在庫問題の一近似方法

坂　口　通　則

（受付　2006 年 4 月 19 日）

1.　は　じ　め　に

この論文では，需要が連続型分布に従う多期間確率的在庫問題のこれまでの結果を応用して，ひとつの最適方策の近似解法を考える。多期間確率的在庫問題において，1 期間の期待費用関数を既知として，最適方策の決定に役立つ条件が求められたが，期間数が 2，3 くらいのときは，最適解を具体的に求めることが可能であるが，期間数がそれ以上になると一般に最適解を求めることが困難になってくる．そこで，最適解が存在する範囲を定めるという方法で研究が進められた（[2], [3], [4]）。その研究方法は，在庫モデルを数学モデルに作りかえ，その中で解の存在条件を求め，再び在庫モデルに返って最適方策について考察するという方法である。数学モデルでは関数列

$$F_n(z)\ (n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N - 1)$$

をつくり，方程式 $F_n'(z) = 0$ が解ければ，最適方策を決定できる（定理 3.5）。これらの解析から，最適方策を理論的に求めるひとつの方法を提案したが ([6])，その解法の有効性は，一般的ではない。そこで，問題そのものを近似するという逆発想のもとで，多期間在庫問題の解決を試みる。すなわち，N 期間問題を単期間問題と $N - 1$ 期間問題の連続として考えたとき，その影響について考察し，この方法でも近似できる条件を提示する。

2.　在　庫　モ　デ　ル

ここで考える 1 期間の在庫問題は， 初期在庫量を x，在庫 1 単位当たりの在庫維持費用を h，単位当たりの品切費用を p とし，財（商品・資材）の単位当たりの購入費を c とする。財は期首に即座に納入され，納入後の初期在庫量を z とする。すなわち，実際の購入量は $z - x$ である。

需要については 2 種類の考えが必要である。その 1 つは，1 期間内で起こる需要の総量 B である。これは不確定であり（B は確率変数とする），その確率分布は既知とし，B の確率密度関数を $\phi(b)$ とし分布関数を $\Phi(b)$ とする。第 2 の需要に関する考え方は，1 期間内での時

間の経過とともに起こる需要の変化であって，関数 $g(x)$ を使ってこのことを表現する。関数 $g(x)$ は，区間 $[0,1]$ 上の連続微分可能な関数であって $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g'(x)>0$ とする。1 期間の長さを t，その期間中の需要総量を b とするとき，時間 T $(0 \le T \le t)$ において起きる需要は $g(T/t)b$ であるとする。このことから，時間 T における在庫量は $z-g(T/t)b$ である。

在庫問題での費用は，購入費用，在庫維持費用，品切費用を考え，その総和を全費用とする（調達費用は考えない)。上の記号のもとで，購入費用は $c(z-x)$，在庫維持費用は $h\times$ 平均在庫量，品切費用は $p\times$ 平均品切量となる。購入費用以外は確率的に生じるので，これらの期待を考える必要がある。1 期間総費用を $C(B,z)$ で表すと，期待総費用 $E\{C(B,z)\}$ は

$$E\{C(B,z)\}=c(z-x)+hE\{\text{平均在庫量}\}+pE\{\text{平均品切量}\}$$

となる。

$E\{C(B,z)\}$ が最小となる z の値を決定することが目的である。もし関数 $E\{C(B,z)\}$ が z について凸関数で $z=\bar{x}_1$ で最小になれば，1 期間在庫問題の**最適方策**は，

$$x<\bar{x}_1 \text{ ならば，} \bar{x}_1-x \text{ だけ発注し，そうでなければ発注しない}$$

となる。

ここでは直接 z の関数 $E\{C(B,z)\}$ を扱うのではなくて，関数 $H(z)$ を解析して行く手法をとる。この関数 $H(z)$ は等式

$$E\{C(B,z)\}=-cx+H(z) \tag{2.1}$$

で定義される。 このとき期待費用の最小値を関数 $f_1(x)$ であらわせば,

$$f_1(x)=\min_{z\ge x}\{-cx+H(z)\} \tag{2.2}$$

となる。

確率密度関数 $\phi(b)$ は各期同じで，各期の需要は互いに独立な確率変数とする．納入前の初期在庫量を x とするとき，各発注機会に最適方策を実行したとき，n 期間にわたる期待全費用の最小値を関数 $f_n(x)$ で表す。割引率を α $(0<\alpha<1)$ とするとき，動的計画法の手法を用いて

$$f_n(x)=\min_{z\ge x}\left\{-cx+H(z)+\alpha\int_0^{\infty} f_{n-1}(z-b)\phi(b)db\right\} \tag{2.3}$$

となる。

N 期間問題の解析は，関数 $F_n(z)$ $(0 \le n \le N-1)$ を帰納的につくり最適方策を求める。すなわち，

$$F_{k-1}(z) = H(z) + \alpha \int_0^\infty f_{k-1}(z-b)\phi(b)db, \quad f_0(z) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{2.4}$$

と置く。以上のことをまとめて，N 期間動的確率的在庫問題を次のように設定する。

2.1　モデルの設定

(1)　過剰需要は後期の需要と見なされる多期間確率的在庫問題である。発注された財（商品，材料）は，発注間隔の期首に即時的に納入され，調達費用は考えないことにする。

(2)　各期の期間の長さを t，各期首に納入される財の購入単価を c とする。納入前の在庫量を x で，納入後の在庫量を z でそれぞれ表す。よって期首の発注量は $z-x$ である。

(3)　h を在庫維持費用（期当たり，単位当たり），p を品切費用（期当たり，単位当たり）とする。このとき，$c < p$ とする。

(4)　関数 $\Phi(b)$ は，連続型確率分布関数で，その確率密度関数 $\phi(b)$ が $\phi(b) = 0$ $(b < 0)$ であるとする。 各期間中の需要量はすべてこの確率分布に従う確率変数で，さらに各期間ごとの需要量は，互いに独立であるとする。

(5)　1 期間中に時間とともに起こる需要の状態は,関数 $g(x)$ を使って表す。関数 $g(x)$ は,区間 $[0,1]$ 上で連続微分可能な関数で，条件 $g(0) = 0$, $g(1) = 1$，$dg(x)/dx > 0$ $(0 < x < 1)$ を満たすとする。その期の需要量が b のとき，時刻 T $(0 \le T \le t)$ での需要量は $g(T/t)b$ とする。これを言い換えるとは，時刻 T $(0 \le T \le t)$ で在庫量は，$z - g(T/t)b$ である。

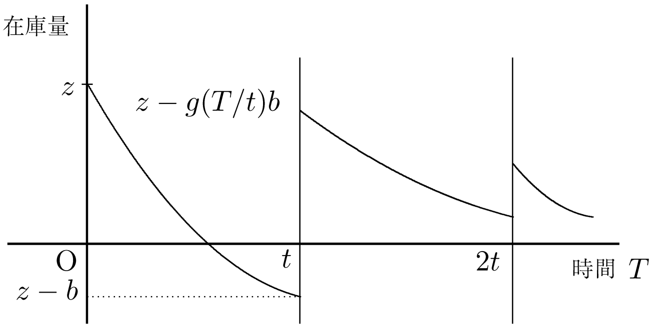

図2.1　在　庫　量

(6)　購入費用，在庫維持費用，品切費用の和を全費用として，それらの期待値を最小にする発注量を求める。

（7） α で割引率を表し，$(0 < \alpha < 1)$ とする。納入前の初期在庫量が x のとき， n 期間中で各発注機会に最適発注をしたときの，割引を考慮した n 期にわたる期待全費用の最小値を関数 $f_n(x)$ で表す。

在庫の品切れは次期の需要と見なすのでは，変数 z が負になる場合も考える。

3. 数 学 モ デ ル

数学モデルとしては，関数 $H(z)$ が凸関数であるときは扱い易い。ここでは 2 つの条件 A1 と A2 を仮定する。第 2 節の在庫モデルがこれらの条件を満たすことを確かめる。

3.1　関数 $H(z)$ の性質

関数 $H(z)$ については， 参考文献 [1] に計算してある。m を確率分布 $\Phi(b)$ の平均，関数 $G(y)$ を $G(y) = \int_0^y g(x)dx$ とするとき，

命題 3.1 $z \leq 0$ のときは, $H(z) = (c - p)z + pG(1)m$ である。 $z > 0$ のときは,

$$\begin{aligned} H(z) =&(c-p)z + (h+p)\left\{z\int_0^z \phi(b)db + z\int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)db \right.\\ &\left. - \int_z^\infty bG\left(g^{-1}(z/b)\right)\phi(b)db - G(1)\int_0^z b\phi(b)db\right\} + pG(1)m \end{aligned}$$

である。

これから関数 $H(z)$ を微分して，次の 2 つの命題を得る。

命題 3.2 関数 $H'(z)$ は

$$H'(z) = \begin{cases} c - p, & z < 0, \\ c - p + (h+p)\left\{\int_0^z \phi(b)db + \int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)db\right\}, & z > 0 \end{cases}$$

である。

命題 3.3 関数 $H''(z)$ は

$$H''(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ (h+p)\int_z^\infty \dfrac{\phi(b)}{bg'(z/b)}db, & z > 0 \end{cases}$$

である。

3.2　条件 *A*1と *A*2

関数 $H(z)$ についての条件 $A1$ と $A2$ を次のようにする。

$A1$:　関数 $H(z)$ は実数全体 $\boldsymbol{R}$ 上で微分可能である。さらに，ある定数 R $(0 < R)$ が存在して，

（1）$H'(R) \geq \alpha c$ である。

（2）$z < 0$ ならば，$H'(z) < 0$ である。

を満たす.

$A2$: $z > 0$ ならば, 関数 $H(z)$ は 2 階微分可能で $H''(z) \geq 0$ である。

命題 3.2 から，

$$\lim_{z \to \infty} H'(z) = c + h$$

となる。したがって $\alpha c < c$ であるから，ある実数 $R > 0$ が存在して, $H'(R) \geq \alpha c$ を満たす。命題 3.2 と命題 3.3 から， 第 2 節の関数 $H(z)$ は，$H(z)$ の $z = 0$ での微分可能性を除いて，条件 $A1$ と $A2$ を満たす。$H'_{+}(0) = c - p$ であることを示せばよいのだが，現在のところいくつかの具体的な関数 $g(x)$ についてのみ示されて，一般的にはまだできていない。ただ，区分的費用関数の理論を用いれば，理論的な不都合は生じない。

3.3　基 本 定 理

$F_0(z) = H(z)$ としているので，数学的帰納法を用いて，連続型需要をもつ在庫モデルの基本定理を得る。

定理 3.4 ([7] の定理 2.9) 関数 $H(z)$ が条件 $A1$ と $A2$ を満たすとする。 各整数 i $(1 \leq i \leq N)$ について，

$$\bar{x}_i = \inf \{ z \geq \bar{x}_i \mid F'_{i-1}(z) = 0\}$$

となる定数 $\bar{x}_i$ が存在して，次のことが成立する。

（1）　$0 < \bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \cdots \leq \bar{x}_N \leq R$ である。

各整数 i $(1 \leq i \leq N - 1)$ について：

(2) 関数 $F_i(z)$ は

$$F_i(z) = \begin{cases} H(z) - \alpha cz + \alpha F_{i-1}(\bar{x}_i) + \alpha cm, & z \le \bar{x}_i, \\ H(z) - \alpha cz + \alpha cm + \alpha \int_0^{z-\bar{x}_i} F_{i-1}(z-b)\phi(b)db \\ \qquad + \alpha F_{i-1}(\bar{x}_i)\,(1 - \Phi(z - \bar{x}_i))\,, & \bar{x}_i \le z \end{cases}$$

である。

(3) 関数 $F'_i(z)$ は

$$F'_i(z) = \begin{cases} H'(z) - \alpha c, & z < \bar{x}_i, \\ H'(z) - \alpha c + \alpha \int_0^{z-\bar{x}_i} F'_{i-1}(z-b)\phi(b)db, & \bar{x}_i \le z \end{cases}$$

である。

(4) 関数 $F''_i(z)$ は

$$F''_i(z) = \begin{cases} H''(z), & 0 < z < \bar{x}_i, \\ H''(z) + \alpha \int_0^{z-\bar{x}_1} F''_{i-1}(z-b)\phi(b)db, & \bar{x}_i \le z \end{cases}$$

である。

(5) $F'_i(R) \ge 0$ である。もし $z < 0$ ならば，$F'_i(z) < 0$ である.

(6) $z > 0$ ならば, 関数 $F_i(z)$ は 2 階微分可能で $F''_i(z) \ge 0$ である。

(7) $\bar{x}_i \le \bar{x}_{i+1} \le R$ であり，$z < \bar{x}_{i+1}$ ならば, $F_i(z) > F_i(\bar{x}_{i+1})$ であり，また $\bar{x}_{i+1} \le z_1 \le z_2$ ならば，$F_i(z_1) \le F_i(z_2)$ である。

各整数 i $(1 \le i \le N)$ について

(8) 関数 $f_i(x)$ は

$$f_i(x) = \begin{cases} -cx + F_{i-1}(\bar{x}_i), & x \le \bar{x}_i, \\ -cx + F_{i-1}(x), & \bar{x}_i \le x \end{cases}$$

である。

定理 3.5 (Theorem 1.9 in [5]) 初期在庫量を x とするとき，この節で N 期在庫問題の最適方策は，x が $\bar{x}_N$ より小さいときは，$\bar{x}_N - x$ だけ発注し，x が $\bar{x}_N$ 以上のときは発注しないことである。

4. 最適方策決定の支援

n 期間在庫問題において，x を初期在庫量とする。関数 $f_n(x)$ は，各購入機会に最適方策を実施したとき，n 期間にわたる全費用の期待値を表す。一方 $\tilde{f}_n(x)$ $(n \geq 2)$ は，n 期間在庫問題を単期間問題と $n-1$ 期間問題とに分けて，さらに最初の単期間問題の需要量は確率分布の平均 m としたとき，n 期間にわたる全費用の期待値を表すとする。ここで問題になるのは，各期間の需要は確率的に起きるので，多期間の問題をこのように変形することは大胆であるが，2 つの関数 $f_n(x)$, $\tilde{f}_n(x)$ を差異の変動を修正得して，関数 $f_n(x)$ の近似を試みる。

4.1 n 期間問題について

定理 3.4 の (8) から関数 $f_n(x)$ は

$$f_n(x) = \begin{cases} -cx + F_{n-1}(\bar{x}_n), & x \leq \bar{x}_n, \\ -cx + F_{n-1}(x), & \bar{x}_n \leq x \end{cases}$$

である。さらに定理 3.4 の (2) から 関数 $F_{n-1}(z)$ $(n \geq 2)$ は

$$F_{n-1}(z) = \begin{cases} H(z) - \alpha cz + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}) + \alpha cm, & z \leq \bar{x}_{n-1}, \\ H(z) - \alpha cz + \alpha cm + \alpha \displaystyle\int_0^{z-\bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(z-b)\phi(b)db & \\ \qquad + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\left(1 - \Phi(z - \bar{x}_{n-1})\right), & \bar{x}_{n-1} \leq z \end{cases}$$

である。したがって，定理 3.4 の (1) から $\bar{x}_{n-1} \leq \bar{x}_n$ であるから

$$f_n(x) = \begin{cases} -cx + H(\bar{x}_n) - \alpha c\bar{x}_n + \alpha cm + \alpha \displaystyle\int_0^{\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db & \\ \qquad +\alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\left(1 - \Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})\right), & x \leq \bar{x}_n, \\ -cx + H(x) - \alpha cx + \alpha cm + \alpha \displaystyle\int_0^{x-\bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x-b)\phi(b)db & \\ \qquad +\alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\left(1 - \Phi(x - \bar{x}_{n-1})\right), & \bar{x}_n \leq x \end{cases} \tag{4.1}$$

となる。

関数 $\tilde{f}_n(x)$ は，第 **1** 期の需要は，確率分布の平均 $\boldsymbol{m}$ であると仮定し，その第 **1** 期の費用と続く $\boldsymbol{n-1}$ 問題の期待最小費用の値 $\boldsymbol{f_{n-1}(\bar{x}_1 - m)}$ または $\boldsymbol{f_{n-1}(x - m)}$ の和とする。次に，関数 $\tilde{f}_n(x)$ も求めるには 3 つの場合分けが必要になる。 また，モデルの設定から $m > 0$ である。

4.1.1　$x \leq \bar{x}_1$ のとき

関数 $\tilde{f}_n(x)$ は $\tilde{f}_n(x) = f_1(x) + \alpha f_{n-1}(\bar{x}_1 - m)$ である。

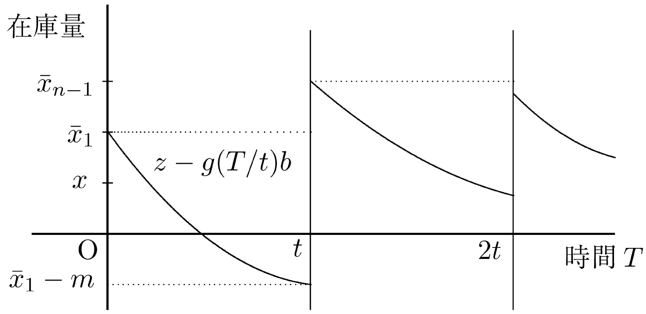

図4.1　$x \leq \bar{x}_1$ のとき

このとき，定理 3.4 の (8) から

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n(x) &= -cx + H(\bar{x}_1) + \alpha\left(-c(\bar{x}_1 - m) + F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\right) \\ &= -cx - \alpha c\bar{x}_1 + \alpha cm + H(\bar{x}_1) + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\end{aligned} \tag{4.2}$$

である。

4.1.2　$\bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_{n-1} + m$ のとき

関数 $\tilde{f}_n(x)$ は，$x - m \leq \bar{x}_{n-1}$ であるから，$\tilde{f}_n(x) = f_1(x) + \alpha f_{n-1}(x - m)$ である。

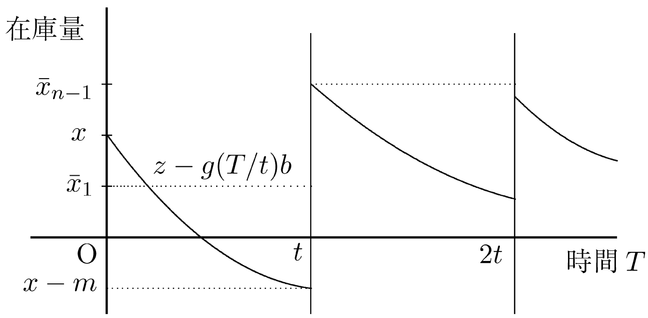

図4.2　$\bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_{n-1} + m$ のとき

同様にして

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n(x) &= -\,cx + H(x) + \alpha\,(-c(x-m) + F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})) \\ &= -\,cx - \alpha cx + \alpha cm + H(x) + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.3 $\bar{x}_{n-1} + m \le x$ のとき

関数 $\tilde{f}_n(x)$ は，$\tilde{f}_n(x) = f_1(x) + \alpha f_{n-1}(x-m)$ であるから，

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n(x) &= -cx + H(x) + \alpha\,(-c(x-m) + F_{n-2}(x-m)) \\ &= -cx - \alpha cx + \alpha cm + H(x) + \alpha F_{n-2}(x-m)\end{aligned} \tag{4.4}$$

となる。

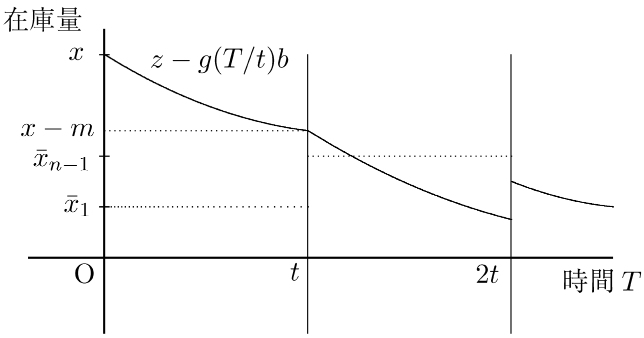

図4.3　$\bar{x}_{n-1} + m \le x$ のとき

式 (4.2)，(4.3)，(4.4) から，次の命題を得る。

命題 4.1 関数 $\tilde{f}_n(x)$ は

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} -cx - \alpha c\bar{x}_1 + \alpha cm + H(\bar{x}_1) + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}), & x \le \bar{x}_1, \\ -cx - \alpha cx + \alpha cm + H(x) + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}), & \bar{x}_1 \le x \le \bar{x}_{n-1} + m, \\ -cx - \alpha cx + \alpha cm + H(x) + \alpha F_{n-2}(x-m), & \bar{x}_{n-1} + m \le x \end{cases}$$

である。

命題 4.2 関数 $f_n(x) - \tilde{f}_n(x)$ は，次のようになる。

$$f_n(x) - \tilde{f}_n(x) =$$
$$\begin{cases} \alpha c(\bar{x}_1 - \bar{x}_n) + H(\bar{x}_n) - H(\bar{x}_1) - \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) \\ \qquad + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db, \quad x \le \bar{x}_1, \\ \alpha c(x - \bar{x}_n) + H(\bar{x}_n) - H(x) - \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) \\ + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db, \quad \bar{x}_1 \le x \le \bar{x}_n, \quad x \le \bar{x}_{n-1} + m, \\ \alpha c(x - \bar{x}_n) + H(\bar{x}_n) - H(x) + \alpha(F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}) - F_{n-2}(x - m)) \\ - \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db, \\ \qquad \bar{x}_{n-1} + m \le x \le \bar{x}_n, \\ - \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(x - \bar{x}_{n-1}) + \alpha \int_0^{x - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x - b)\phi(b)db, \\ \qquad \bar{x}_n \le x \le \bar{x}_{n-1} + m, \\ \alpha(F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}) - F_{n-2}(x - m)) - \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(x - \bar{x}_{n-1}) \\ \qquad + \alpha \int_0^{x - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x - b)\phi(b)db, \quad \bar{x}_n \le x, \ \bar{x}_{n-1} + m \le x. \end{cases}$$

証明　関数 $f_n(x) - \tilde{f}_n(x)$ を (4.1) と命題 4.1 から求める。不等式 $\bar{x}_1 \le \bar{x}_{n-1} \le \bar{x}_n$ から，次のような場合分けが必要となる。

$x \le \bar{x}_1$ の場合。

$$\begin{aligned} f_n(x) - \tilde{f}_n(x) = & -cx + H(\bar{x}_n) - \alpha c\bar{x}_n + \alpha cm \\ & + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\left(1 - \Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})\right) \\ & - (-cx - \alpha c\bar{x}_1 + \alpha cm + H(\bar{x}_1) + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})) \\ = & \alpha c(\bar{x}_1 - \bar{x}_n) + H(\bar{x}_n) - H(\bar{x}_1) - \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) \\ & + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db. \end{aligned}$$

$\bar{x}_1 \le x \le \bar{x}_n$ かつ $x \le \bar{x}_{n-1} + m$ の場合。関数 $f_n(x) - \tilde{f}_n(x)$ は，次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f_n(x) - \tilde{f}_n(x) = & -cx + H(\bar{x}_n) - \alpha c\bar{x}_n + \alpha cm \\
& + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})(1 - \Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})) \\
& - (-cx - \alpha cx + \alpha cm + H(x) + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})) \\
= & \alpha c(x - \bar{x}_n) + H(\bar{x}_n) - H(x) - \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) \\
& \qquad + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db.
\end{aligned}
$$

$\bar{x}_{n-1} + m \le x \le \bar{x}_n$ の場合。

$$
\begin{aligned}
f_n(x) - \tilde{f}_n(x) = & -cx + H(\bar{x}_n) - \alpha c\bar{x}_n + \alpha cm \\
& + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})(1 - \Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})) \\
& - (-cx - \alpha cx + \alpha cm + H(x) + \alpha F_{n-2}(x - m)) \\
= & \alpha c(x - \bar{x}_n) + H(\bar{x}_n) - H(x) + \alpha(F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}) - F_{n-2}(x - m)) \\
& - \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db.
\end{aligned}
$$

$\bar{x}_n \le x \le \bar{x}_{n-1} + m$ の場合。　同様に考えて

$$
\begin{aligned}
f_n(x) - \tilde{f}_n(x) = & -cx + H(x) - \alpha cx + \alpha cm \\
& + \alpha \int_0^{x - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x - b)\phi(b)db + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})(1 - \Phi(x - \bar{x}_{n-1})) \\
& - (-cx - \alpha cx + \alpha cm + H(x) + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})) \\
= & -\alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(x - \bar{x}_{n-1}) + \alpha \int_0^{x - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x - b)\phi(b)db
\end{aligned}
$$

となる。最後に

$\bar{x}_n \le x$ かつ $\bar{x}_{n-1} + m \le x$ の場合。

$$
\begin{aligned}
f_n(x) - \tilde{f}_n(x) = & -cx + H(x) - \alpha cx + \alpha cm \\
& + \alpha \int_0^{x - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x - b)\phi(b)db + \alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})(1 - \Phi(x - \bar{x}_{n-1})) \\
& - (-cx - \alpha cx + \alpha cm + H(x) + \alpha F_{n-2}(x - m)) \\
= & -\alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(x - \bar{x}_{n-1}) + \alpha \int_0^{x - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x - b)\phi(b)db \\
& + \alpha(F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}) - F_{n-2}(x - m))
\end{aligned}
$$

である。 証明終

補題 4.3 $n \geq 2$ とする。 $x \geq \bar{x}_{n-1}$ のとき，次の不等式が成立する。

$$F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(x-\bar{x}_{n-1}) \leq \int_0^{x-\bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x-b)\phi(b)db \leq F_{n-2}(x)\Phi(x-\bar{x}_{n-1}).$$

証明　$s = x - b$ と置いて置換積分すると

$$\int_0^{x-\bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x-b)\phi(b)db = \int_{\bar{x}_{n-1}}^{x} F_{n-2}(s)\phi(x-s)ds$$

である。 定理 3.4 の (7) から，$\bar{x}_{n-1} \leq s \leq x$ ならば $F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}) \leq F_{n-2}(s) \leq F_{n-2}(x)$ なので，

$$F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\int_{\bar{x}_{n-1}}^{x} \phi(x-s)ds \leq \int_{\bar{x}_{n-1}}^{x} F_{n-2}(s)\phi(x-s)ds \leq F_{n-2}(x)\int_{\bar{x}_{n-1}}^{x} \phi(x-s)ds$$

となる。$b < 0$ のとき，$\phi(b) = 0$ を仮定しているから，再び $b = x - s$ として置換積分すると

$$\int_{\bar{x}_{n-1}}^{x} \phi(x-s)ds = \int_0^{x-\bar{x}_{n-1}} \phi(b)db = \Phi(x-\bar{x}_{n-1})$$

である。したがって

$$F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(x-\bar{x}_{n-1}) \leq \int_0^{x-\bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(x-b)\phi(b)db \leq F_{n-2}(x)\Phi(x-\bar{x}_{n-1})$$

となる。 証明終

関数 $h_n(x)$ $(n \geq 2)$ を

$$h_n(x) = \begin{cases} \tilde{f}_n(x) + \alpha c(\bar{x}_1 - \bar{x}_n) + H(\bar{x}_n) - H(\bar{x}_1), & x \leq \bar{x}_1, \\ \tilde{f}_n(x) + \alpha c(x - \bar{x}_n) + H(\bar{x}_n) - H(x), & \bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_n,\ x \leq \bar{x}_{n-1} + m, \\ \tilde{f}_n(x) + \alpha c(x - \bar{x}_n) + H(\bar{x}_n) - H(x) + \alpha(F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}) - F_{n-2}(x-m)), & \\ \qquad \bar{x}_{n-1} + m \leq x \leq \bar{x}_n, & \\ \tilde{f}_n(x), & \bar{x}_n \leq x \leq \bar{x}_{n-1} + m, \\ \tilde{f}_n(x) + \alpha(F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}) - F_{n-2}(x-m)), & \bar{x}_n \leq x,\ \bar{x}_{n-1} + m \leq x \end{cases} \tag{4.5}$$

とするとき，次の定理を得る。

定理 4.4 関数 $f_n(x)$ を関数 $h_n(x)$ を用いて近似したとき，その誤差は次のようになる。

$$x \leq \bar{x}_n \text{ のとき，}\quad h_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x) + \alpha(F_{n-2}(\bar{x}_n) - F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}))\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}),$$

$$x \geq \bar{x}_n \text{ のとき，}\quad h_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x) + \alpha(F_{n-2}(x) - F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}))\Phi(x - \bar{x}_{n-1}).$$

証明　命題 4.2 から $x \leq \bar{x}_1$ のとき，

$$f_n(x) - h_n(x) = -\alpha F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) + \alpha \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db$$

である。また補題 4.3 から

$$F_{n-2}(\bar{x}_{n-1})\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) \leq \int_0^{\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}} F_{n-2}(\bar{x}_n - b)\phi(b)db \leq F_{n-2}(\bar{x}_n)\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})$$

より

$$0 \leq f_n(x) - h_n(x) \leq \alpha(F_{n-2}(\bar{x}_n) - F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}))\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})$$

となる。したがって，$x \leq \bar{x}_1$ ならば，

$$h_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x) + \alpha(F_{n-2}(\bar{x}_n) - F_{n-2}(\bar{x}_{n-1}))\Phi(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})$$

である。残りの場合にも同様に証明できる。　　　　　　　　　　　　　　　証明終

これらの関係式は，N 期間在庫問題において，初期在庫量が x のとき，最小在庫費（期待費用）の値を示す $f_N(x)$ を関数 $h_N(x)$ で代用しようする。このとき，$f_N(x)$ と簡略方法を用いたときの在庫費用の値 $\tilde{f}_N(x)$ を修正した値 $h_N(x)$ との差を示している。定理 4.4 から $\alpha(F_{N-2}(\bar{x}_N) - F_{N-2}(\bar{x}_{N-1}))\Phi(\bar{x}_N - \bar{x}_{N-1})$ または $\alpha(F_{N-2}(x) - F_{N-2}(\bar{x}_{N-1}))\Phi(x - \bar{x}_{N-1})$ の値が小さいときは，関数 $f_N(x)$ を関数 $h_N(x)$ で代用することができる。

5.　2 期間問題について

最も簡単な多期間問題である 2 期間問題において，3 つの関数 $f_2(x)$, $\tilde{f}_2(x)$, $h_2(x)$ の意味を説明する。まず関数 $f_2(x)$ は (2.3) から

$$f_2(x) = \min_{z \geq x}\left\{ -cx + H(z) + \alpha \int_0^{\infty} f_1(z-b)\phi(b)db \right\} \tag{5.1}$$

となる。これは，発注前の初期在庫量が x であるとき，第 1 期目と第 2 期目に最適発注したときの 2 期間にわたる最小期待費用を表す関数である。確率的在庫問題を考えるには，まず第 1 期の需要 b が確率的に起きることが前提である。したがって，第 1 期目の需要がいくらになるかは断定ができないが，第 1 期目の最適発注量 $z - x$ を期待費用が最小になるように決定する。それは第 1 期目の納入後の初期在庫量 z に対して，第 2 期目の納入前の在庫量が

$z-b$ になり，第 2 期目の 1 期間問題の最小費用は $f_1(z-b)$ になる。これが確率的に起きるので，その期待値 $\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db$ を求める。これを第 1 期目の費用に換算するために α を掛けて第 1 期目の費用 $-cx+H(z)$ を加えると $-cx+H(z)+\alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db$ になる。最後にこれらの最小となる z の値を決めればよい。

式 (4.1) から

$$f_2(x)=\begin{cases}-cx+H(\bar{x}_2)-\alpha c\bar{x}_2+\alpha cm+\alpha\displaystyle\int_0^{\bar{x}_2-\bar{x}_1}H(\bar{x}_2-b)\phi(b)db \\ \qquad +\alpha H(\bar{x}_1)(1-\Phi(\bar{x}_2-\bar{x}_1)), \quad x\le\bar{x}_2, \\ -cx+H(x)-\alpha cx+\alpha cm+\alpha\displaystyle\int_0^{x-\bar{x}_1}H(x-b)\phi(b)db \\ \qquad +\alpha H(\bar{x}_1)(1-\Phi(x-\bar{x}_1)), \quad \bar{x}_2\le x\end{cases} \tag{5.2}$$

となる。これらを計算するには，定数 $\bar{x}_1$ と $\bar{x}_2$ が必要である。

次に関数 $\tilde{f}_2(x)$ について考察する。これは 2 期問題をすりかえて，第 1 期の需要は，確率需要分布の平均 m と仮定し，引き続いて第 2 期目の 1 期在庫問題が起きると考える。すなわちこの 2 期問題では，確率的在庫問題とはならない。ただし，n が 3 以上のときは確率的在庫問題のままである。関数 $\tilde{f}_2(x)$ は第 1 期間費用と第 2 期間費用の和である。

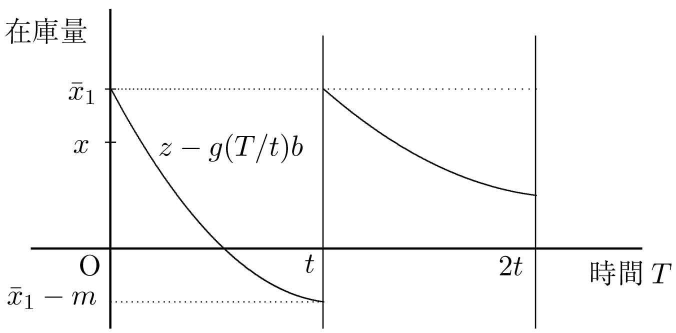

図5.1　$x\le\bar{x}_1$ のとき

これは 2 つの場合 $x\le\bar{x}_1$ のときと $x\ge\bar{x}_1$ のときに分けて考える必要があるが，期待値を計算する必要はない。たとえば $x\le\bar{x}_1$ のとき， 関数 $\tilde{f}_2(x)$ は $\tilde{f}_2(x)=f_1(x)+\alpha f_1(\bar{x}_1-m)$ であることから計算できる。

命題 4.1 から費用関数 $\tilde{f}_2(x)$ は

$$\tilde{f}_2(x)=\begin{cases}-cx-\alpha c\bar{x}_1+\alpha cm+H(\bar{x}_1)+\alpha H(\bar{x}_1), & x\le\bar{x}_1, \\ -cx-\alpha cx+\alpha cm+H(x)+\alpha H(\bar{x}_1), & \bar{x}_1\le x\le\bar{x}_1+m, \\ -cx-\alpha cx+\alpha cm+H(x)+\alpha H(x-m), & \bar{x}_1+m\le x\end{cases} \tag{5.3}$$

となり，関数 $f_2(x)$ と比較してとても簡単な式である。さらに $\bar{x}_1$ の値だけ求めれば十分である。ある意味で 2 つの関数 $f_2(x)$ と関数 $\tilde{f}_2(x)$ は近いと思えるが，確率的要素が入るか入らないかの本質的な違いがあり，一様には近似されていない。

関数 $h_2(x)$ は，関数 $\tilde{f}_2(x)$ に適当な関数を加えて関数 $f_2(x)$ に近づけようとしている。逆な言い方をすれば，定理 4.4，すなわち

$$\begin{aligned} &x \le \bar{x}_2 \text{ のとき，} \quad h_2(x) \le f_2(x) \le h_2(x) + \alpha(H(\bar{x}_2) - H(\bar{x}_1))\Phi(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\ &x \ge \bar{x}_2 \text{ のとき，} \quad h_2(x) \le f_2(x) \le h_2(x) + \alpha(H(x) - H(\bar{x}_1))\Phi(x - \bar{x}_1) \end{aligned} \tag{5.4}$$

が成立するように定めた関数である。

(4.5) において $n = 2$ とすれば，関数 $h_2(x)$ は

$$h_2(x) = \begin{cases} \tilde{f}_2(x) + \alpha c(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + H(\bar{x}_2) - H(\bar{x}_1), & x \le \bar{x}_1, \\ \tilde{f}_2(x) + \alpha c(x - \bar{x}_2) + H(\bar{x}_2) - H(x), & \bar{x}_1 \le x \le \bar{x}_2,\ x \le \bar{x}_1 + m, \\ \tilde{f}_2(x) + \alpha c(x - \bar{x}_2) + H(\bar{x}_2) - H(x) + \alpha(H(\bar{x}_1) - H(x - m)), & \\ \qquad\qquad \bar{x}_1 + m \le x \le \bar{x}_2, & \\ \tilde{f}_2(x), & \bar{x}_2 \le x \le \bar{x}_1 + m, \\ \tilde{f}_2(x) + \alpha(H(\bar{x}_1) - H(x - m)), & \bar{x}_2 \le x,\ \bar{x}_1 + m \le x \end{cases}$$

である。この関数 $h_2(x)$ の計算には定数 $\bar{x}_1$ と $\bar{x}_2$ が必要であり，その複雑さは残るが，関数 $f_2(x)$ の計算と比べるとやさしくなっている。不等式 (5.4) から判断すると，2 つの関数 $f_2(x)$ と $h_2(x)$ が関連性がある。

6. お わ り に

多期間在庫問題において，需要分布が離散的な場合は，1 つの有効な解法が [7] に提示されている。連続型需要のときは，さらに研究が必要である。関数 $h_N(x)$ の定義式 (4.5) から，$\bar{x}_N \le x \le \bar{x}_{N-1} + m$ のときにはこの論文で示した手法が役立つ。さらに $(F_{N-2}(\bar{x}_N) - F_{N-2}(\bar{x}_{N-1}))\Phi(\bar{x}_N - \bar{x}_{N-1})$ または $(F_{N-2}(x) - F_{N-2}(\bar{x}_{N-1}))\Phi(x - \bar{x}_{N-1})$ が十分小さいときとは，関数 $f_N(x)$ の値を関数 $h_N(x)$ の値で推測することが可能であり，最適方策を求めるためのひとつの情報を与えている。期数を 1 つ少なくして [7] の解法を有効にしたいとの願いがあるが，そのためにはより一層の研鑽が必要である。

参　考　文　献

［1］ 児玉正憲著『生産・在庫管理システムの基礎』，九州大学出版会，1996年．
［2］ 兒玉正憲・坂口通則著『区分的費用関数をもつ確率的在庫モデルの研究』，広島修道大学総合研究所，広島修道大学研究叢書，第119号，2002年．
［3］ Kodama, M. and Sakaguchi, M., ‘The optimum ordering policy for a dynamic inventory model’, *Stochastic point processes*, Narosa Publishing House, 2003, pp. 180–195
［4］ Sakaguchi, M. and Kodama M., “On the dynamic probabilistic inventory problems with piecewise cost functions which may not be piecewise smooth”, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, Research Association of Statistical Sciences, Kyushu University, Vol. 34, No. 1, 2002, pp. 75–90.
［5］ Sakaguchi, M. and Kodama, M., “Remarks on the economic ordering quantity in dynamic inventory problems”, *Journal of Statistics & Management Systems*, Vol 7, No. 1, 2004, pp. 109–119.
［6］ Sakaguchi M, “Analysis for a method for calculating an economic order quantity in inventory models”, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 62, No. 3, 2005, pp. 471–481.
［7］ 坂口通則・兒玉正憲著『多期間確率的在庫モデルの研究』，広島修道大学総合研究所，広島修道大学研究叢書，第135号，2006.