\delta_B)\delta_B+5{,}000(1-\delta_B)\delta_B^2\cdots$$

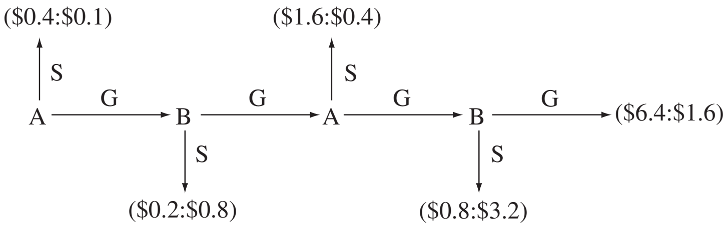
となる。ゲームがいつ確定的に終わるかわかっていない場合，または，自分が出来るだけゲーム

を続けたいと思い，相手にもそう期待している場合は，δ_A, δ_B をあまり小さく評価するとは思えないから，上記のような仮定のもとでは二人とも G を選択するのが合理的である，と判断する可能性が高いという心理的感覚が得られる。上記の計算では… のところは無視して計算してあるから，人間の能力として無限級数を感覚的に直ちに計算できるということは仮定していない。

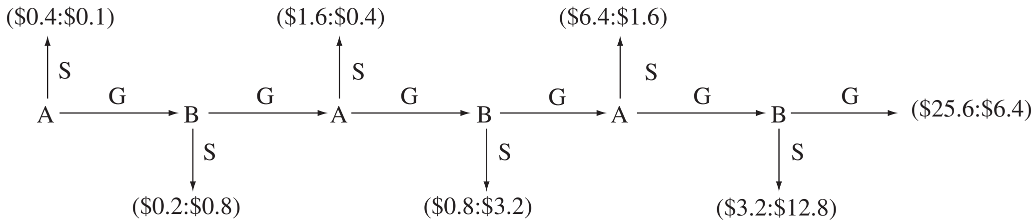
§2.4.　Discussion

（1）　ムカデ・ゲームの実験結果とその解析は McKelvey-Palefrey（[28]）においてなされている。彼らは，4 回で終わるムカデ・ゲームと 6 回で終わるムカデ・ゲームを比較している。彼らのムカデ・ゲームは次のような構造をしている。

4 回で終わるゲームの場合。



6 回で終わるゲームの場合。



n 回目でゲームが終わった（n 回目のプレーヤーが S を選択した）相対頻度 f_i, および各選択肢に来た時に S を選択した条件付確率 $p_i = f_i / (1 - f_1 \cdots - f_{i-1})$ ただし，$f_0 = 0$ （原論文の定義式は間違っていると思われる。数値そのものは正しい)。(ゲームの総数は281，同じ相手とは対戦していない）は次表のようになっている（原論文 TABLE IIA, IIB より)。

4 回で終わるゲームの場合。

プレーヤー（戦略）	$A(S)$	$B(S)$	$A(S)$	$B(S)$	$B(G)$	
相 対 頻 度	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	合計
デ　ー　タ	0.071	0.356	0.370	0.153	0.049	0.999
条件付確率	p_1	p_2	p_3	p_4		
デ　ー　タ	0.071	0.383	0.646	0.754		

初回にS（ストップ）を選択した相対頻度は7.1％であるのに対して，最終回になおGを選択したプレーヤーが4.9％もいて，これは合理的選択理論からすれば明らかに不合理な選択である。相手が2回もGを選んでくれたことに対する義理立てなのか，自分がここでSを選ぶことの後ろめたさなのか？ あるいは，もともとゲームの意味（ルール）を理解していなかったのかもしれない。（被験者はアメリカ人の大学生である）

次に別のグループによる6回で終わるゲームの場合。（原論文 TABLE IIA, IIB より）。

プレーヤー（戦略）	$A(S)$	$B(S)$	$A(S)$	$B(S)$	$A(S)$	$B(S)$	$B(G)$	
相 対 頻 度	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	合計
デ ー タ	0.007	0.064	0.199	0.384	0.253	0.078	0.014	0.999
条件付確率	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
デ ー タ	0.007	0.064	0.214	0.526	0.731	0.839		

6回ゲームの場合，初回にS（ストップ）を選択した相対頻度は4回ゲームより一桁小さい0.7％であり，最終回になおGを選択したプレーヤーも1.4％に減少している。ゲームの回数がわずかに2回増えただけにも関わらず，初回でSを選択するプレーヤーが激減している。ゲームの回数の情報は初回の選択に極めて大きな影響を与えていると推察される。最初に指示されるゲームの回数が多い場合，自分も相手もゲームを少なくともしばらくは続けたいと期待して前記の δ_A, δ_B を大きく見積もっているのではないだろうか。ゲームの回数の影響はプレーヤーBにも影響を与えていて，上記の分布を見ると6回ゲームは4回ゲームの分布をほぼ右に2回だけシフトしただけである。このことはゲームの終わりが近づくにつれてSを選択する（つまり合理的に判断する）誘引が強くなってくることを示している。両ゲームとも回が進むにつれて選択する時点でのSを選択する条件付確率は単調に増加していることが見て取れる。とは言っても最後の選択肢でもなおGを選択するプレーヤーは少数ながら存在する。この現象を説明するためには何か別の動機ないし心理的要因を仮定する必要があるだろう。たとえば，人間は，「相手に「自分が利己的な人間だと思われたくない，そう思われると不利である」という利己主義」の心理が働くのかもしれない。

彼ら自身も数理モデルを立ててこの現象を説明しようと試みている。彼らの定式化は 1. 情報不完備ゲーム（人間のタイプとして利己主義者と利他主義者がいる）2. 2種類のエラー（行動のエラー，信念のエラー）を仮定する，というものである。従って，本稿とはモデルの設定が基本的に異なる。

（2） 囚人のジレンマゲームとの対比：1回限りの囚人のジレンマに対する実験的研究とその理論付けに関しては山岸グループによる精力的研究がある（[18]，[21]，[40]，[43]，[45]）。[45] によれば，1回限りの囚人のジレンマ・ゲームにおいても協力行動をとるのは

「社会的交換ヒューリスティックスが活性化されることによって，ゲーム自体が安心ゲームの利得構造に変換されて認知されるためである」という説明がなされている。なお，山岸達は「繰り返しゲームとは特定の相手と繰り返し行うゲームである」，と定義しているが，相手が違うにしろ複数回のゲームの利得の合計を考慮する限りは繰り返しゲームであると考える方が自然であると思われる。例えば，有名な割引率を持つ繰り返しゲームは，現実には 1 回限りのゲームでも人間が社会的動物である以上，常に将来再びであうかもしれない，同じ相手と再びプレーする確率は δ くらいであろう，と心の中で想定した利得を基に意思決定している，と解釈することも可能であろう。その場合，例えば，TFT 戦略対 All-D 戦略との利得構造は安心ゲームと同様の利得構造になる。違いは山岸達がゲーム理論に社会心理学的根拠を導入しているのに対して，割引率を持つ囚人のジレンマ・ゲームはあくまでゲーム理論の枠内のみで「ジレンマ」を解決しようしていることである。ゲーム理論の枠の外のからもっともらしい説明をすることは他にも可能であろう。例えば，[13]，[27] のように感情自体が例えば脳内物質によって引き起こされて，進化的淘汰の対象になり得ると仮定すると囚人のジレンマ・ゲームにおける協力行動を説明する別の解釈はあり得る。すなわち，[45] に述べられているように囚人のジレンマ・ゲームにおいて，相手が先にすでに C を出していることが分かった後でもなお，C を出すプレーヤーが実験的に多数見られることの説明は「D を出すことに対する罪悪感があるから」であり，「罪悪感」をある程度持つグループは協力行動をとりやすく結果的に個人的にもグループ的にも進化的に有利である，という解釈である。この解釈を実証するためには罪悪感を引き起こす脳内物質を特定する必要があり，現在の研究レベルをもってしても容易には検証できないかもしれないが (注6)。もちろん，罪悪感が強すぎると生物学的な適応価を下げるであろうから，その場合は「宗教」ないし「神」を「発明」して「救い」や「赦し」の概念を導入する必要がある。[1] には，大学生292名に対する自記式調査から，罪悪感には社会的適応機能がある，との結果が報告されている。

なお，[17] の題名は One-Shot PD の協力行動となっているが割引率を持つ繰り返しゲームの利得行列を用いている。ということは割引率を，「実際に」ゲームを繰り返す確率，という解釈をしていない，ということであろう。「 1 回限りの囚人のジレンマ・ゲーム」とは何を意味するか，という定義からして問題であることがわかる。数理モデルが表現している「 1 回限りの囚人のジレンマ」以上に何がしか心理的，社会的プラス・アルファの要素を持ち込むならば，○○という条件の下での囚人のジレンマ・ゲームの研究，と明示すべきであろう。

(3)　1 回限りのゲームではなく，予め定められた有限回の囚人のジレンマ・ゲームの場合

(注 6)　「不安」を引き起こす脳内物質は知られている ([20])。「不安」「驚き」「怒り」「喜び」「嫌悪」「悲しみ」は人類共通の感情として脳の機能から説明する説はある ([39])。残念ながら「罪悪感」はこの中に含まれていない。しかし，「羞恥心」も抜けているのではないだろうか。(「羞恥心」「罪悪感」はバイブルの記述から自明なのかもしれない)

も（1 回でも協力行動を選択するプレーヤーが多いわけであるから）当然初回に C を選択するプレーヤーはより多くなる。しかし，合理性と完全情報を仮定する限り，後ろ向き帰納法によって，All-D が唯一のナッシュ均衡解である。それでもなお，協力行動をとることの合理的説明もいろいろなされているが（[6]），ゲーム理論の枠内で有限回のゲームのままでの説明にはやはり無理を感じる。ゲームの回数が十分長い場合は，割引率（次のゲームが行われる確率）を持つ無限回ゲーム（確率 1 で有限回でおわるが，回数を予め指定することは出来ない）という数理モデルによって，協力行動が発生する，という説明の方が数理モデルとしては自然な感じを持つ。

なお，従来の論文では有限回あるいは無限回繰り返しゲーム，という言葉の意味にかなりの混乱が見られる。数理モデル上は a）予め指定された回数のゲームを行う， b）確定的に，ゲームが終了する回数を指定することは出来ないが，確率 1 で有限回で終わるゲーム，c）正の確率で（あるいは可能性として）無限回ゲームを行う（この場合の利得を確定するためには極限操作が必要）の違いは明白である。多くの論文では b）と c）を共に無限回ゲームと呼んでいるようであるが，ゲームを行う回数が有限である，という意味では b）は有限回ゲームであるとみなすべきであろう。たとえば，有名な割引率を持つ繰り返し囚人のジレンマ・ゲームは, 頭の中でゲームが無限回続くと想像して将来の利得を割り引いて現在のゲームの利得構造を変更する場合は空想によって利得行列を変更するだけであるから1回きりのゲームとみなされるが，もし次回にもゲームが行われる確率が $0<\delta<1$ である，と理解した場合は b）のケースなのである。しかしながら，多くの論者は c）のケースと理解しているようである。これは可算加法性を前提とするコルモゴロフの確率論に立つ限り誤解である。かといって素朴なラプラス流の有限確率論では数学的に正確に記述することはできない。純粋数学の分野以外ではコルモゴロフの公理的確率論以外の「確率」が種々議論されているが現実理解に適用してみても十分に成功しているとは思われない。なお，不確実さを確率論的に定式化するのではなく，いわゆるファジー理論によって理解しようとする試みはあるが本稿では取り上げない。

参　考　文　献

[1] 有光興記（2001）罪悪感，羞恥心と性格特性の関係『性格心理学研究』第 9 巻 第 2 号 71–86.

[2] Aumann, R. J.（1992）“Irrationality in Game Theory”. in Dasgupta, P., D. Gale, O. Hart, and E. Maskin.（eds.）*Economic Annalysis of Markets and Games: Essays in Honor of Frank Hahn*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

[3] ――――.（1995）Backward induction and common knowledge of rationality. Games and Economic Behavior, vol. 8, 6–19.

[5] ――――.（1996）Reply to Binmore. Games and Economic Behavior, vol. 17, 138–146.

[4] ――――.（1998）On the centipede game. Games and Economic Behavior, vol. 23, 97–105.

[6] Basu, K. (1987) Modeling fintitely-repeated games with uncertain termination. EconomicsLetters 23, 147–151.
[7] ————. (1990) On the non-existence of rationality definition for extensive games. International Journal of Game Theory, vol. 19. pp. 33–44.
[8] Binmore, K. (1987) Modeling rational players. Economics and Philosophy, vol. 3, 179–214.
[9] ————. (1996) A note on backward induction. Games and Economic Behavior, vol. 17, 135–137.
[10] Boudon, R. (1989); Subjective rationality and the explanation of social behavior. Rationality and Society, vol. 1, No. 2. pp. 173–196.
[11] Thrall, R. M. Coombs, C. H. & Davis, R. L. (Eds.) (1954); Decision Processes. Wiley & Sons.
[12] 土場 学 (1993)「ゲームのパズル——合理性のパラドックスと知識のパラドックス——」海野道郎編『社会的ジレンマに関する数理社会学的研究』科学研究費報告書。
[13] 遠藤利彦 (1996)『喜怒哀楽の機嫌——情動の進化論・文化論』 岩波科学ライブラリー41。岩波書店
[14] Feigenbaum, A./Feldman, J. (1963); Computers and Thought. McGraw-Hill.『コンピューターと思考』安部統，横山保監修，好学社 (1969)，第II部第 3 節「2 者択一実験における行動のシミュレーション」(J. Feldman) pp. 425–450.
[15] Feller, W. (1957) An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 1.『確率論とその応用』I・上 河田龍夫監訳 現代経営科学全集 5 紀伊国屋 (1960)
[16] Grant, D. A. Hake, H. W. & Hornseth, J. P. (1951); "Acquisition and extinction of a verbalconditioned response with differing percentages of reinforcement. J. Experimental Psychology, vol. 42, no. 1, 1–5.
[17] Harrington, Jr. J. (1995) Cooperation in a one-shot Prisoner's Dilemma. Games and Economic Behavior, vol. 8, 364–377.
[18] 林 直保子 (1995) 繰り返しのない囚人のジレンマの解決と信頼感の役割 The Japanese J. of Psychology, Vol. 66, No. 3, 184–190.
[19] Humphreys, L. G. (1939); The effect of random alternation ofreinforcement on the acquisition and extinction of conditioned eyelid reactions. J. Exp. Psychol., vol. 25, pp. 141–158.
[20] 貝谷久宣 (1997)『脳内不安物質』ブルーバックス B1184 講談社。
[21] 清成透子，山岸俊男 (1996) コミットメント形成による部外者に対する信頼の低下 The Japanese J. of Experimental Social Psychology, Vol. 36, No. 1, 56–67.
[22] Kolmogoroff, A. N. (1933) Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer 『確率論の基礎概念』根本伸司他訳 東京図書 (1969)
[23] 河野敬雄 (2001)：条件付確率に関する 2，3 の注意 「数学」53巻 4 号，pp. 90–98. 岩波書店
[24] Kreps, D. M. (1990) *Game Theory and Economic Modelling*. *Chapter 4*. Oxford University Press.
[25] Laplace, P-S. (1814); Essai philosophique sur les probabilités.『確率の哲学的試論』内井惣七訳 岩波文庫青925-1 (1997). 132頁－142頁，確率の見積もりにおける錯覚について
[26] Luce, R. D. and Raiffa, H. (1957) *Games and Decisions, Introduction and Critical Survey. pp. 80–81*. Dover Pub.
[27] マット・リドレー (2000)『徳の機嫌——他人をおもいやる遺伝子』岸 由二監修 翔泳社。
[28] McKelvey, R. D. & Palefrey, T. R. (1992). "An experimental study of the centipede game. Econometrica, Vol. 60, No. 4, 803–836.
[29] Neyman, A. (1985) Bounded complexity justifies cooperation in the finitely repeated Prisoner's Dilemma. Economics Letters. Vol. 19, 227–229.
[30] 小野 茂 (1966)；『学習実験』，情報科学講座 E.17.3. 北川敏男編，共立出版
[31] ———— (1976)；『心理学における数学的方法』，「現代の心理学 4」培風館
[32] Phillip, P. & Sugden, R. (1989) The backward induction paradox. The Journal of Philosophy. Vol. LXXXVI, No. 4, 169–182.
[33] Rosenthal, R. W. (1980) New equilibria for noncooperative two-person games. J. of Mathematical Sociology. Vlo. 7, 15–26.
[34] ————. (1981) Games of perfect information, predatory pricing and the chain-sotoreparadox. Journal of Economic Theory, vol. 25, 92–100.
[35] 佐藤嘉倫 (1998)「合理的選択理論批判の論理構造とその問題点」『社会学評論』49巻 2 号，18–35.

[36] Shubik, M.（1970）Game theory, behavior, and the paradox of the Prisoner's Dilemma:three solutions. Conflict Resolution. vol. XIV, No. 2, 183–193.
[37] Simon, H. A.（1982）Models of Bounded Rationality, vol. 1, 2. MIT Press.
[38] 繁桝算男（1995）『意思決定の認知統計学』朝倉書店
[39] スーザン・グリーンフィールド（2000）『脳の探求』新井康允，中野恵津子訳 無名舎（2001）。
[40] 高橋伸幸，山岸俊男（1996）利他的行動の社会関係的基盤 1996 The Japanese J. of Experimental Social Psychology, Vol. 36, No. 1, 1–11.
[41] Todhunter, I.（1865）"A History of the Mathematical Theory of Probability — from the time of Pascal to that of Laplace —" Macmillan co.『確率論史——パスカルからラプラスの時代までの数学史の一断面——』，安藤洋美訳 現代数学社（1975）
[42] 辻 竜平（1991）；「常識的思考に関する研究——主観的合理性の概念をふまえて——」関西学院大学社会学部卒業論文.
[43] 渡部　幹，寺井　滋，林直保子，山岸俊男（1996）互酬性の期待にもとづく 1 回限りの囚人のジレンマにおける協力行動 The Japanese J. of Experimental Social Psychology, Vol. 36, No. 2, 183–196.
[44] 山崎英三（1972）ダランベールと確率論（I）（II）科学史研究第 II 期11巻 No. 101, pp. 17–24, 同 No. 102, pp. 65–72.
[45] 山岸俊男，清成透子，谷田林士（2002）：社会的交換と互恵性——なぜ人は 1 回限りの囚人のジレンマで協力するか 『進化ゲームとその展開』10章 佐伯 胖・亀田達也編著 共立出版