

無償保証期間を伴うブロック取換え政策に関する一考察

海 生 直 人

(受付 2012 年 5 月 1 日)

あ ら ま し

本稿ではブロック取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した保全モデルを議論する。定常状態における単位時間当りの期待費用を評価関数として採用し、それを最小にする最適ブロック取換え政策を求める。無償保証を製品に与えることは期待費用を減少させるだけでなく、最適予防保全周期を無償保証期間に近づける。

キーワード 無償保証期間, ブロック取換え政策, 定常状態における単位時間当りの期待費用, 最適政策

1. は じ め に

よく知られた基本的な保全政策の 1 つであるブロック取換え政策について本稿では議論する。ブロック取換えモデルとは以下のものである (Barlow and Proschan [1, p. 95] 参照)。最も基本的なモデルは 1 ユニットシステムに対するものである。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ、かつある前もって定められた時刻において新しい同じユニットと交換される。ユニットの交換から次のユニットの交換までの期間を 1 サイクルとし、同様なサイクルを繰り返す。

本稿では製品 (ユニット) の無償保証期間 [2, 3] を考慮したブロック取換え政策を議論する。最初に基本的なブロック取換え政策を既存の結果よりまとめる [1]。次に無償保証期間を付加してブロック取換え政策を議論する。無償保証期間と予防保全周期の大小関係においてそれぞれの状況下での政策を考察し、総合的なブロック取換え政策を議論する。最後に基本的なブロック取換え政策との比較を行う。評価関数としては定常状態における単位時間当りの期待費用を適用し、その期待費用を最小にする最適政策を求める。

以下の諸量を導入する。

- 1) C_d 1 回当りの製品 (ユニット) 故障に対するダウンタイム費用
- C_r 1 回当りの製品 (ユニット) 購入に対する購入費用

- 2) w 無償保証期間, すなわち $[0, w]$ における故障に対しては無償でユニットが供給される。但し, ダウンタイム費用 C_d は発生する。
 T ブロック取換え政策における予防保全周期。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ (事後保全), かつある前もって定められた時刻 T において新しい同じユニットと交換される (予防保全)。
- 3) $f(t)$ 製品 (ユニット) の寿命時間の確率密度関数 ($t \geq 0$)
 $F(t)$ 同累積分布関数
 $m(t)$ 同再生密度関数
 $M(t)$ 同再生関数
 $1/\lambda$ 製品の期待寿命時間
- 4) $SC_i(T)$ $i = 0, 1, 2$ 定常状態における単位時間当りの期待費用
 $i = 0 : w = 0$ のとき
 $i = 1 : 0 < w \leq T$ のとき
 $i = 2 : 0 < T < w$ のとき

2. ブロック取換え政策

最初に無償保証期間を伴わない, すなわち $w = 0$ の場合の基本的なブロック取換え政策を既存の結果よりまとめる [1]。

モデルは以下のものである。ユニットは故障時点において費用 $C_d + C_r$ を伴って新しい同じユニットと取換えられ (事後保全), かつある前もって定められた時刻 T において費用 C_r を伴って新しい同じユニットと交換される (予防保全)。ユニットの交換 (予防保全) から次のユニットの交換 (予防保全) までの期間を 1 サイクルとし, 同様なサイクルを繰り返す。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_0(T) = \frac{(C_d + C_r)M(T) + C_r}{T} \quad (2.1)$$

となる。以下の式を定義する。

$$H(T) = Tm(T) - M(T). \quad (2.2)$$

そのとき, 期待費用 $SC_0(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_0^* に対して以下の定理を得る。

[定理2.1]

- (1) $m(t)$ が狭義単調増加であるとき ($t > 0$) 次のことが成立する。
 (i) もし $H(\infty) > C_r/(C_d + C_r)$ ならば, そのとき $H(T_0^*) = C_r/(C_d + C_r)$ を満足する, 期待

費用 $SC_0(T)$ を最小にする有限でただ1つの最適予防保全周期 T_0^* ($0 < T_0^* < \infty$) が存在し、そのときの期待費用は

$$SC_0(T_0^*) = (C_d + C_r)m(T_0^*) \quad (2.3)$$

となる。

(ii) もし $H(\infty) \leq C_r/(C_d + C_r)$ ならば、そのとき最適予防保全周期は $T_0^* \rightarrow \infty$ となる。すなわち予防保全は行わず事後保全のみを行う。そのときの期待費用は

$$SC_0(\infty) = (C_d + C_r)\lambda \quad (2.4)$$

となる。

(2) $m(t)$ が広義単調減少であるとき ($t > 0$) 最適予防保全周期は $T_0^* \rightarrow \infty$ となる。□

3. 無償保証期間を伴うブロック取換え政策

前節では無償保証期間を伴わない ($w = 0$) 基本的ブロック取換え政策を取扱ったが、本節では無償保証期間を伴うブロック取換え政策を取扱う。無償保証期間内での製品 (ユニット) の故障に対する取換えに関しては購入費用 C_r は免除され、ダウンタイム費用 C_d のみが発生する。以下においては無償保証期間 w と予防保全周期 T の大小関係においてそれぞれの状況下での最適ブロック取換え政策を考察し、その結果に基づき総合的なブロック取換え政策を議論する。

3.1 無償保証期間が予防保全周期以下の場合

$0 < w \leq T$ の場合を取扱う。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_1(T) = \frac{(C_d + C_r)M(T) + C_r - C_r M(w)}{T} \quad (3.1)$$

となる。このとき期待費用 $SC_1(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_1^* に対して以下の補題を得る。

[補題3.1]

$0 < w \leq T$ において以下が成立する。

(1) $m(t)$ が狭義単調増加であるとき ($t > 0$) 次のことが成立する。

(i) もし $H(\infty) \leq (C_r - C_r M(w))/(C_d + C_r)$ ならば、そのとき期待費用 $SC_1(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_1^* は $T_1^* \rightarrow \infty$ となる。そのときの期待費用は

$$SC_1(\infty) = (C_d + C_r)\lambda \quad (3.2)$$

となる。

(ii) もし $H(w) < (C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r) < H(\infty)$ ならば, そのとき $H(T_1^*) = (C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r)$ を満足する有限でただ1つの最適予防保全周期 T_1^* ($w < T_1^* < \infty$) が存在し, そのときの期待費用は

$$SC_1(T_1^*) = (C_d + C_r)m(T_1^*) \quad (3.3)$$

となる。

(iii) もし $H(w) \geq (C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r)$ ならば, そのとき最適予防保全周期は $T_1^* = w$ となる。そのときの期待費用は

$$SC_1(T_1^*) = SC_1(w) = \frac{C_d M(w) + C_r}{w} \quad (3.4)$$

となる。

(2) $m(t)$ が広義単調減少であるとき ($t > 0$) 次のことが成立する。

(i) もし

$$SC_1(w) \geq SC_1(\infty), \quad (3.5)$$

すなわち

$$C_d M(w) + C_r \geq w(C_d + C_r)\lambda \quad (3.6)$$

ならば, $T_1^* \rightarrow \infty$ となる。

(ii) もし

$$SC_1(w) < SC_1(\infty), \quad (3.7)$$

すなわち

$$C_d M(w) + C_r < w(C_d + C_r)\lambda \quad (3.8)$$

ならば, $T_1^* = w$ となる。□

3.2 無償保証期間が予防保全周期より大きい場合

$0 < T < w$ の場合を取扱う。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_2(T) = \frac{C_d M(T) + C_r}{T} \quad (3.9)$$

となる。このとき期待費用 $SC_2(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_2^* に対して以下の補題を得る。

[補題3.2]

$0 < T < w$ において以下が成立する。

(1) $m(t)$ が狭義単調増加であるとき ($t > 0$) 次のことが成立する。

(i) もし $H(w) \leq C_r/C_d$ ならば、そのとき期待費用 $SC_2(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_2^* は $T_2^* = w$ となる。そのときの期待費用は

$$SC_2(T_2^*) = SC_2(w) = \frac{C_d M(w) + C_r}{w} \quad (3.10)$$

となる。

(ii) もし $H(w) > C_r/C_d$ ならば、そのとき $H(T_2^*) = C_r/C_d$ を満足する有限でただ1つの最適予防保全周期 T_2^* ($0 < T_2^* < w$) が存在し、そのときの期待費用は

$$SC_2(T_2^*) = C_d m(T_2^*) \quad (3.11)$$

となる。

(2) $m(t)$ が広義単調減少であるとき ($t > 0$) 最適予防保全周期は $T_2^* = w$ となる。□

3.3 大域的最適予防保全周期

前もって無償保証期間と予防保全周期の大小関係を知ることはできない。本節では補題3.1および3.2から大域的最適予防保全周期 T_w^* についてまとめる。

[定理3.3]

無償保証期間を w としたとき以下が成立する。

(1) $m(t)$ が狭義単調増加であるとき ($t > 0$) 次のことが成立する。

(i) もし $H(w) < (C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r)$ ならば、 $T_w^* = T_1^* > w$ となる。

(ii) もし $(C_r - C_r M(w)) / (C_d + C_r) \leq H(w) \leq C_r / C_d$ ならば、 $T_w^* = w$ となる。

(iii) もし $H(w) > C_r / C_d$ ならば、 $T_w^* = T_2^*$ ($0 < T_2^* < w$) となる。

(2) $m(t)$ が広義単調減少であるとき ($t > 0$) 次のことが成立する。

(i) もし

$$SC_1(w) = SC_2(w) = \frac{C_d M(w) + C_r}{w} \geq SC_1(\infty), \quad (3.12)$$

すなわち

$$C_d M(w) + C_r \geq w(C_d + C_r)\lambda \quad (3.13)$$

ならば, $T_w^* = T_1^* \rightarrow \infty$ となる。

(ii) もし

$$SC_1(w) = SC_2(w) = \frac{C_d M(w) + C_r}{w} < SC_1(\infty), \quad (3.14)$$

すなわち

$$C_d M(w) + C_r < w(C_d + C_r)\lambda \quad (3.15)$$

ならば, $T_w^* = T_1^* = w$ となる。□

3.4 考 察

無償保証期間を製品に付与することは定常状態における単位時間当りの期待費用を減少させるだけでなく、最適予防保全周期を無償保証期間に近づける。換言すれば、 T_0^* が w 以上のときには無償保証は最適予防保全周期を短くし w に近づける。逆に T_0^* が w より小さいときには無償保証は最適予防保全周期を長くし w に近づける。

4. む す び

本稿ではブロック取換えモデルに製品の故障に対する無償保証期間を考慮した保全モデルを議論した。評価関数として定常状態における単位時間当りの期待費用を採用し、それを最小にする最適ブロック取換え政策を求めた。無償保証期間を考慮することは期待費用を減少させるだけでなく、最適予防保全周期を無償保証期間に近づける。ここで取扱ったモデルは大修理の概念によるものであるが、小修理を採用したモデルに関しては Yeh et al. [4] を参照するとよい。

文 献

- [1] R. E. Barlow and F. Proschan, "Mathematical Theory of Reliability," John Wiley, New York, 1965.
- [2] W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, "Warranty Cost Analysis," Marcel Dekker, New York, 1994.
- [3] W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, "Product Warranty Handbook," Marcel Dekker, New York, 1996.
- [4] R. H. Yeh, M.-Y. Chen and C.-Y. Lin, "Optimal Periodic Replacement Policy for Repairable Products Under Free-Repair Warranty," *European Journal of Operational Research*, **176**, 2007, pp. 1678–1686.

Abstract

A Note on Block Replacement Policy Taking
Account of Free Warranty Interval

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the extended block replacement model, taking account of free warranty interval. We adopt the expected cost per unit time in the steady state as a criterion of optimality and obtain the optimal block replacement policy minimizing that expected cost. When we apply the free warranty interval, the expected cost decreases and furthermore we have the result that the optimal preventive maintenance period goes closer to the free warranty interval.

Keywords: Free warranty interval, Block replacement policy, Expected cost per unit time in the steady state, Optimal policy