不完備情報ゲームにおける情報構造と最適解に関する一考察

阪　井　節　子

（受付　1998年11月5日）

概　　　要

現実社会での競合的状況において，競争相手の状態について完全に知っていることは稀である。そのためこのような状況をゲームとしてモデル化すると，多くの場合，不完備情報ゲームとなる。不完備情報ゲームにおいては最適戦略の形態や最適解が各ゲームの情報構造に敏感に反応する。

本報告では，複占市場での企業間の業績競争を，簡単な幾つかの非協力2人0和不完備情報ゲームにモデル化し，情報構造と最適解の関係について考察を加えた。その結果，ここで考察したような場合であれば，先手であることや状態の一部公開などのルールによって規定された情報構造的に見た不利な状態は，プレーヤ自身による情報の一部公開や一部隠蔽などの情報制御によって，かなり逆転可能であることを示した。

1. はじめに

非協力ゲームモデルは，現実社会における意思決定者の競合状態を数理的に記述したものである。例えば，複占市場における供給量に関する均衡解であるナッシュ・クルノー均衡解や，価格決定に関する均衡解であるベルトラン・ナッシュ均衡解などは，非協力非0和ゲームにおけるナッシュ平衡解をそれぞれの状況に適応したものである。非協力ゲームは，ゲームの持つ情報構造の違いによって完備情報ゲームと不完備情報ゲームに分けられる[1−4]。

完備情報ゲームは，プレイをするプレイヤーが，ゲームのルール（ゲームの構成要素）について完全知識を持っているようなゲームである。すなわち，プレイヤー，戦略空間，利得関数を参加するプレイヤーがプレイする以前に完全に知っているようなゲームである。チェス，将棋，囲碁などのテーブルゲームは完備情報ゲームの例である。

しかし，現実社会での競合的状況が，完備情報ゲーム的状態であることは稀である。競争相手である企業の状態を完全に把握できない状態で，競争するのが普通である。このように，プレイヤーがプレイするゲームの構成要素について必ずしも完全な情報を持っていないようなゲームを不完備情報ゲームとよぶ。不完備情報ゲームの場合，最適戦略の形態や最適解が情報構造に敏感に反応する。そのため，それぞれの競合状態に特徴的な情報構造をモデル化し，それぞれの場合の最適戦略および最適解の特徴付けおよび情報構造との関連付けが行わ

れている。例えば，入札（bidding）や競り（auction），決闘（duel）やカードゲームなどがその例である[5-8]。

本報告では，複占市場での企業間の業績競争を，簡単な幾つかの非協力 2 人 0 和不完備情報ゲームにモデル化し，各モデルの情報構造と各企業の最適行動及び期待利得の関連性について考察する。

以下，第 2 節では本論文で扱うモデルの定式化を行い，第 3 節では各モデルについての最適戦略およびゲーム値を求める。最後に，第 4 節では得られた結果から本論文で扱ったモデルにおける情報構造と最適解の関連性について考察する。

2. モ デ ル 化

本報告で考察するのは，次のような状況である：2 つの企業 1，2 が同質な財を契約生産し市場に供給し，業績を競っている複占市場がある。企業 i，($i=1,2$) が，1 期間内に供給できる財の最大量は高々 m_i であり，期間内に全て納品しなければならない。以上のような条件の下で，ある 1 期間内に企業 1，2 が契約した量がそれぞれ σ，τ であったならば，企業 1 と 2 のその期間における業績競争の勝敗は，次のように決定される。

企業 1 の契約量 σ が企業 2 の契約量 τ より大きく，かつ最大供給量 m_1 以下であれば，この期については企業 1 の勝ちである。しかし，企業 1 の契約量 σ が最大供給量 m_1 を越えていれば，企業1は期間内に製品の納品を完了できない。このとき，企業2の契約量 τ が最大供給量 m_2 を越えていなければ，この期は企業 2 の勝ちとなり，企業 2 の契約量 τ も最大供給量 m_2 を超えていれば，この期の勝敗はつかない。

以上のような規則にしたがって，1 期間内の勝敗が決まるとき，このような状況を 1 段非協力 2 人 0 和ゲームに定式化することによって，各企業の利用可能な情報と最適行動及びゲーム値について比較検討する。

簡単のために，以下のような仮定をおく。各企業の最大供給量は，$m_1=m_2=1$ とし，1 件の契約で得られる契約量は区間［0, 1］上の独立な一様乱数として与えられるものとする。さらに，両企業が 1 期間内に獲得する契約数は高々 2 件とし，2 件までは必ず契約が取れるものとする。そして，以上のことは両企業に既知であるとする。

1 件の契約で最大供給量を越えることはないので，企業 1，2 とも必ず 1 件目の契約は獲得する。企業1，2の 1 件目の契約量をそれぞれ x，y で表す。

ここでまず扱う Model 1 のルールは次のように記述される：各企業は自社の契約量のみ既知で，プレイが終了するまで相手企業の契約量について未知である。企業 1，2 は，2 件目の契約を取るか否かを 1，2 の順で順次決定してゆく。すなわち，第 1 手番は企業 1 の手番で，

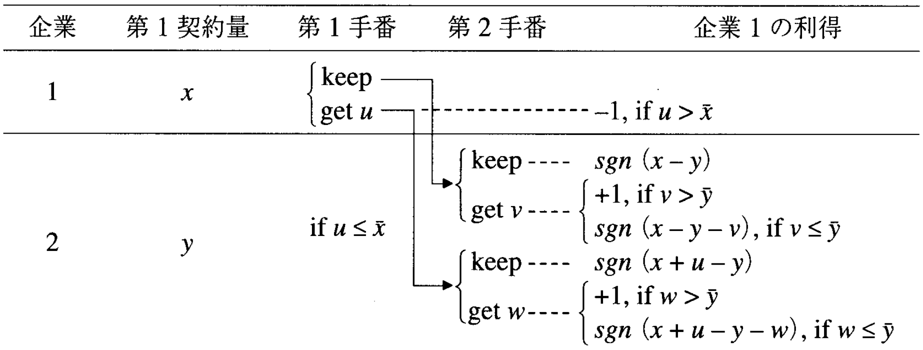
x の値のみを知って，2 件目の契約をとる（get）か，1 件だけにしておく（keep）かを選択する。get したときの 2 件目の契約量を u で表す。

企業 1 が keep を選択すると，第 2 手番にプレイが進む。第 2 手番は企業 2 の手番で，y と企業 1 の決定を知った上で，keep するか，get するかを決定する。企業 2 が get を選択したときの契約量を v で表す。企業 2 が行動選択を終えるとプレイは終了し，業績を公開し，上記の規則に従って勝敗を決定する。

企業 1 が u を get したとき，総契約量が最大供給量を超えれば，すなわち $x+u>1$ であれば，企業 1 はその時点で正直に申告し，プレイは終了する。この場合は企業 1 の負けとなる。$x+u\leq 1$ であれば，企業 2 の手番である第 2 手番に移る。企業 2 は企業 1 の決定と y を知って，keep するか get するかを選択する。get したときの，契約量を w で表す。いずれにしてもプレイはここで終了し，上記の規則に従って，勝敗を決定する。

勝敗にしたがって得られる利得は，勝てば $+1$，負ければ-1，引き分ければ 0 とする。

以上を図で表すと図 1 のようになる。



ただし，$\bar{z}=1-z$，$sgn\ (z)$ は $sgn\ (z)=-1\ (z<0), =0\ (z=0), +1\ (z>0)$ という関数である。

図 1　Model 1

このとき，企業 1，2 の戦略は，単位区間［0, 1］から［0, 1］への関数 $\alpha(x)$，$\beta(y)$ および $\gamma(y)$ を決定することである。ここで，$\alpha(x)$ は企業 1 の 1 件目の契約が x のとき企業 1 が keep を選択する確率を表し，$\beta(y)$ は企業 2 の 1 件目の契約が y で企業 1 が keep を選択したとき企業 2 が keep を選択する確率，$\gamma(y)$ は企業 1 が get を選択し，しかも総契約量が最大供給量を越えなかったとき，企業 2 が keep を選択する確率を表す。すなわち，企業 1 および 2 の行動選択は，それぞれ行動戦略 $<\overline{\alpha(x)}, \alpha(x)>$，$<\overline{\beta(y)}, \beta(y)>$ および $<\overline{\gamma(y)}, \gamma(y)>$ を決定することである。

企業 1 と 2 がそれぞれ戦略 α と (β, γ) を用いたとき，企業 1 の期待利得 $M(\alpha, \beta, \gamma)$ は，

次式で与えられる。

$$M(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$=\iint\left[\alpha(x)\beta(y)\mathrm{sgn}(x-y)+\alpha(x)\overline{\beta(y)}\{\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x-y-v)dv+y\}-\overline{\alpha(x)}x\right.$$

$$\left.+\overline{\alpha(x)}\int_0^{\bar{x}}\left\{\gamma(y)\mathrm{sgn}(x+u-y)+\overline{\gamma(y)}\{\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x+u-y-w)dw+y\}\right\}du\right]dydx \tag{1}$$

以上が Model 1 であるが，情報構造の違いと最適戦略およびゲーム値の関連性を比較するために次の 4 種類の変形モデルを与える。

表 1　モデル一覧

モデル	手番	x の与えられ方	y の与えられ方	u の与えられ方	$x+u>1$ の時
1	交互	private	private	private	企業 1 の負け
2	交互	private	private	public	企業 1 の負け
3	同時	private	private	—	—
4	交互	private	private	private	企業 2 の手番に移る
5	交互	private	private	public	企業 2 の手番に移る

ただし，private というのはその契約量が相手企業に知られないことを意味し，public というのは相手企業にその契約量が知られてしまうことを意味する。また，Model 4 及び 5 では，企業 1 の総契約量 $x+u$ が最大供給能力 1 を越えても，企業 1 はプレイが終了するまでその事実を公表せず，企業 2 は企業 1 の行動選択のみを知って行動選択をする。

3.　最適戦略とゲーム値

3.1　Model 1 の場合

［定理 1］　Model 1 において，企業 1，2 の最適戦略 α^*，β^*，γ^* は次式で与えられる。

$$\alpha^*(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x\ge a_1\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{2}$$

$$\beta^*(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y\ge b_1\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\quad \gamma^*(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y\ge c_1\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{3}$$

ただし，a_1，b_1，c_1 は次の連立方程式の単位立方体 $[0,1]^3$ 上の唯 1 つの根である。

$$\frac{a_1^3}{3}+a_1^2+c_1^2a_1+b_1^2-\frac{c_1^3}{3}-c_1^2+c_1-1=0$$
$$b_1^2+2(1-a_1)b_1-1=0 \tag{4}$$
$$c_1^2+(2-a_1)c_1-1=0$$

すなわち，$a_1=0.49687$，$b_1=0.61631$，$c_1=0.49937$ である。

また，ゲーム値 V_1 は，-0.03064 となる。

［証明］ 後手プレイヤーである企業 2 は，ハッタリを行う動機がないので，最適戦略の形を次のように予想する。

$$\beta^*(y)=\begin{cases}1, \text{ if } y\ge b_1\\ 0, \text{ otherwise,}\end{cases} \quad \gamma^*(y)=\begin{cases}1, \text{ if } y\ge c_1\\ 0, \text{ otherwise,}\end{cases} \tag{5}$$

この予想をもとに，不動点法を用いて最適戦略を決定する。企業 2 が行動戦略（5）を用いたとき，利得関数 $M(\alpha,\beta^*,\gamma^*)$ 中の $\alpha(x)$ を含む部分を次式で表す。

$$\int\alpha(x)L_\alpha(x)dx \tag{6}$$

ただし，

$$L_\alpha(x)=\int_0^1\Big[\beta^*(y)\mathrm{sgn}(x-y)+\overline{\beta^*(y)}\{y+\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x-y-v)dv\}+x$$
$$-\int_0^{\bar{x}}[\gamma^*(y)\mathrm{sgn}(x+u-y)+\overline{\gamma^*(y)}\{y+\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x+u-y-w)dw\}]du\Big]dy \tag{7}$$

先ず，$c_1<b_1$ と仮定し，（7）に（5）を代入すると，

$$L_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+x^2+c_1^2x+b_1^2-\dfrac{c_1^3}{3}-c_1^2+c_1-1, & \text{if } x\le c_1\\ (c_1+2)x^2-2c_1x+b_1^2+c_1-1 & \text{if } c_1<x<b_1\\ (c_1+1)x^2+2(b_1-c_1+1)x-2b_1+c_1-1, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{8}$$

となる。式（8）の $L_\alpha(x)$ は x に関して連続単調増加関数で $L_\alpha(0)<0<L_\alpha(1)$ を満たすので，区間［0, 1］内に $L_\alpha(x)=0$ を満たす x が唯一存在する。これを a_1 で表すと，（6）を最大にする $\alpha(x)$ は

$$\alpha^*(x)=\begin{cases}1, \text{ if } x\ge a_1\\ 0, \text{ otherwise,}\end{cases} \tag{9}$$

で与えられる。ただし，a_1 と b_1，c_1 の大小関係については分からない。

企業 1 が行動戦略（9）を用いたとき，利得関数 $M(\alpha^*,\beta,\gamma)$ 中の $\beta(y)$ を含む部分を次

式で表す。

$$\int \beta(y)L_\beta(y)dx \tag{10}$$

ただし,

$$L_\beta(y)=\begin{cases}(1-a_1)^2, & \text{if } y<a_1\\ -y^2-2(1-a_1)y+1, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{11}$$

である。したがって,前述の予想(5)における b_1 は $a_1<b_1$ であり,かつ次式を満足しなければならない。

$$L_\beta(b_1)=-b_1^2-2(1-a_1)b_1+1=0 \tag{12}$$

同様に,企業 1 が行動戦略(9)を用いたとき,利得関数 $M(\alpha^*,\beta,\gamma)$ 中の $\gamma(y)$ を含む部分を次式で表す。

$$\int \gamma(y)L_\gamma(y)dx \tag{13}$$

ただし,

$$L_\gamma(y)=\begin{cases}-\dfrac{y^3}{3}-y^2+\dfrac{a_1^3}{3}-a_1^2+a_1, & \text{if } y<a_1\\ -a_1y^2+a_1(a_1-2)y+a_1, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{14}$$

である。このとき a_1, b_1, c_1 の大小関係は,$c_1>a_1$ か $c_1<a_1<b_1$ のいずれかである。

先ず,$c_1>a_1$ であるとすると $b_1>c_1>a_1$ であるから,(5)の c_1 および(9)の a_1 は次式を満足しなければならない。

$$L_\gamma(c_1)=-a_1c_1^2+a_1(a_1-2)c_1+a_1=0 \tag{15}$$

$$L_\alpha(a_1)=\frac{a_1^3}{3}+a_1^2+c_1^2a_1+b_1^2-\frac{c_1^3}{3}-c_1^2+c_1-1=0 \tag{16}$$

したがって,予想(5)の下で a_1, b_1, c_1 は連立方程式(12),(15),(16)の単位立方体 $[0,1]^3$ 上の根である。実際,この連立方程式は単位立方体上に唯一つの根を持ち,$a_1=0.49687$,$b_1=0.61631$,$c_1=0.49937$ となる。

次に,$c_1<a_1<b_1$ であるとすると,c_1 と a_1 はそれぞれ

$$L_\gamma(c_1)=-\frac{c_1^3}{3}-c_1^2+a_1-a_1^2+\frac{a_1^3}{3}=0 \tag{17}$$

$$L_\alpha(a_1)=(c_1+2)a_1^2-2c_1a_1+b_1^2+c_1-1=0 \tag{18}$$

を満足しなければならない。したがって,予想(5)の下で a_1, b_1, c_1 は連立方程式(12),(17),(18)の単位立方体 $[0,1]^3$ 上の根である。しかし,この連立方程式は単位立方体上に

根を持たない。

最後に，$b_1 < c_1$ の場合，式（6）の $L_\alpha(x)$ は次式で与えられる。

$$L_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+x^2+c_1^2x+b_1^2-\dfrac{c_1^3}{3}-c_1^2+c_1-1, & \text{if } x\le b_1\\ \dfrac{x^3}{3}+(2b_1+2+c_1^2)x-2b_1-\dfrac{c_1^3}{3}-c_1^2+c-1, & \text{if } b_1<x<c_1\\ (c_1+1)x^2+2(b_1-c_1+1)x-2b_1+c_1-1, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{19}$$

となる。このとき $L_\alpha(x)$ は x に関して連続単調増加関数で $L_\alpha(0)<0<L_\alpha(1)$ を満たすので，区間［0, 1］内に $L_\alpha(x)=0$ を満たす x が唯一存在する。これを a_1 で表すと，(6) を最大にする $\alpha(x)$ は式（9）で与えられる。$\alpha(x)$ の形が $c_1 < b_1$ の場合と同じであるから，$L_\beta(y)$，$L_\gamma(y)$ も同じ式ととなり，$b_1 > a_1$ を満たす。したがって，$c_1 > b_1 > a_1$ となり，このときの a_1，b_1，c_1 は連立方程式（12），（15），（16）の単位立方体 $[0, 1]^3$ 上の根となる。しかし，この方程式は $[0, 1]^3$ 上に $a_1 < b_1 < c_1$ を満たす根を持たない。

以上より，企業 1，2 の最適戦略は式（2），（3）で与えられる。

また，ゲーム値は $M(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ で与えられる。 □

3.2 Model 2 の場合

Model 2 では，企業 1 が get したときの 2 件目の契約 u をすぐに公開するため，企業 2 は企業 1 の 1 件目の契約が $x < \bar{u}$ を満たし，企業 1 の契約量が u より大きいことを知って，行動を選択することになる。そこで企業 2 の戦略 γ を次のように定義し直す。

企業 2 の戦略の再定義

$\gamma = <\overline{\gamma(y,u)}, \gamma(y,u)>$

$\gamma(y, u)$ は，企業 2 の 1 件目の契約が y で，企業 1 が u を get した時，企業 2 が keep する確率を表す。

この時，利得関数は次のようになる。

$$M(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$=\iint\Big[\alpha(x)\beta(y)\mathrm{sgn}(x-y)+\alpha(x)\overline{\beta(y)}\{\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x-y-v)dv+y\}-\overline{\alpha(x)x}$$
$$+\overline{\alpha(x)}\int_0^{\bar{x}}\Big\{\gamma(y,u)\mathrm{sgn}(x+u-y)+\overline{\gamma(y,u)}\{\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x+u-y-w)dw+y\}\Big\}du\Big]dydx \tag{20}$$

［**定理 2**］ Model 2 において，企業 1，企業 2 の最適戦略の α^*，β^*，γ^* は次式で与えられる。

$$\alpha^*(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x\ge a_2\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{21}$$

$$\beta^*(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y\ge b_2\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\quad \gamma^*(y,u)=\begin{cases}1, & \text{if } y\ge c_2(u)\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{22}$$

ただし，$(a_2,\ b_2,\ c_2(u))$ は，対 $(a_2,\ b_2)$ が単位正方形 $[0,1]^2$ の点，$c_2(u)$ は $[0,1]$ から $[0,1]$ への関数であり，次の連立方程式を満たす唯一の根の組である。

$$\begin{aligned}&-1+b_2^2+a_2+\int_0^{\bar{a}_2}2(a_2+u-1)c_2(u)du=0\\ &b_2^2+2(1-a_2)b_2-1=0\\ &c_2(u)^2+2(1-u)c_2(u)+u^2-2u+2a_2u+a_2^2-2a_2=0\end{aligned} \tag{23}$$

すなわち，$a_2=0.50524$，$b_2=0.62094$，

$$c_2(u)=\begin{cases}u-1+\sqrt{1+2a_2-a_2^2-2a_2u}, & \text{if } u\le\bar{a}_2\\ u-1+\sqrt{2-2u+u^2}, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{24}$$

である。

また，ゲーム値 V_2 は，-0.0424751 となる。ここで，$c_2(u)$ を図示すると図 2 のようになる。

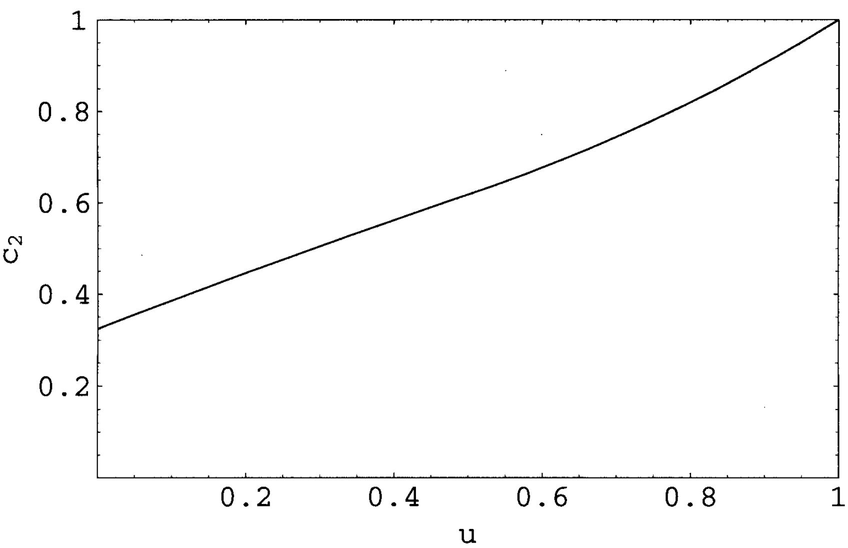


図 2　γ の閾値 $c_2(u)$

［証明］ Model 1 の最適戦略を参考に，企業 1 が用いる戦略の形が次式で与えられると予想する。

$$\alpha^*(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x \ge a_2\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{25}$$

企業1が行動戦略（25）を用いたとき，利得関数 $M(\alpha^*, \beta, \gamma)$ 中の $\beta(y)$ を含む部分を

$$\int \beta(y) L_\beta(y) dx \tag{26}$$

で表す。ただし，

$$L_\beta(y)=\begin{cases}(1-a_2)^2, & \text{if } y \le a_2\\ -y^2-2(1-a_2)y+1, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{27}$$

である。$L_\beta(y)$ は y に関して連続単調減少関数で $\mathrm{L}_\beta(a_2)>0>\mathrm{L}_\beta(1)$ であるから，区間［a_2, 1］内に $\mathrm{L}_\beta(y)=0$ を満たす y が唯一つ存在する。これを b_2 と表す。すなわち，$a_2<b_2$ であり，かつ次式を満足しなければならない。

$$L_\beta(b_2)=-b_2^2-2(1-a_2)b_2+1=0 \tag{28}$$

したがって，（26）を最大にする $\beta(y)$ は

$$\beta^*(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y \ge b_2\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{29}$$

で与えられる。

同様に，企業1が行動戦略（25）を用いたとき，利得関数 $M(\alpha^*, \beta, \gamma)$ 中の $\gamma\ (y, u)$ を含む部分を次式で表す。

$$\iint \gamma(y,u) L_\gamma(y,u) du dy \tag{30}$$

ただし，

$$L_\gamma(y,u)=\int_0^1 \overline{\alpha^*(x)}\left[\mathrm{sgn}(x+u-y)-\int_0^{\bar{y}} \mathrm{sgn}(x+u-y-w)dw-y\right]dx \tag{31}$$

$$=\begin{cases}a_2(2-2u-a_2), & \text{if } y \le u \text{ かつ } u<\overline{a_2}\\ 2a_2-a_2^2+2u-2a_2u-u^2-2y+2uy-y^2, & \text{if } u<y<u+a_2 \text{ かつ } u<\overline{a_2}\\ -2a_2y, & \text{if } y \ge u+a_2 \text{ かつ } u<\overline{a_2}\\ -2y^2-2(1-u)y+1, & \text{if } y>u \text{ かつ } u \ge \overline{a_2}\\ (1-u)^2 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{32}$$

である。

先ず，$u<\overline{a_2}$ の領域について考察する。この領域で，$L_\gamma(y, u)$ は区間［u, 1］上で y に関する連続単調増加関数で，$L_\gamma(u, u)>0>L_\gamma(u+a_2, u)$ を満足する。したがって，$u<\overline{a_2}$ である任意の u に対して，区間（u, $u+a_2$）内に $L_\gamma(y, u)=0$ を満足する唯一つの y が存在する。

これを $c_{2\ell}(u)$ で表すと，$c_{2\ell}(u)$ は次式を満たす。

$$L_\gamma(c_{2\ell}(u),u) = -c_{2\ell}(u)^2 + 2(u-1)c_{2\ell}(u) - u^2 + 2u - 2a_2u - a_2^2 + 2a_2 = 0$$

すなわち，

$$c_{2\ell}(u) = u - 1 + \sqrt{1 + 2a_2 - 2ua_2 - a_2^2} \tag{33}$$

である。式（33）は，$u < c_{2\ell}(u) < u + a_2$ を満たしている。したがって，$u < \overline{a_2}$ の領域で，（30）を最大にする $\gamma(y, u)$ は

$$\gamma^*(y,u) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \geq c_{2\ell}(u) \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{34}$$

で与えられる。

次に，$u \geq \overline{a_2}$ の領域について考察する。この領域で，$L_\gamma(y, u)$ は区間［u, 1］上で y に関する連続単調増加関数で，$L_\gamma(u, u) > 0 > L_\gamma(1, u)$ を満足する。したがって，$u \geq \overline{a_2}$ である任意の u に対して，区間（u, 1）内に $L_\gamma(y, u) = 0$ を満足する唯一つの y が存在する。これを $c_{2h}(u)$ で表すと，$c_{2h}(u)$ は次式を満たす。

$$L_\gamma(c_{2h}(u),u) = 1 - 2(u-1)c_{2h}(u) - c_{2h}(u)^2 = 0$$

すなわち，

$$c_{2h}(u) = u - 1 + \sqrt{u^2 - 2u + 2} \tag{35}$$

である。式（35）は，$u < c_{2h}(u) < 1$ を満たしている。したがって，$u \geq \overline{a_2}$ の範囲で（30）を最大にする $\gamma(y, u)$ は

$$\gamma^*(y,u) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \geq c_{2h}(u) \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{36}$$

で与えられる。企業 2 が戦略（29），（34），（36）を用いたとき，利得関数 $M(\alpha, \beta^*, \gamma^*)$ 中の $\alpha(x)$ を含む部分を

$$\int \alpha(x) L_\alpha(x) dx \tag{37}$$

と表す。ただし，

$$L_\alpha(x) = \int_0^1 \left[\beta^*(y)\operatorname{sgn}(x-y) + \overline{\beta^*(y)}\{(2y-1) \vee (2x-1)\} + x - \int_0^{\bar{x}} [\gamma^*(y,u)\operatorname{sgn}(x+u-y) \right.$$
$$\left. + \overline{\gamma^*(y,u)}\{(2x+2u-1) \vee (2y-1)\}] du \right] dy$$

$$
= \begin{cases}
2(b_2+x)-2b_2-1+\int_0^{\bar{x}}\{2x+2u-1+2(x+u-1)c_{2\ell}(u)\}du, \quad \text{if } x \geq b_2 \\
x^2+b_2^2-1+\int_0^{\bar{x}}\{2x+2u-1+2(x+u-1)c_{2\ell}(u)\}du, \quad \text{if } a_2 < x < b_2 \\
x^2+b_2^2-1+\int_0^{\bar{a}_2}\{2x+2u-1+2(x+u-1)c_{2\ell}(u)\}du \\
\quad +\int_{\bar{a}_2}^{\bar{x}}\{(x+u)^2-1+c_{2h}(u)^2\}du, \quad \text{if } -1+\sqrt{1+2a_2-a_2^2} < x \leq a_2 \\
x^2+b_2^2-1+\int_0^{u_1(x)}\{(x+u)^2-1+c_{2\ell}(u)^2\}du \\
\quad +\int_{u_1(x)}^{\bar{a}_2}\{2x+2u-1+2(x+u-1)c_{2\ell}(u)\}du \\
\quad +\int_{\bar{a}_2}^{\bar{x}}\{(x+u)^2-1+c_{2h}(u)\}du, \quad \text{if } -1+\sqrt{1+a_2^2} < x \leq -1+\sqrt{1+2a_2-a_2^2} \\
x^2+b_2^2-1+\int_0^{\bar{a}_2}\{(x+u)^2-1+c_{2\ell}(u)^2\} \\
\quad +\int_{\bar{a}_2}^{u_2(x)}\{2x+2u-1+2(x+u-1)c_{2h}(u)\}du \\
\quad +\int_{u_2(x)}^{\bar{x}}\{(x+u)^2-1+c_{2h}(u)^2\}du, \quad \text{otherwise}
\end{cases} \tag{38}
$$

$$
u_1(x)=\frac{2a_2-a_2^2-x^2-2x}{2a_2}, \quad u_2(x)=1-\sqrt{x^2+2x}
$$

である。先の予想（25）より，a_2 は次式を満足しなければならない。

$$
L_\alpha(a_2)=-1+b_2^2+a_2+\int_0^{\bar{a}_2}2(a_2+u-1)c_{2\ell}(u)du=0 \tag{39}
$$

したがって，予想（25）の下で $c_{2\ell}(u)$ が式（33）で与えられる時，a_2, b_2 は連立方程式（28），（39）の単位正方形 $[0,1]^2$ 上の根である。実際，この連立方程式は単位正方形上に唯一つの根を持ち，$a_2=0.50524$，$b_2=0.62094$ となる。

ゲーム値は（25），（29），（34），（36）によって，$M(\alpha^*,\beta^*,\gamma^*)$ で計算される。 □

3.3 Model 3 の場合

Model 3 は，企業 1 と企業 2 が期末まで全く相手の行動に関する情報を得られない場合で

ある。各企業は自社の1件目の契約の値だけを知って決定を行う。したがって，企業2の戦略はβだけとなり，利得関数は次式で与えられる。

$$M(\alpha,\beta)=\iiiint\left[\alpha(x),\overline{\alpha(x)}\right]\begin{bmatrix}\mathrm{sgn}(x-y) & m_{12}(x,y,v)\\ m_{21}(x,u,y) & m_{22}(x,u,y,v)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta(y)\\ \overline{\beta(y)}\end{bmatrix}dudvdydx \tag{40}$$

ただし，$m_{12}(x, y, v)$，$m_{21}(x, u, y)$，$m_{22}(x, u, y, w)$ は次式で与えられる。

$$m_{12}(x,y,v)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(x-y-v), & \text{if } v\le\bar{y}\\ 1, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{41}$$

$$m_{21}(x,v,y)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(x+u-y), & \text{if } u\le\bar{x}\\ 1, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{42}$$

$$m_{22}(x,u,y,v)=\begin{cases}1, & \text{if } u\le\bar{x}, v>\bar{y}\\ \mathrm{sgn}(x+u-y-v), & \text{if } u\le\bar{x}, v\le\bar{y}\\ 0, & \text{if } u>\bar{x}, v>\bar{y}\\ -1 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{43}$$

Model 3は，対称ゲーム，すなわち両企業ともルール的にも情報構造的にも全く対等である。よって，ゲーム値は0で，最適戦略は共通である。

［**定理3**］ Model 3において，企業1の最適戦略は次式で与えられ，企業2の最適戦略も同一である。

$$\alpha^*(x)=\begin{cases}1, \text{ if } x\ge a_3\\ 0, \text{ otherwise,}\end{cases}\quad \beta^*(y)=\begin{cases}1, \text{ if } y\ge b_3\\ 0, \text{ otherwise,}\end{cases} \tag{44}$$

ただし，a_3は次の方程式の区間［0, 1］上の唯一の根である。

$$\frac{a_3^3}{2}+a_3^2+a_3-1=0$$

すなわち$a_3=b_3=0.57474$である。

また，ゲーム値V_3は0となる。

3.4 Model 4の場合

Model 4では，企業1がgetしたときの総契約量$x+u$が最大供給量を越えたかどうかについて，企業2が行動を決定した後まで公表されない。したがって，$x+u>1$であっても企業2に手番が移り，$y+w>1$となりゲームが流れる（引き分ける）可能性がある。その他の点は，Model 1と同じである。これは企業の各期の業績が期末決算が報告されるまで全く公開されない場合に相当すると考えられる。この時の利得関数は次式で与えられる。

$$M(\alpha,\beta,\gamma)=\iint[\alpha(x)\beta(y)\mathrm{sgn}(x-y)+\alpha(x)\overline{\beta(y)}\{\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x-y-v)dv+y\}$$

$$+\overline{\alpha(x)}\gamma(y)\{\int_0^{\bar{x}}\mathrm{sgn}(x+u-y)du-x\}+\overline{\alpha(x)}\,\overline{\gamma(y)}\{-x\bar{y}+\bar{x}y$$

$$+\int_0^{\bar{x}}\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x+u-y-w)dudw\}]dydx \tag{45}$$

［定理４］ Model 4 において，企業 1，企業 2 の最適戦略の α^*, β^*, γ^* は次式で与えられる。

$$\alpha^*(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x\geq a_4\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{46}$$

$$\beta^*(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y\geq b_4\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\quad \gamma^*(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y\geq c_4\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{47}$$

ただし，a_4, b_4, c_4 は次の連立方程式の区間 $[0,1]^3$ 上の唯一の根である。

$$(2+c_4)a_4^2-(2c_4+\frac{c_4^2}{2})a_4-1+b_4^2+c_4=0$$

$$a_4^2+2-4b_4+b_4^2=0$$

$$\frac{a_4^3}{3}-(1+\frac{c_4}{2})a_4^2+a_4-c_4^2-\frac{c_4^3}{3}=0 \tag{48}$$

すなわち，$a_4=0.48939$，$b_4=0.67317$，$c_4=0.45181$ である。

また，ゲーム値 V_4 は，0.040979 となる。

［証明］ Model 1 の証明と同様に行えるので，省略する。

3.5 Model 5 の場合

Model 5 では Model 4 と同様に，企業 1 が get したときの結果が期末まで公表されない。Model 4 と異なるのは，企業 1 が get したときの契約 u がその時点で公表されるという点だけである。

この時，利得関数は次のようになる。

$$M(\alpha,\beta,\gamma)=\iint\Big[\alpha(x)\beta(y)\mathrm{sgn}(x-y)+\alpha(x)\overline{\beta(y)}\{\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x-y-v)dv+y\}$$

$$+\overline{\alpha(x)}\int_0^{\bar{x}}\Big\{\gamma(y,u)\mathrm{sgn}(x+u-y)+\overline{\gamma(y,u)}\{\int_0^{\bar{y}}\mathrm{sgn}(x+u-y-w)dw-y\}\Big\}du$$

$$-\overline{\alpha(x)}\int_{\bar{x}}^1\{\gamma(y,u)y+\bar{y}\}du\Big]dydx \tag{49}$$

［定理 5］ Model 5 において，企業 1，企業 2 の最適戦略の α^*，β^*，γ^* は次式で与えられる。

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq a_5 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{50}$$

$$\beta^*(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \geq b_5 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \gamma^*(y,u) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \geq c_5(u) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{51}$$

ただし，$a_5 = 0.53653$，$b_5 = 0.63871$，

$$c_5(u) = \begin{cases} u - 1 + \sqrt{1 + 2a_5 - a_5^2 - 2a_5 u}, & \text{if } u \leq \overline{a_5} (= 0.46347) \\ \dfrac{u - 1 - a_5 + \sqrt{4 + (1 + a_5 - u)^2}}{2}, & \text{if } \overline{a_5} < u \leq \dfrac{1}{1 + a_5} (= 0.65082) \\ \dfrac{(1-u)^2}{u - 1 + a_5}, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{52}$$

である。また，ゲーム値 V_5 は，0.0879768 となる。

$c_5(u)$ を図示すると図 3 となる。

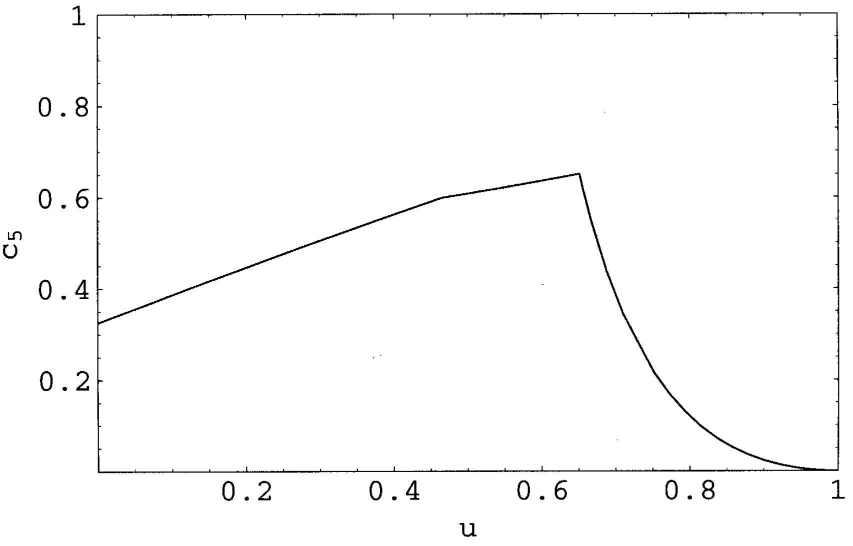


図 3　γ の閾値 $c_5(u)$

［証明］ 証明は Model 2 と同様であるから，省略する。

4. おわりに

本論文では，情報構造が異なる5つのモデルについて各プレーヤの最適戦略とゲーム値を求めた。その結果，各プレーヤが決定に際して利用できる情報の量とその時のゲーム値の間に直感的に考えられる関係が成立しないことが示された。

ここで考察した5つのモデルでは，Model 3，Model 4，Model 5，Model 1，Model 2 の順に，企業2の利用できる情報が多くなる。通常単純な交互手番ゲームであれば，先手プレーヤは自分が選択した決定を知られることによって自分の内部状態に関する部分的な情報を相手プレーヤに与えてしまうため，情報構造的には不利な状態にあり，実際ゲーム値は負値を取る。したがって，常識的にはゲーム値はこの逆順で大きくなっている（すなわち，$V_2 < V_1 < V_5 < V_4 < V_3$）はずである。そこで，各 Model i,（$i = 1, 2, \cdots, 5$）について，企業1が keep を選択した場合の企業1の期待利得 K_{i}，*get* を選択した場合の期待利得 G_{i}，ゲーム値 V_{i} $(= K_i + G_i)$ をまとめると，次表のようになる。

表2　企業1の期待利得とゲーム値

モデル	K_i	G_i	V_i
1	0.108812	−0.139454	−0.030642
2	0.111877	−0.154352	−0.042475
3	0.140474	−0.140474	0.000000
4	0.164165	−0.123186	0.040979
5	0.122264	−0.034287	0.087977

この表によると，V_{i} について Model 1–3 については直感通りの順序が成り立っているが，Model 3–Model 5 については，利用可能な情報の量とゲーム値の間に全く逆の関係が成立している。すなわち，企業1の最終契約量が既知か未知かによって企業2にとって利用できる情報の価値は全く異なるものになっている。

したがって，今回取り上げたようなモデルでは，企業1（先手プレーヤ）が選択した行動の結果として得られた内部状態（総契約量）についての情報を相手に知られないよう十分に注意を払えば，相対的に利用できる情報の多い企業 2（後手プレーヤ）に対して優位に立つことが可能であることが分かる。そして，Model 4 と Model 5 に見られるように，このような状況では，一部内部情報を漏らすことによって，その効果はさらに高められることが示された。

すなわち，今回のようなゲームにおいては，公開する情報を適切に制御することによって意思決定のタイミングによる不利益はある程度克服可能であることが示めされた。

参 考 文 献

1) Luce, D. and Raiffa, H., "*Games and Decision: Introduction and Critical Survey*", John Wiley & Sons, New York, 1957.
2) Karlin, S., "*Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*", Vol. II, Pergamon Press, London, 1959.
3) Harsanyi, J. C., "*Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, parts, I, II and III*", Management Science, **14**(1967–1968), 159–182, 320–334, 486–502.
4) 岡田 章,「ゲーム理論」, 有斐閣, 1996.
5) Akerlof, G. A., "*The market of 'lemons': Quality uncertainty and the market mechanism*", Quarterly Journal of Economics, **84**(1988), 488–500.
6) Epstein, R. A., "*The Theory of Gambling and Statistical Logic*", Academic Press, New York, 1977.
7) Sakai, S., "*A simplified two-person poker with a noisy communication channel between players*", Journal of Information & Optimization Sciences, **8**(1987), 141–153.
8) Sakaguchi, M., "*The value of sample information in La Relance poker*", Math. Japonica **33**(1988), 777–800.