無償保証期間を伴う離散形分布年令取換え政策に関する一考察

海　生　直　人

（受付　2011 年 9 月 22 日）

あ　ら　ま　し

本稿では離散形分布年令取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した拡張モデルを議論する。評価関数としては定常状態における単位時間当りの期待費用を採用し，それを最小にする最適政策を求める。無償保証期間を考えることは期待費用を減少させるだけでなく，最適予防保全年令を無償保証期間に近づける傾向を生じさせる。

キーワード　無償保証期間，離散形分布，年令取換え政策，最適政策

1. は　じ　め　に

保全政策の基本の 1 つとして知られる年令取換え政策について本稿では議論する。年令取換えモデルとは以下のものである（Barlow and Proschan［1, p. 85］参照）。最も基本的はモデルは 1 ユニットシステムに対するものであり，ユニットはある前もって定められた時刻までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ，その時刻までに故障しなければその時刻で新しい同じユニットと交換される。ユニットの動作開始からそのユニットの取換え／交換までの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。

本稿では離散形分布およびユニットの無償保証期間［2, 3］を考慮した年令取換え政策を議論する。最初に基本的な離散形分布年令取換え政策を既存の結果よりまとめる［4, 5］。次に無償保証期間を付加して離散形分布年令取換え政策を議論する。無償保証期間と予防保全年令の大小関係においてそれぞれの状況下での政策を考察し，総合的な年令取換え政策を議論する。最後に基本的な離散形分布年令取換え政策との比較を行う。評価関数としては定常状態における単位時間当りの期待費用を適用し，その期待費用を最小にする最適政策を求める。

以下の諸量を導入する。

1）　C_d　1 回当りの製品（ユニット）故障に対するダウンタイム費用

　　C_r　1 回当りの製品（ユニット）購入に対する購入費用

2）w　無償保証期間，すなわち $[0, w]$ における故障に対しては無償でユニットが供給される。但し，ダウンタイム費用 C_d は発生する。

N　年令取換え政策における予防保全年令。ユニットはある前もって定められた時刻 N までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ，時刻 N までに故障しなければ時刻 N で新しい同じユニットと交換される。

3）$f(d)$　製品の寿命時間の確率関数（$d = 0, 1, 2, ...; f(0) = 0$）

$F(d)$ 同累積分布関数

$\bar{F}(d)$ 同信頼度関数

$r(d)$　故障率（$r(0) = 0$）

$1/\lambda$　製品の期待寿命時間

4）$SC_i(N)$ $i = 0, 1, 2$　定常状態における単位時間当りの期待費用

$i = 0$：$w = 0$ のとき

$i = 1$：$0 < w \le N$ のとき

$i = 2$：$0 \le N \le w$ のとき

2.　離散形分布年令取換え政策

最初に無償保証期間を伴わない，すなわち $w = 0$ の場合の基本的な離散形分布年令取換え政策を既存の結果よりまとめる［4, 5］。

モデルは以下のものである。ユニットがある前もって定められた時刻 $N(0 \le N)$ まで故障しないならば，ユニットは時刻 N で，費用 C_r を伴って新しい同じユニットと交換されるが，時刻 N までに故障するならば，その故障時点で，費用 $C_d + C_r$ を伴って故障ユニットは新しい同じユニットと取換えられる。ユニットの動作開始からそのユニットの交換／取換えまでの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_0(N) = \frac{(C_d + C_r)F(N) + C_r\bar{F}(N)}{\Sigma_{d=1}^{N}\bar{F}(d-1)} \tag{2.1}$$

となる。以下の式を定義する。

$$H(N) = r(N+1)\sum_{d=1}^{N}\bar{F}(d-1) - F(N). \tag{2.2}$$

そのとき，期待費用 $SC_0(N)$ を最小にする最適予防保全年令 N_0^* に対して以下の定理を得る。

［定理**2.1**］

（1）　$r(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

（i） もし $H(\infty) > C_r/C_d$，すなわち $r(\infty) > (C_r + C_d)\lambda/C_d$ ならば，そのとき

$$H(N_0^*-1) < C_r / C_d \text{ かつ } H(N_0^*) \geq C_r / C_d \tag{2.3}$$

を満足する，期待費用 $SC_0(N)$ を最小にする有限でただ 1 つの最適予防保全年令 N_0^* $(0 < N_0^* < \infty)$ が存在し，期待費用に関して以下の関係が成立する。

$$C_d r(N_0^*) < SC_0(N_0^*) \leq C_d r(N_0^*+1). \tag{2.4}$$

（ii） もし $H(\infty) \leq C_r/C_d$，すなわち $r(\infty) \leq (C_r + C_d)\lambda/C_d$ ならば，そのとき最適予防保全年令は $N_0^* \to \infty$ となる。すなわち，ユニットは故障するまで動作を続ける。そのときの期待費用は

$$SC_0(\infty) = (C_d + C_r)\lambda \tag{2.5}$$

となる。

（2） $r(n)$ が単調減少であるとき（$n \geq 0$）最適予防保全年令は $N_0^* \to \infty$ となる。□

3. 無償保証期間を伴う離散形分布年令取換え政策

前節では無償保証期間を伴わない（$w = 0$）基本的離散形分布年令取換え政策を取扱ったが，本節では無償保証期間を伴う場合を取扱う。無償保証期間内でのユニットの故障に対する取換えに関しては購入費用 C_r は免除され，ダウンタイム費用 C_d のみが発生する。以下においては無償保証期間と予防保全年令の大小関係においてそれぞれの状況下での最適政策を考察し，その結果に基づき総合的な年令取換え政策を議論する。

3.1 無償保証期間が予防保全年令以下の場合

$0 < w \leq N$ の場合を取扱う。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_1(N) = \frac{(C_d + C_r)F(N) + C_r\bar{F}(N) - C_rF(w)}{\Sigma_{d=1}^{N}\bar{F}(d-1)} \tag{3.1}$$

となる。このとき期待費用 $SC_1(N)$ を最小にする最適予防保全年令 N_1^* に対して以下の補題を得る。

［**補題3.1**］

$0 < w \leq N$ において以下が成立する。

（1） $r(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \geq 0$）次のことが成立する。

（i） もし $H(\infty) \le C_r \bar{F}(w)/C_d$ ならば，そのとき期待費用 $SC_1(N)$ を最小にする最適予防保全年令 N_1^* は $N_1^* \to \infty$ となる。そのときの期待費用は

$$SC_1(\infty) = [C_d + C_r \bar{F}(w)]\lambda \tag{3.2}$$

となる。

（ii） もし $H(w) < C_r \bar{F}(w)/C_d < H(\infty)$ ならば，そのとき

$$H(N_1^* - 1) < C_r \bar{F}(w)/C_d \text{ かつ } H(N_1^*) \ge C_r \bar{F}(w)/C_d \tag{3.3}$$

を満足する有限でただ1つの最適予防保全年令 N_1^* $(w < N_1^* < \infty)$ が存在し，期待費用に関して以下の関係が成立する。

$$C_d r(N_1^*) < SC_1(N_1^*) \le C_d r(N_1^* + 1). \tag{3.4}$$

（iii） もし $H(w) \ge C_r \bar{F}(w)/C_d$ ならば，そのとき最適予防保全年令は $N_1^* = w$ となる。そのときの期待費用は

$$SC_1(N_1^*) = SC_1(w) = \frac{C_d F(w) + C_r \bar{F}(w)}{\Sigma_{d=1}^{w} \bar{F}(d-1)} \tag{3.5}$$

となる。

（2） $r(n)$ が単調減少であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

（i） もし

$$SC_1(w) \ge SC_1(\infty), \tag{3.6}$$

すなわち

$$[C_d F(w) + C_r \bar{F}(w)] \ge [C_d + C_r \bar{F}(w)]\lambda \sum_{d=1}^{w} \bar{F}(d-1) \tag{3.7}$$

ならば，$N_1^* \to \infty$ となる。

（ii） もし

$$SC_1(w) < SC_1(\infty), \tag{3.8}$$

すなわち

$$[C_d F(w) + C_r \bar{F}(w)] < [C_d + C_r \bar{F}(w)]\lambda \sum_{d=1}^{w} \bar{F}(d-1) \tag{3.9}$$

ならば，$N_1^* = w$ となる。□

3.2　無償保証期間が予防保全年令以上の場合

$0 \le N \le w$ の場合を取扱う。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_2(N) = \frac{C_d F(N) + C_r \bar{F}(N)}{\Sigma_{d=1}^{N} \bar{F}(d-1)} \tag{3.10}$$

となる。以下の式を定義する。

$$J(N) = (C_d - C_r)H(N) - C_r. \tag{3.11}$$

このとき期待費用 $SC_2(N)$ を最小にする最適予防保全年令 N_2^* に対して以下の補題を得る。

[**補題3.2**]

$0 < N \le w$ において以下が成立する。

(a)　$C_d - C_r > 0$ のとき次のことが成立する。

(1)　$r(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

(i)　もし $H(w) \le C_r / (C_d - C_r)$ ならば，そのとき期待費用 $SC_2(N)$ を最小にする最適予防保全年令 N_2^* は $N_2^* = w$ となる。そのときの期待費用は

$$SC_2(N_2^*) = SC_2(w) = \frac{C_d F(w) + C_r \bar{F}(w)}{\Sigma_{d=1}^{w} \bar{F}(d-1)} \tag{3.12}$$

となる。

(ii)　もし $H(w) > C_r / (C_d - C_r)$ ならば，そのとき

$$H(N_2^* - 1) < C_r / (C_d - C_r) \text{ かつ } H(N_2^*) \ge C_r / (C_d - C_r) \tag{3.13}$$

を満足する有限でただ 1 つの最適予防保全年令 N_2^* $(0 < N_2^* \le w)$ が存在し，期待費用に関して以下の関係が成立する。

$$(C_d - C_r) r(N_2^*) < SC_2(N_2^*) \le (C_d - C_r) r(N_2^* + 1). \tag{3.14}$$

(2)　$r(n)$ が単調減少であるとき（$n \ge 0$）最適予防保全年令は $N_2^* = w$ となる。

(b)　$C_d - C_r \le 0$ のとき次のことが成立する。

(1)　$r(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \ge 0$）最適予防保全年令は $N_2^* = w$ となる。

(2)　$r(n)$ が単調減少であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

(i)　もし $J(w) \le 0$ ならば，そのとき最適予防保全年令は $N_2^* = w$ となる。

(ii)　もし $J(w) > 0$ ならば，そのとき

$$J(N_2^* - 1) < 0 \text{ かつ } J(N_2^*) \ge 0 \tag{3.15}$$

を満足する有限な最適予防保全年令 N_2^* $(0 < N_2^* \leq \mathrm{w})$ が存在し，そのとき期待費用に関して関係式（3.14）が成立する。□

3.3　大域的最適予防保全年令

前もって無償保証期間と予防保全年令の大小関係を知ることはできない。本節では補題3.1および3.2 から大域的最適予防保全年令 N_w^* についてまとめる。

[**定理3.3**]

無償保証期間を w としたとき以下が成立する。

（1）　$r(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \geq 0$）次のことが成立する。

（a）　$C_d - C_r \leq 0$ のとき次のことが成立する。

（i）　もし $H(w) < C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば，$N_w^* = N_1^* > w$ となる。

（ii）　もし $H(w) \geq C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば，$N_w^* = N_1^* = w$ となる。

（b）　$C_d - C_r > 0$ のとき次のことが成立する。

（i）　もし $H(w) < C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば，$N_w^* = N_1^* > w$ となる。

（ii）　もし $C_r \bar{F}(w) / C_d \leq H(w) \leq C_r / (C_d - C_r)$ ならば，$N_w^* = w$ となる。

（iii）もし $H(w) > C_r / (C_d - C_r)$ ならば，$N_w^* = N_2^*$ $(0 < N_2^* \leq w)$ となる。

（2）　$r(n)$ が単調減少であるとき（$n \geq 0$）次のことが成立する。

（a）　$C_d - C_r \leq 0$ のとき次のことが成立する。

（i）　もし $J(w) \leq 0$ ならば，$N_w^* = N_1^*$ となる。

（ii）　もし $J(w) > 0$ ならば次のことが成立する。式（3.15）を満足するN_2^* $(0 < N_2^* \leq w)$ において，もし $SC_2(N_2^*) \geq SC_1(\infty)$ ならば，$N_w^* = N_1^* \to \infty$ となり，もし $SC_2(N_2^*) < SC_1(\infty)$ ならば，$N_w^* = N_2^*$ $(0 < N_2^* \leq w)$ となる。

（b）　$C_d - C_r > 0$ のとき，$N_w^* = N_1^*$ となる。□

3.4　考　　察

無償保証期間を製品に付与することは定常状態における単位時間当りの期待費用を減少させるのみでなく，最適予防保全年令を無償保証期間に近づける傾向を生じさせる。換言すれば，N_0^* が w より大きいときには無償保証は最適予防保全年令を短くし w に近づける傾向がある。逆に N_0^* が w より小さいときには無償保証は最適予防保全年令を長くし w に近づける傾向がある。

4. む　す　び

本稿では離散形分布年令取換えモデルに製品の故障に対する無償保証期間を考慮した拡張モデルを取扱った。評価関数として定常状態における単位時間当りの期待費用を採用し，それを最小にする最適政策を求めた。無償保証期間を考慮することは期待費用を減少させるだけでなく，最適予防保全年令を無償保証期間に近づける傾向を生じさせる。ここでは離散形分布年令取換えモデルを取扱ったが，連続形分布のモデルに関しては Yeh et al.［6］を参照するとよい。但し，故障率が単調減少する場合は取扱われていない。

文　献

［1］ R. E. Barlow and F. Proschan, “Mathematical Theory of Reliability,” John Wiley, New York, 1965.

［2］ W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, “Warranty Cost Analysis,” Marcel Dekker, New York, 1994.

［3］ W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, “Product Warranty Handbook,” Marcel Dekker, New York, 1996.

［4］ T. Nakagawa and S. Osaki, “Discrete Time Age Replacement Policies,” *Operational Research Quarterly*, **28**(4i), 1977, pp. 881–885.

［5］ T. Nakagawa, “A Summary of Discrete Replacement Policies,” *European Journal of Operational Research*, **17**(3), 1984, Sep., pp. 382–392.

［6］ R. H. Yeh, G.-C. Chen and M.-Y. Chen, “Optimal Age–Replacement Policy for Nonrepairable Products Under Renewing Free–Replacement Warranty,” *IEEE Transactions on Reliability*, **54**(1), 2005, Mar., pp. 92–97.

Abstract

A Note on Discrete Age Replacement Policy Taking Account of Free Warranty Interval

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the extended discrete age replacement model taking account of free warranty interval. We adopt the expected cost per unit time in the steady state as a criterion of optimality and seek the optimal policy minimizing that expected cost. When we apply the free warranty interval, the expected cost decreases and furthermore we have the tendency that the optimal preventive maintenance age goes closer to the free warranty interval.

Keywords: Free warranty interval, Discrete distribution, Age replacement policy, Optimal policy