博士論文

経済成長モデルによる環境汚染の理論的分析

広島修道大学大学院 経済科学研究科
博士後期課程３年　浦　瀬　康　裕

目次

第１章　本論文の分析視点と構成
1.1　はじめに
1.2　本論文の概要

第２章　ソローの経済成長モデルと環境汚染
２.１　はじめに
２.２　モデル
２.２.１ ソローの基本モデル
２.２.２ ソローの動学方程式
２.２.３ ソローモデルへの環境汚染の導入
２.３　動学分析
２.３.１ 定常解の存在と一意性
２.２.２ 定常解の安定性
２.４　成長経路における環境汚染ストックの削減
２.５　おわりに

第３章　最適経済成長モデルによる環境問題分析の基礎
３.１　はじめに
３.２　基本モデル
３.２.１ 生産関数
３.２.２ 汚染排出関数
３.２.３ 自然資源ストック
３.２.４ 環境汚染ストック
３.２.５ 効用関数
３.２.６ 資本ストックの動き
３.３　社会的に最適な成長経路
３.３.１　動学的最適化の条件

３.３.２　社会的最適経路の性質
３.４　市場経済における成長経路
３.４.１　家計の主体的均衡条件
３.４.２　企業の主体的均衡条件
３.４.３　自然資源採取業者の主体的均衡条件
３.４.４　市場均衡条件
３.５　成長経路の比較と最適税率
３.６　おわりに

第４章　最適経済成長とフローの環境汚染
４.１　はじめに
４.２　モデル
４.２.１　生産関数
４.２.２　汚染排出関数
４.２.３　効用関数
４.２.４　資本ストックの動き
４.３　社会的に最適な成長経路
４.３.１　動学的最適化の条件
４.３.２　社会的最適経路の性質
４.３.３　経済成長経路の分析
４.４　市場経済における成長経路
４.４.１　家計の主体的均衡条件
４.４.２　企業の主体的均衡条件
４.４.３　市場均衡条件
４.４.４　市場経済における成長経路の定常解の存在と一意性
４.５　成長経路の比較
４.６　おわりに

第５章　内生的経済成長と環境汚染
５.１　はじめに

５.２　モデル
５.２.１　家計の消費行動
５.２.２　生産関数
５.２.３　汚染ストックの蓄積
５.２.４　政府
５.３　最適成長経路
５.３.１　動学的最適化の条件
５.３.２　移行動学の分析
５.３.３　定常状態の存在と一意性
５.３.４　定常状態の安定性
５.４　汚染ストックと経済厚生
５.５　おわりに

第６章　おわりに

第１章　本論文の分析視点と構成

１.１　はじめに

本論文では、経済成長によって引き起こされる環境問題と経済成長をどのように両立させながら経済を持続的に発展させていくことができるか、ということを基本的な問題意識としている。そして、そのような問題意識にもとづいて経済成長と環境保全を両立させるような持続的な経済発展について考察を進めていくが、考察を進めていくためには境問題を明示的に取り入れた経済成長モデルをもちいなければならない。そこで、まず最初に経済成長モデルについて概観しておく。

経済成長に関する理論的分析は、ハロッド＝ドーマーモデル（Harrod(1939)、Domar(1946, 1957)）によって始められたが、このモデルによる結論は長期的に安定的な経済成長を持続していくことは困難であるというものであった。この結論に対してソロー（Solow(1956)をはじめとする新古典派経済成長モデルにおいては、長期的な成長経路は安定的であることが示された。それ以降の経済成長モデルは、ソローの経済成長モデルをベースとしながら技術進歩や家計の最適消費計画をモデルに導入することによってさらに発展し、最適経済成長モデルへと発展した。その後、経済構造や経済主体の行動から経済成長が内生的に発生するメカニズムの研究が Romer(1986)や Lucas(1988)などによって始められ、内生的経済成長理論として発展した。そして、人口成長や外生的な技術進歩がなくても持続的な経済成長が起こる可能性や国ごとに経済成長率が異なる理由などが検討された。

このように経済成長理論が発展していく一方で、1970 年代ころから資源の枯渇問題と環境汚染問題が経済成長理論に導入されはじめた。特に、環境汚染問題については最適経済成長理論の研究成果を適用する形で、環境汚染を最適に制御しつつ経済が成長するための条件について研究が進められてきている。持続的な発展のために経済成長と環境保全を両立することを目的として研究が進められてきているが、内生的経済成長理論の発展によって持続的成長を実現するためのメカニズムや環境政策が経済成長率に与える影響などの分析が可能にな

ってきている。

本論文では、環境問題を導入したこれらの経済成長モデルをもちいて、環境問題を含んだ経済成長経路の分析、定常状態における資本ストックと環境汚染ストックの分析、環境汚染が経済成長率におよぼす影響などについて分析を行う。第２章では、ソローモデルに環境汚染ストックを導入したモデルをもちいて、資本ストックと環境汚染ストックの関係、経済成長と環境汚染の関係、資本蓄積が環境汚染におよぼす影響などについて分析を行う。第３章では、最適経済成長モデルに環境汚染問題、資源問題を導入したモデルの基本的枠組みについて詳細に検討を行う。そして社会的に最適な成長経路、市場経済における成長経路の比較を行い、2 つの経路を一致させる政策についても検討を行う。第４章では、最適経済成長モデルにフローの環境汚染を導入したモデルの分析を行い、社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路について、それぞれの経路の定常解の存在と一意性、定常解への収束の問題などの分析を、位相図をもちいた動学分析によって行う。さらに 2 つの成長経路の比較も行う。第５章では、まず、内生的経済成長モデルに関する先行研究を概観して、内生的経済成長モデルの枠組みを確認する。そして、第４章の分析にもちいた最適経済成長モデルを内生的経済成長モデルに変更し、さらに環境汚染ストックを導入して、均斉成長経路について検討を行う。そして、これらの分析にもとづいて、均衡成長経路上において経済厚生と環境汚染汚染防止のための政府の政策との関係についても分析を行う。

１.２　本論文の概要

「第２章 ソローの経済成長モデルと環境汚染」においては、まず新古典派経済成長理論の原点であるソロー（Solow(1956)）の経済成長モデルについてその概要を検討し、ソローの経済成長モデルの構造について確認する。次に、Barro and Sala-i-Martin（2003）、Inada（1963）、Romer（2018）、Solow（1956）、（1999）、Swan（1956）、Xepapadeas （2005）などを参照しながら、ソローの経済成長モデルに環境汚染ストックを導入したモデルをもちいて、資本ストックと環境汚染ストックの成長経路について分析をおこない、そ

の分析をもとにして環境汚染ストックを削減するための条件について若干の考察をおこなう。

具体的には、生産活動のプロセスが汚染排出を伴うものと想定し、生産されたアウトプットの１単位あたり一定率の汚染排出が起こると想定する。そして、その汚染は蓄積されていくものとする。　そのような想定による経済成長モデルのもとで、さらに１人あたり資本ストックが増加することによって汚染排出比率が減少することを想定し、資本ストックの成長経路、および、環境汚染ストックの成長経路について分析を行う。この分析においては、特に環境汚染ストックの時間を通じた変化に注目し、汚染ストックがどのように変化していくかについて分析を行う。

「第３章 最適経済成長モデルによる環境問題分析の基礎」においては、環境保全と経済成長の両立という観点から経済成長と環境問題について分析をおこなうための基本モデルの１つとして、最適経済成長モデルに環境汚染問題、および、資源問題を導入したモデルの基本的枠組みについて詳細に検討をおこなう。

最適経済成長モデルは Ramsey（1928）を開祖とし、Cass（1965）や Koopmans（1965）らによって基礎付けがおこなわれた後、1960 年代後半以降に精力的に研究が進められたモデルである。それらの研究を受けて、1970 年代からは最適経済成長モデルに環境問題や資源問題を導入する試みが、たとえば、Forster（1973）、Gruver（1976）などによっておこなわれるようになり、その後、比較的近年の研究としては、たとえば、Mohtadi（1996）、Rosendahl（1996）、Schou（2000）などによって環境汚染問題や資源問題を導入した最適経済成長モデルが展開され、経済成長と環境問題に関する分析がおこなわれている。

第３章においては、これらの先行研究において分析にもちいられている自然資源や生産活動によって発生する環境汚染を導入した最適経済成長モデルについて、その基本的な枠組みを詳細に検討していく。そして、そのモデルをもちいて社会的厚生を最大化することを目的とした社会的最適成長経路、および、市場経済システムを前提とした市場均衡成長経路についてそれぞれ分析をおこない、社会的最適解と市場均衡解が乖離することも確認していく。さらに、2 つの分析を比較することによって、市場均衡解を社会的最適解に一致させるための

政策についても言及していく。

「第４章 最適経済成長とフローの環境汚染」においては、最適経済成長モデルにフローの環境汚染を導入したモデルについて詳細に検討をおこない、そのモデルをもちいて社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路についてそれぞれ分析をおこなう。そして、その分析をもとにして 2 つの経路の比較をおこない、環境問題へも言及する。

本論文の第３章において環境保全と経済成長の両立という観点から経済成長と環境問題について分析をおこなうための基本モデルとして、最適経済成長モデルにストックの環境汚染問題、および、自然資源ストックを包括的に導入したモデルの基本的枠組みについて詳細に検討をおこなった。そして、そのモデルをもちいて社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路がそれぞれ満たす最適性の条件を導出し、それらの条件の比較をおこなうことで最適な環境税率についても言及した。

しかしながら、第３章において分析にもちいたモデルは包括的なモデルとなっているため、経済成長経路の定常状態における定常解の存在と一意性の問題、および、定常解への収束の問題などが取り扱われていなかった。

そこで、第４章においては、たとえば、Forster (1973)、Gruver (1976)、van der Ploeg and Withagen(1991)、Gradus and Smulders(1993)、Xepapadeas(2005)などを参照しながら、環境問題をフローの環境汚染に限定し、分析を汚染フローのみを取り扱ったシンプルな形に限定することにはなるが、位相図をもちいた分析が可能となる枠組みに修正して、2 つの成長経路における定常解の存在と一意性の問題、および、定常解への収束の問題についてそれぞれ検討をおこなう。また、2 つの成長経路を比較することで、社会的に最適な状態と市場経済における状態の比較もおこなう。

「第５章 内生的経済成長と環境汚染―Barro(1990)型モデルによる分析―」においては、Barro(1990)型の内生的経済成長モデルに環境問題を導入するために、まず内生的経済成長モデルについて、その概要を確認する。１人あたり資本ストックに関する収穫が逓減しないことをモデル化することで、人口成長や外生的な技術進歩が存在しなくても経済が持続的に成長していくことを内生的経済成長モデルは可能としているが、１人あたり資本ストックに関する収穫が逓減し

ないことをモデル化することについては、以下のような内生的経済成長モデルに関する先行研究によって検討が行われている。

まず、内生的経済成長理論の先駆けとなった Romer(1986)においては、研究開発による知識資本の蓄積が持続的な経済成長を生み出すことが示されている。その後、たとえばBarro(1990)においては、社会資本の整備が資本の生産性を高めることに注目し、政府支出と経済成長率の関係が検討されている。政府支出が資本の生産性を高めることによって限界生産力が逓減せず、持続的な成長が可能となるのである。さらに、Lucas(1988)においては、経済成長に果たす人的資本の役割が注目され、教育投資による教育活動によって労働者の技能水準を高めることで資本の限界生産力が逓減しないようなモデルが構築されている。他にも、Romer(1990)は、研究開発による技術革新によって持続的な成長がもたらされることを示し、その研究を受けてAghion and Howitt(1992)は、技術革新による品質の向上による持続的な成長の可能性を検討し、Grossman and Helpman(1991)においても、品質の向上による内生的経済成長の可能性が検討されている。

これらの先行研究では、持続的な経済成長を引き起こすメカニズムとして、財・サービスの生産において知識資本や人的資本を含めた広義の資本に関する収穫逓減が起こらないという性質が内生的経済成長モデルにおける本質的な役割を果たしていることが示されている。

このように内生的経済成長モデルにはいくつかのバリエーションがあるが、これらの先行研究にもとづいて、第５章では、第４章における最適経済成長モデルをもちいた環境汚染の分析について内生的経済成長モデルの立場から再検討を行う。

内生的経済成長の可能性について検討するために、まず経済の諸変数が一定率で成長する均斉成長経路が実現可能であるための条件について考察を行う。そのために、産出量、汚染ストック、消費の成長率についてそれぞれ検討を行い、均斉成長が実現される条件について検討する。特定化された生産関数や効用関数にもとづいて長期的な成長率を導出し、定常状態の存在と一意性、および、安定性について検討を行う。そして、均斉成長経路上における経済厚生と政府による汚染防止支出の関係について検討を行う。

「第６章 おわりに」においては、本論文のまとめを行い、同時に、今後の研究課題について言及する。

第２章　ソローの経済成長モデルと環境汚染

２.１　はじめに

本論文においては、Barro and Sala-i-Martin（2003）、Inada（1963）、Romer（2018）、Solow（1956）、（1999）、Swan（1956）、Xepapadeas　（2005）などを参照しながら、ソローの経済成長モデルに環境汚染ストックを導入したモデルをもちいて、資本ストックと環境汚染ストックの成長経路について分析をおこない、その分析をもとにして環境汚染ストックを削減するための条件について若干の考察をおこなう。

拙稿（2021）においては、最適経済成長モデルに環境汚染ストック、および、自然資源ストックを包括的に導入したモデルの基本的枠組みについて詳細に検討をおこなった。そして、そのモデルをもちいて社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路がそれぞれ満たす最適性の条件を導出し、それらの条件の比較をおこなうことで最適な環境税率についても言及した。

拙稿（2022）においては、環境問題をフローの環境汚染に限定して、拙稿（2021）における包括的な分析を位相図をもちいた分析が可能となる枠組みに変更し、定常解の存在と一意性の問題、および、定常解への収束の問題についてそれぞれ検討をおこなった。さらに、社会的に最適な状態と市場経済において達成される状態の比較もおこなった。

しかしながら、拙稿（2021、2022）においては、分析にもちいた最適経済成長モデルの基礎となるソローの経済成長モデルによる環境汚染ストックの動学分析には言及できていなかった。そのため、冒頭に述べたように、本稿ではソローの経済成長モデルに環境汚染ストックを導入した分析について詳細な検討をおこなう。

本章は、以下のように構成される。第 2.2 節においては、ソローの経済成長モデルに環境汚染ストックを導入した経済成長モデルの基本的な枠組みについて検討する。第 2.3 節においては、このモデルにもとづいた経済成長経路の分析、定常解の存在と一意性、および、安定性の問題についてそれぞれ分析をおこなう。第 2.4 節においては、成長経路上で蓄積される環境汚染ストックを削減するた

めにモデルに若干の変更を加える。そして、環境汚染ストックを削減するための条件について若干の考察をおこなう。第 2.5 節においては、今後の研究の方向性について言及する。

２.２　モデル

この節では、本章における分析の基礎となるソローの経済成長モデルに環境汚染ストックを導入した経済成長モデルについて、その基本構造を詳細に検討する。

2.2.1 ソローの基本モデル

生産活動は、資本 K と効率労働 AL（L は労働力人口）によっておこなわれるものとする。A は労働増加的技術進歩を表した係数である。したがって、生産関数については、以下のような労働増加的な技術進歩が存在する生産関数を想定する。

$$Y = F(K, AL) \tag{1}$$

（１）の生産関数は規模に関する収穫一定性を持つものとし、各投入物に関する限界生産性の正値性、および、逓減性を持つものとする。

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \ , \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial (AL)} > 0 \ , \frac{\partial^2 F}{\partial (AL)^2} < 0 \tag{2b}$$

資本の限界生産性は資本（あるいは効率労働）が 0 に近づいていくと無限大になっていき、資本（あるいは効率労働）が無限に増加すると 0 に近づいていくという Inada(1963) にしたがった稲田条件を想定する。

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{AL\to 0}\frac{\partial F}{\partial (AL)} = \infty \qquad (3a)$$

$$\lim_{K\to \infty}\frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{AL\to \infty}\frac{\partial F}{\partial (AL)} = 0 \qquad (3b)$$

また、労働増加的な技術進歩を表した係数 A については、外生的に g の率で成長するものとする。(4) において、$\dot{A}$ のような変数の上のドットは時間に関する微分を表している ($\dot{A} \equiv dA/dt$、ここで t は時間を表している)

$$\frac{\dot{A}}{A} = g \qquad (4)$$

さらに、人口についても、外生的に n の率で人口が成長するものとする。(5) においても (4) と同様に $\dot{L}$ のような変数の上のドットは時間に関する微分を表している ($\dot{L} \equiv dL/dt$、)

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \qquad (5)$$

産出量のうち貯蓄に向けられる割合である貯蓄率を s で表すことにする。したがって、(1－s) は産出量のうち消費に配分される割合になるが、ソローモデルでは消費の意思決定については触れられておらず、分析を容易にするために貯蓄率は外生的に s の率で与えられているものとしている。(Solow (1956) および Swan (1956) においては、貯蓄率 s 一定 (0＜s＜1)) の仮定がおかれている。)

また、資本 K は一定の率 δ (＞0)で減耗するものとする。つまり、各時点で資本ストックの一定割合が摩耗し、生産のために使用不可能になるということを想定する。

2.2.2 ソローの動学方程式

前項におけるモデルの設定から、各時点での資本ストックの純増加分は、粗投資から資本減耗分を取り除いた残りの部分になる。

$$\dot{K} = I - \delta K = sF(K, AL) - \delta K \tag{6}$$

（6）においても、（4）および（5）と同様に $\dot{K}$ のような変数の上のドットは時間に関する微分を表している（$\dot{K} \equiv dK/dt$）。また、I は投資を表している。GDP が決定されているとき投資と貯蓄が等しくなっているので、I＝ s F(K, AL) の関係が成立することになるが、(6) の右辺は投資 I にこの関係を代入したものである。(6) によって資本 K の動きが決定され、生産関数から産出量 Y の時間経路が決定されることになる。

生産関数の規模に関する収穫一定性をもちいながら、（6）を効率労働（AL）1 単位あたりの変数による動学方程式に変更する。まず、生産関数を効率労働単位あたりで表された式に変更するために（1）の両辺を AL で除する。

$$\frac{Y}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, \frac{AL}{AL}\right) = F(k, 1) \tag{7}$$

ここで、$k \equiv K/(AL)$ （効率労働単位あたり資本）と定義している。さらに、$y \equiv Y/(AL)$ 、$f(k) \equiv F(k, 1)$ と定義すると、効率労働単位で表された生産関数が (8) のように表される。

$$y = f(k) \tag{8}$$

次に、(6) の $\dot{K}$ を $\dot{k}$ に変更するために $k \equiv K/(AL)$ の両辺を時間で微分し、さらに（4）、（5）を代入すると、以下の関係式を得る。

$$\dot{k} = \left(\frac{\dot{K}}{AL}\right)$$

$$= \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL} \cdot (g + n) \tag{9}$$

（9）に（6）を代入して整理する。

$$\dot{k} = \frac{sF(K, AL) - \delta K}{AL} - \frac{K}{AL} \cdot (g+n)$$

$$= sF\left(\frac{K}{AL}, 1\right) - \delta \frac{K}{AL} - \frac{K}{AL} \cdot (g+n)$$

さらに、(7)、(8) を代入すると、$\dot{K}$ を $\dot{k}$ に変更した式が求められる。

$$\dot{k} = sf(k) - \delta k - k \cdot (g+n)$$
$$= sf(k) - (\delta + n + g)k \qquad (10)$$

(10) は (6) を効率労働 (AL) 1 単位あたりの変数による動学方程式に変更したものである。この (10) をもちいて次項以降の分析を進めていく。

2.2.3 ソローモデルへの環境汚染の導入

ソローモデルに環境汚染を導入するために、生産活動のプロセスにおいて排出物が生じ、環境を汚染することを想定する。そして、この環境汚染はストックとして蓄積されていくことを想定する。

具体的には、産出物 1 単位あたり ϕ の率で排出物が生じると想定する。なお、ϕ は定数 ($0<\phi<1$) とする。また、汚染ストック P の一部は自然環境によって分解され、m の率で消滅していくとする。以上より、環境汚染ストック P は(11)にしたがって蓄積されていくことになる。

$$\dot{P} = \phi Y - mP \qquad (11)$$

(10) を導出した手続きと同様に、$p \equiv P/(AL)$ (効率労働単位あたり環境汚染ストック) と定義して、(11) を効率労働単位当たりの式に変換する。そのために、p の定義式を時間で微分して、さらに (4)、(5) を代入する。

$$\dot{p} = \left(\frac{\dot{P}}{AL}\right)$$

$$= \frac{\dot{P}}{AL} - \frac{P}{AL} \cdot \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} \right)$$

$$= \frac{\dot{P}}{AL} - \frac{P}{AL} \cdot (g+n) \qquad (12)$$

（12）に（11）を代入して整理すると、効率労働単位あたり汚染ストック p の時間を通じた動きが（13）のように表される。

$$\dot{p} = \frac{\phi Y - mP}{AL} - p \cdot (g+n)$$

$$= \frac{\phi F(K, AL)}{AL} - pm - p \cdot (g+n)$$

$$= \phi F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) - p(m+g+n)$$

$$= \phi f(k) - p(m+g+n) \qquad (13)$$

次節における動学分析において、（10）、および、この（13）をもちいていく。

２．３　動学分析

この節では、（10）と（13）をもちいて、資本ストック、および、環境汚染ストックの定常解 (k^*, p^*) の存在と一意性、および、安定性について分析をおこなう。

2.3.1　定常解の存在と一意性

この項では、(10)と(13)をもちいて経済成長経路の定常解の存在と一意性について分析を進める。（10）より、$\dot{k} = 0$ となる定常状態における効率労働単位当たりの資本ストック k^* は以下の関係式を満たす。

$$sf(k^*) = (\delta + n + g)k^* \qquad (14)$$

まず、(14) をもとにして $\dot{k}=0$ の状態を表した $\dot{k}=0$ 線について考察を進めていく。$\dot{k}=0$ 線の傾きを求めるために (14) より、

$$F^k \equiv sf(k^*)-(\delta+n+g)k^* \tag{15}$$

と定義する。(15) よりdk/dpを求めるために陰関数定理を適用すると、

$$\frac{dp}{dk}=-\frac{\partial F^k/\partial k}{\partial F^k/\partial p} \tag{16}$$

となる。ここで (15) の定義より$\partial F^k/\partial k = sf'(k)-(\delta+n+g)$となるが、生産関数に関する仮定より $\partial F^k/\partial k<0$となる。また、(15) より$\partial F^k/\partial p=0$ となる。したがって、(16) より $\frac{dp}{dK}|_{k=0}=\infty$ となるので、$\dot{k}=0$ 線は図.1 のように定常解 k^* のところで垂直な直線になる。

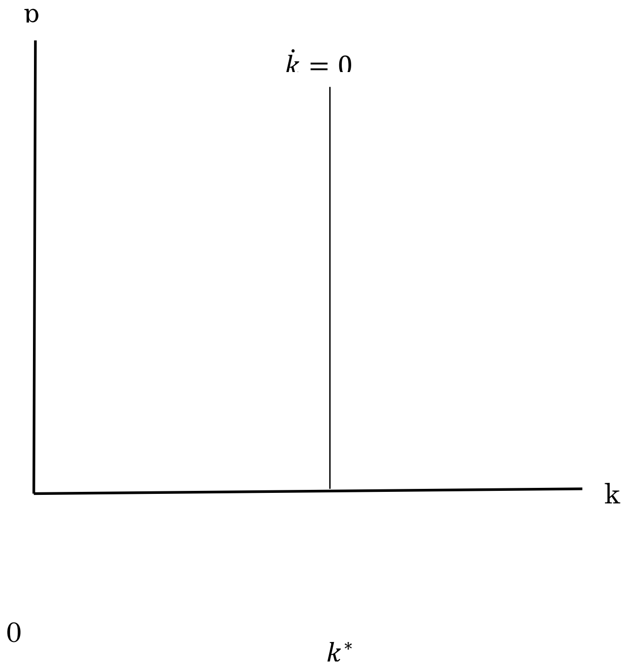

図.1

次に、(13) をもちいて $\dot{p}=0$ を表すグラフ ($\dot{p}=0$ 線) についても、同様の

考察を進める。(13) より環境汚染ストックの変化が止まる ($\dot{p} = 0$となる) のは、以下の関係式が成立するときである。

$$\phi f(k^*) = p^*(m + g + n) \tag{17}$$

(17) をもとにして $\dot{p} = 0$ の状態を表した $\dot{p} = 0$ 線について、資本ストックについておこなった分析と同様の考察を進めていく。
まず、$\dot{p} = 0$ 線の傾きを求めるために (17) より、

$$F^p \equiv \phi f(k^*) - p^*(m + g + n) \tag{18}$$

と定義する。(18) よりdp/dkを求めるために陰関数定理を適用すると、

$$\frac{dp}{dk} = -\frac{\partial F^p/\partial k}{\partial F^p/\partial p} \tag{19}$$

となる。ここで、(18) の定義より $\partial F^p/\partial k = \phi f'(k)$ となり、さらに、(18) より $\partial F^p/\partial p = -(m + g + n)$ となる。したがって、(19) より $\frac{dp}{dk}|_{\dot{p}=0} = -\frac{\phi f'(k)}{-(m+g+n)} > 0$ となるので、$\dot{p} = 0$ 線は図.2 のように右上がりの直線になる。

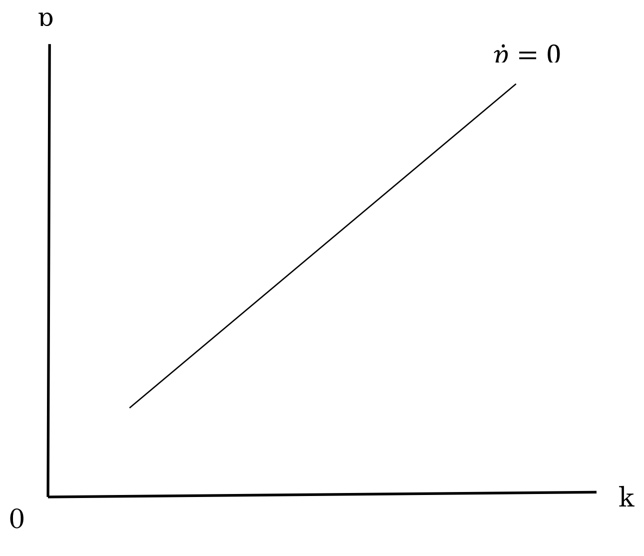

図.2

図.1 と図.2 を合わせると、図.3 に示されているように２つの直線の交点が一意的に存在するので、資本ストックと環境汚染ストックの定常解 (k^*, p^*) が一意に存在することが確認できる。

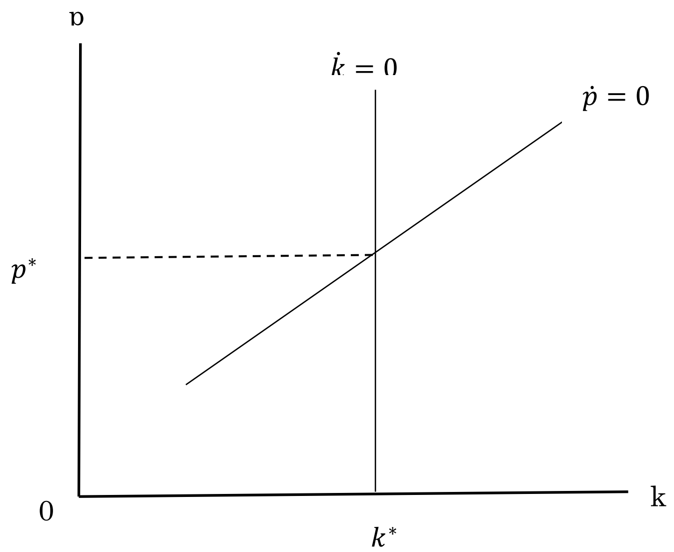

図.3

2.3.2　定常解の安定性

前項において、資本ストックと環境汚染ストックの定常解 (k^*, p^*) の存在性、および、一意性について確認することができたので、次に定常解の安定性について位相図をもちいた分析を進める。そのために、 $\dot{k}=0$ 線、$\dot{p}=0$ 線によって分けられる領域における資本ストック、および、環境汚染ストックの動きについて分析をおこなう。

まず、図.1 をもちいながら $\dot{k}=0$ 線によって分けられる左右の２つの領域における資本ストックの動きについて検討する。(14) より、定常状態においては、以下の関係式が成立する。

$$\frac{f(k^*)}{k^*}=\frac{\delta+n+g}{s} \tag{20}$$

生産関数の性質より（20）の左辺は k^* の減少関数であることが確認できるので、図.4 のように $\dot{k}=0$ 線の左側では 資本ストック k は増加し、右側では減

少することになる。

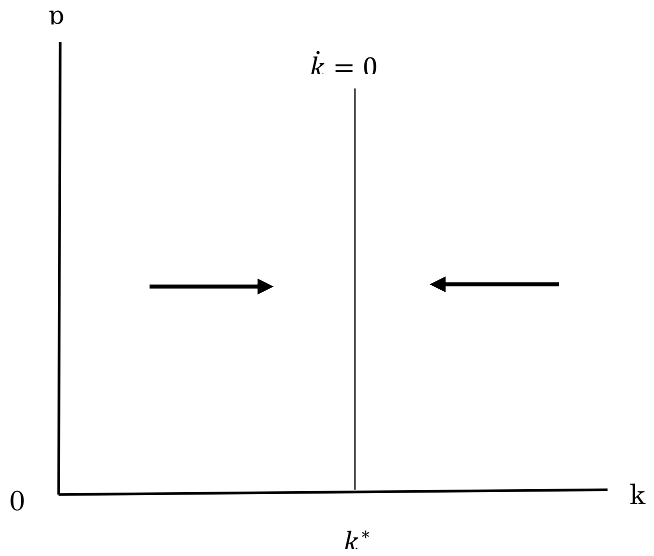

図.4

よって、2 つの領域における k の動きには図.4 のように表される。

次に、図.2 をもちいながら、$\dot{p} = 0$ 線によって分けられる上下の 2 つの領域における環境汚染ストックの動きについて検討する。（13）より定常状態においては、（17）の関係式が成立していた。

$$\phi f(k^*) = p^*(m + g + n) \tag{17}$$

ここで、p^* より少し大きな値の p を想定すると、（13）より $\dot{p} < 0$ となり、逆に少し小さな値の p を想定すると $\dot{p} > 0$ となる。したがって、2 つの領域における p の動きは図.5 のように表される。

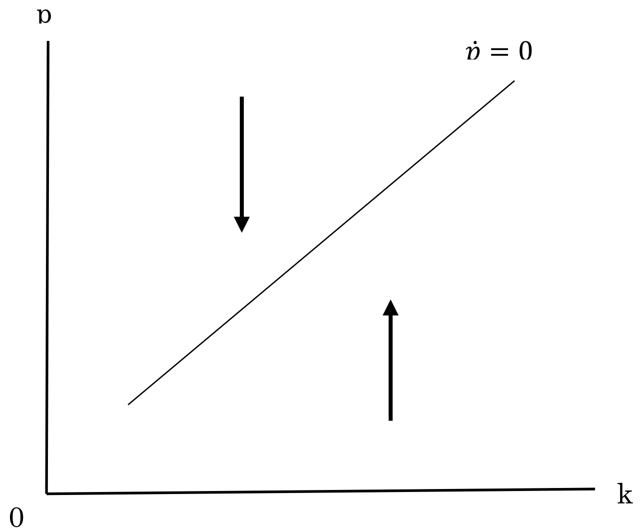

図.5

以上の分析から得られた２つの位相図（図.4、および、図.5）を１つに合わせ、資本ストック k の動き、および、環境汚染ストック p の動きを鑑みながら経済成長経路について図示すると、図.6 のように定常解 (k^*, p^*) に収束する安定的な成長経路が存在することが確認できる。

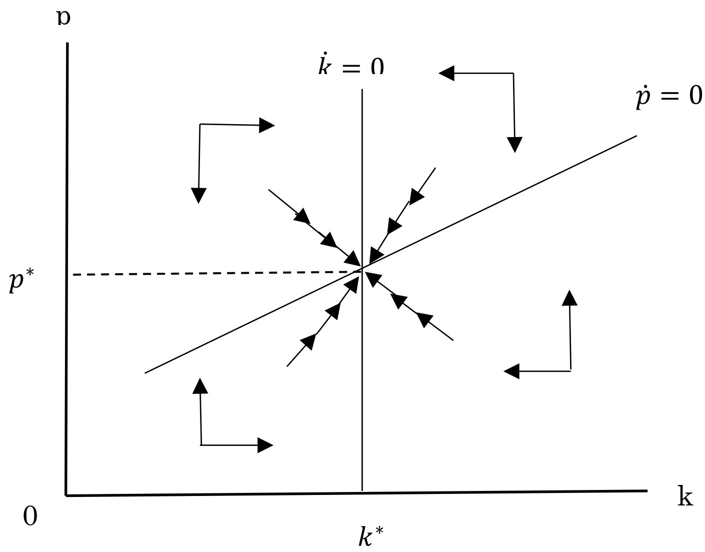

図.6

位相図をもちいた分析では、図.6 のように定常解 (k^*, p^*) は安定的であるこ

とが確認できるが、この定常解の安定性について、資本ストック k と環境汚染ストック p の微分方程式体系である（10）および（13）をそれぞれ線形近似して、固有値をもちいて検討する方法で再度確認してみることにする。

（10）および（13）を定常解（k^*, p^*）の近傍で線形近似すると以下のようになる。

$$\dot{k} = [sf'(k^*) - (\delta + n + g)\,]k \tag{18}$$

$$\dot{p} = \phi f'(k^*)k - (m + g + n)p \tag{19}$$

(18)、(19)よりヤコビ行列 J が以下のように表される。

$$J = \begin{bmatrix} sf'(k^*) - (\delta + n + g) & 0 \\ \phi f'(k^*) & -(m + g + n) \end{bmatrix} \tag{20}$$

生産関数に関する仮定より $sf'(k^*) - (\delta + n + g) < 0$ となるので、(20)より行列式は正（ $|J| > 0$）となり、また、トレース（対角要素の和）は負（$\mathrm{tr}(J) < 0$）となる。これは、2 つの固有値がマイナスであることを意味するので、図.6 に示されているように定常解（k^*, p^*）は安定的になっていることが確認できる。

2.4. 成長経路における環境汚染ストックの削減

第 3 節における分析から、このモデルに存在する環境汚染ストックは定常解 p^* に向かって収束していくことになるので、環境汚染ストックは永遠に残留し続けることになる。そこで、この節では、環境汚染ストックが蓄積されていくことを阻止するために、基本モデルに若干の変更を加えることにする。

第 2 節において設定した基本モデルにおいては、排出物係数 ϕ はある定数（$0<\phi<1$）としていたが、資本ストックの蓄積の進行にともなって生産過程において生じる排出物を減少させる技術が進歩し、排出物係数が小さくなっていくことを想定する。

$$\phi = \phi(\mathrm{k})\,;\phi'(\mathrm{k}) < 0, \lim_{k\to\infty} \phi(k) \to 0, \lim_{k\to\infty} \phi(k) f(k) \to 0 \qquad (21)$$

（21）においては、資本ストックが無限に増加していく場合に排出係数がゼロに近づいていくことを想定している。前節における分析では、資本ストックはある定常解 k^* に収束してしまうので、排出係数はその定常解に対応した値となり、この経済モデルにおいては生産過程における排出物が発生し続けることになる。

そこで、資本ストックがある定常解に収束せず、無限に増加していく状況を想定するために、以下の仮定をおくことにする。

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k} > \frac{n+\delta+g}{s}, \qquad \lim_{k\to\infty} f'(k) > \frac{n+\delta+g}{s} \qquad (22)$$

（22）の仮定は第 2 節において想定した稲田条件を壊すことになるが、この仮定を想定すれば（10）より $\mathrm{k} \to \infty$ のとき $\dot{k} > 0$ となるので、資本ストックは蓄積され続けることになる。すると、（21）の仮定より排出物係数は無限先でゼロに収束し、排出物は生じなくなるのである。また、（21）より $\mathrm{k} \to \infty$ のとき $\phi(\mathrm{k})\mathrm{f}(\mathrm{k}) \to 0$ となるので（13）より $\dot{p}/p = -(m+g+n) < 0$ となり、環境汚染ストックも減少し続けることになり、無限先では最終的に消滅することになる。

2.5　おわりに

本章においては、Barro and Sala-i-Martin（2003）、Inada（1963）、Romer（2018）、Solow（1956）、（1999）、Swan（1956）、Xepapadeas （2005）などを参照しながら、ソローの経済成長モデルに環境汚染ストックを導入した。そして、そのモデルをもちいながら資本ストックと環境汚染ストックの成長経路について分析をおこない、資本ストックと環境汚染ストックの定常解の存在と一意性、および、安定性について検討をおこなった。

また、それらの分析によって、環境汚染ストックを削減し、そして最終的に消滅させるためにはモデルの変更が必要となることが確認できたので、排出係数

を資本ストックの関数として内生化した。さらに、稲田条件を壊す形での変更になるが、資本ストックが無限大に拡大していくための条件を追加して、これらの変更された設定のもとでは環境汚染ストックが最終的に消滅する可能性があることも確認した。

本章における分析を拡張する 1 つの方向性として、蓄積された環境汚染が供給側に及ぼすマイナスの効果をモデル化する方向がある。具体的には、労働生産性の変化率 g、および、人口成長率 n に対して環境汚染ストック P が及ぼす影響について、それぞれ $\mathrm{g} = \mathrm{g(P)}\ (g' < 0)$、$n = n(P)\ (n' < 0)$ のように想定することである。ただし、この拡張は（10）の資本ストックに関する微分方程式を非自律系微分方程式に変換するため、さらなる分析が必要となる。

第３章　最適経済成長モデルによる環境問題分析の基礎

３．１　はじめに

本章は、環境保全と経済成長の両立という観点から経済成長と環境問題について分析をおこなうための基本モデルの 1 つとして、最適経済成長モデルに環境汚染問題、および、資源問題を導入したモデルの基本的枠組みについて詳細に検討をおこなうことを目的としている。

最適経済成長モデルは Ramsey（1928）を開祖とし、Cass（1965）や Koopmans（1965）らによって基礎付けがおこなわれた後、1960 年代後半以降に精力的に研究が進められたモデルである。それらの研究を受けて、1970 年代からは最適経済成長モデルに環境問題や資源問題を導入する試みが、たとえば、Forster（1973）、Gruver（1976）などによっておこなわれるようになり、その後、比較的近年の研究としては、たとえば、Mohtadi（1996）、Rosendahl（1996）、Schou（2000）などによって環境汚染問題や資源問題を導入した最適経済成長モデルが展開され、経済成長と環境問題に関する分析がおこなわれている。

本章においては、これらの先行研究において分析にもちいられている自然資源や生産活動によって発生する環境汚染を導入した最適経済成長モデルについて、その基本的な枠組みを詳細に検討していく。そして、そのモデルをもちいて社会的厚生を最大化することを目的とした社会的最適成長経路、および、市場経済システムを前提とした市場均衡成長経路についてそれぞれ分析をおこない、社会的最適解と市場均衡解が乖離することも確認していく。さらに、2 つの分析を比較することによって、市場均衡解を社会的最適解に一致させるための政策についても言及していく。

本章は以下のように構成されている。第 3.2 節においては、Mohtadi（1996）、Rosendahl（1996）、Schou（2000）などを参照しながら、自然資源および環境汚染を導入した最適経済成長モデルの基本的な枠組みを詳細に検討する。第 3.3 節においては、社会的最適成長経路の分析を、第 3.4 節においては、市場均衡成長経路の分析をそれぞれおこない、最適性の必要条件について検討をおこなう。第 3.5 節においては、第 3.3 節、第 3.4 節の分析を受けて、市場均衡解を社会的最

適解に一致させるための政策について考察する。第 3.6 節においては、今後の研究の方向性について言及する。

３．２　基本モデル

この節では、環境問題および資源問題を導入した最適経済成長モデルの基本構造を詳細に検討する。経済には、経済主体として家計と企業が存在している。人口は一定と仮定し、全く同質的な家計が多数存在してるとする。そして、その規模は 1 に規準化されているとする。労働供給は非弾力的におこなわれると仮定し、その規模も 1 に規準化される。以下、生産関数、汚染排出関数、自然資源ストック、環境汚染ストック、効用関数、資本ストックの動きについて詳細に検討していく。

3.2.1 生産関数

生産は、資本ストック K、自然資源の生産活動への投入量 R によって決定され、かつ、環境汚染ストック Pによってマイナスの影響を受けるという意味で、Pによっても決定されているとする。なお、ここでは、資本ストック Kには物的資本の他に知識資本や人的資本も含まれているとする。

以上のことから、生産量 Y は以下の生産関数によって決定されるものとする。

$$Y = \begin{cases} Y(K,R,P) & if \quad P < \bar{P} \\ 0 & if \quad P \geq \bar{P} \end{cases} \tag{1}$$

(1) において $\overline{P}$ は環境汚染ストックの閾値を表しており、環境汚染ストック P がこの値を超えてしまうと経済システムが崩壊してしまう値を表している。なお、生産活動には労働も雇用されているが、その大きさを 1 に規準化しているため (1) には記載されていない。

生産関数 $Y(K,R,P)$ は資本ストック K と自然資源の投入量 R に関しては増加関数であるが、Pに関しては減少関数であると仮定し、さらに以下のような性質をもつものとする。

$$\mathrm{Y}(0,\mathrm{R},\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}(\mathrm{K},0,\mathrm{P}) = 0, \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \quad \lim_{K\to 0}\frac{\partial Y}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial K} = 0, \tag{2b}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial R^2} < 0, \quad \lim_{R\to 0}\frac{\partial Y}{\partial R} = \infty, \quad \lim_{R\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial R} = 0, \tag{2c}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial P^2} < 0, \quad \lim_{P\to 0}\frac{\partial Y}{\partial P} = 0, \quad \lim_{P\to\bar{P}}\frac{\partial Y}{\partial P} = -\infty, \tag{2d}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K\partial R} > 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K\partial P} < 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial R\partial P} < 0. \tag{2e}$$

（2a）は資本ストック K と自然資源の投入量 R の両方が生産に不可欠であることを表している。（2b）は資本の限界生産力は逓減することを表し、（2c）も自然資源の限界生産力が逓減することを表している。（2d）は環境の悪化によって生産性が減少していくことを表している。そして、（2e）においては $\frac{\partial^2 Y}{\partial K\partial R} > 0$ は資本と自然資源が代替可能であること、$\frac{\partial^2 Y}{\partial K\partial P} < 0$ および $\frac{\partial^2 Y}{\partial R\partial P} < 0$ は環境の悪化が各生産要素の限界生産力を低下させることが、それぞれ表されている。

3.2.2 汚染排出関数

生産関数（1）による生産活動によって汚染が排出されることを想定するが、汚染排出量 E は生産に投入される資本ストック K が大きいほど多くなると仮定する。その一方で、汚染排出を抑制・削減するための活動がおこなわれれば汚染の排出量を少なくすることが可能であると考えられるので、資本ストック、および、汚染排出を抑制・削減するための活動と汚染排出量との関係を以下の関係式で表すことにする。

$$E = E(K,A) \tag{3}$$

A は汚染排出を防止・削減するための支出水準を表している。この汚染排出関数 $E(K,A)$ については、K の増加関数、A の減少関数と仮定するが、さらに以下の性質も満たすものとする。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial K^2} \geq 0, \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial K \partial A} \leq 0, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial A^2} > 0, \lim_{A \to 0} \frac{\partial E}{\partial A} = -\infty, \qquad \lim_{A \to \infty} \frac{\partial E}{\partial A} = 0. \tag{4b}$$

$\frac{\partial^2 E}{\partial K^2} \geq 0$ は排出量の増加分は資本ストックの増加にともない逓増的あるいは比例的になっていることを表し、$\frac{\partial^2 E}{\partial K \partial A} \leq 0$ は汚染防止支出の増加によって排出量の増加分が減少することを表している。さらに（4b）は汚染防止支出の限界生産性が逓減することを表している。

3.2.3 自然資源ストック

t 時点における自然資源のストック水準を $S(t)$ で表すことにする。自然資源は生産活動に使用されることでそのストックが減少していくことになるが、自らの再生能力によってストックを増加させることも可能であるとする。そして、その再生スピードは現在の自然資源ストックの水準以外に環境汚染にも影響を受けると仮定する。

以上のことから、自然資源ストックの時間を通じての変化が以下の式で表されるとする。

$$\dot{S}(t) = \Gamma\big(S(t), P(t)\big) - R(t), \quad S(0) = S_0 \tag{5}$$

$S_0 > 0$ は自然資源ストックの初期水準を表し、$\Gamma\big(S(t), P(t)\big)$ は自然資源ストックの再生スピードを表す関数とし、さらに以下の性質を満たしているものとする。

$$\Gamma(0,0) = \Gamma(\bar{S}, 0) = \Gamma(S, \bar{P}) = 0, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial S} > (=, <)\, 0 \quad if \quad S < (=, >) S_M, \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial S^2} < 0, \tag{6b}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial P} < 0, \qquad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial P^2} \leq 0, \qquad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial S \partial P} \leq 0. \tag{6c}$$

（6a）の $\bar{S} > 0$ は生産活動のための自然資源の採取、および、環境汚染が存在しない場合の自然資源ストックの水準を表した環境容量とよばれるものである。S_M は $\Gamma\big(S(t), P(t)\big)$ の値を最大にする自然資源ストックの水準を表している。

3.2.4 環境汚染ストック

環境汚染ストック Pは、以下の微分方程式にしたがって変化すると仮定する。

$$\dot{P}(t) = E(t) - \Phi\big(P(t), S(t)\big), \qquad P(0) = P_0 \tag{7}$$

$P_0 \geq 0$ は環境汚染ストックの初期水準を表している。ここで、生産活動によって発生する汚染物質の一部は自然環境に同化・吸収されていくと想定し、この同化・吸収作用は環境汚染ストックの水準、および、自然資源ストックの水準に依存しているものとする。

このような環境汚染の同化・吸収関数を $\Phi\big(P(t), S(t)\big)$ と表し、以下の性質を満たすものとする。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} > 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P^2} \leq 0, \frac{\partial \Phi}{\partial S} > 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2} \leq 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P \partial S} \geq 0, \tag{8a}$$

$$\Phi(P, S) = 0 \quad for \quad P \geq \bar{P}. \tag{8b}$$

（8a）は環境汚染ストックや自然資源ストックの水準が大きいほど汚染物質が同化・吸収される量が多くなることを表し、（8b）は環境汚染ストック Pが閾値 $\bar{P}$ を超えてしまうと汚染物質の同化・吸収作用が働かなくなることを表している。

3.2.5　効用関数

代表的消費者の効用水準は、消費水準 C、および、環境の質（自然資源ストック S、環境汚染のフローE、環境汚染のストック P ）に依存すると想定し、代表的消費者の効用関数は以下のように表されるものとする。

$$U = U(C, E, S, P) \tag{9}$$

（9）は凹関数であるとし、さらに以下の性質を満たすと仮定する。

$$\frac{\partial U}{\partial C} > 0\,, \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} < 0, \qquad \lim_{C\to 0}\frac{\partial U}{\partial C} = \infty,\ \lim_{C\to\infty}\frac{\partial U}{\partial C} = 0, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial E} < 0\,, \frac{\partial^2 U}{\partial E^2} < 0, \qquad \lim_{E\to 0}\frac{\partial U}{\partial E} = 0,\ \lim_{E\to \bar{E}}\frac{\partial U}{\partial E} = -\infty, \tag{10b}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} > 0\,, \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} < 0, \qquad \lim_{S\to 0}\frac{\partial U}{\partial S} = \infty,\ \lim_{S\to\infty}\frac{\partial U}{\partial S} = 0, \tag{10c}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} < 0\,, \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} < 0, \qquad \lim_{P\to 0}\frac{\partial U}{\partial P} = 0,\ \lim_{P\to \bar{P}}\frac{\partial U}{\partial P} = -\infty. \tag{10d}$$

（10a）は、消費量の増加は効用水準を高めるが、限界効用は逓減することを表している。（10c）に示されているように、自然資源ストックについても同様のことが仮定されている。また、（10d）に示されているように、汚染の増加による環境悪化は効用を低下させ、かつ、限界不効用は逓増する。

3.2.6　資本ストックの動き

生産関数（1）によって生産され、消費されたものの残りは投資に回されて資本ストックを形成していくことになるが、その資本ストックの蓄積は以下の微分方程式で表されるとする。

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t)\,, \qquad K(0) = K_0\,. \tag{11}$$

$K_0 > 0$ は資本ストックの初期値を表し、$\delta \geq 0$ は資本減耗率を表している。

3.3 社会的に最適な成長経路

この節では、前節で詳細に検討した基本モデルをもちいながら社会的に最適な経済成長経路について検討をおこなう。社会的に最適な経済成長経路とは、

社会的厚生を(1)、(3)、(5)、(7)、(11) の制約のもとで最大化するような消費 C、自然資源投入量 R、汚染防止支出 A、資本ストック K、自然資源ストック S、汚染ストック P の時間経路を求めることによって得ることができるものである。

3.1　動学的最適化の条件

　分析を進めるために社会的厚生を定義しなければならないので、ここでは各時点の効用の割引現在価値の合計として社会的厚生を定義することにする。よって社会的厚生は以下のように表される。

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} U\big(C(t), E(t), S(t), P(t)\big)\, dt \tag{12}$$

$\rho > 0$ は時間選好率を表しており、ρ の値が大きくなるほど将来の効用は低く評価されることになる。(12)、および、(5)、(7)、(11) によって社会的に最適な経済成長経路を求める問題は、以下のような動学的最適化問題となる。

$$\max \quad \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} U\big(C(t), E(K,A)(t), S(t), P(t)\big)\, dt$$

(13)

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & \dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t), && K(0) = K_0, \\
& \dot{S}(t) = \Gamma\big(S(t), P(t)\big) - R(t), && S(0) = S_0, \\
& \dot{P}(t) = E(t) - \Phi\big(P(t), S(t)\big), && P(0) = P_0
\end{aligned}$$

この動学的最適化問題 (13) の制御変数は C、R、A であり、状態変数は K、S、P であるが、この問題はポントリアーギンの最大値原理をもちいて解くことができる。そのために経常価値ハミルトニアンを次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \equiv\ & U\big(C(t), E(K,A)(t), S(t), P(t)\big) + m_K[Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t)] \\
& + m_S\big[\Gamma\big(S(t), P(t)\big) - R(t)\big] + m_P\big[E(t) - \Phi\big(P(t), S(t)\big)\big]
\end{aligned}$$

m_K、m_S、m_P はそれぞれ状態変数 K、S、P に対応する共状態変数であり、各ストック変数のシャドープライスを表してる。

社会的に最適な経済成長経路となるための必要条件は、最大値原理を適用することによって以下のように求められる。

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = \frac{\partial U}{\partial C} - m_K = 0, \tag{14a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = m_K \frac{\partial Y}{\partial R} - m_S = 0, \tag{14b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A} = \left(\frac{\partial U}{\partial E} + m_P\right)\frac{\partial E}{\partial A} - m_K = 0, \tag{14c}$$

$$\dot{m}_K = \rho m_K - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = m_K\left(\rho + \delta - \frac{\partial Y}{\partial K}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial E} + m_P\right)\frac{\partial E}{\partial K}, \tag{14d}$$

$$\dot{m}_S = \rho m_S - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = m_S\left(\rho - \frac{\partial \Gamma}{\partial S}\right) - \frac{\partial U}{\partial S} + m_P \frac{\partial \Phi}{\partial S}, \tag{14e}$$

$$\dot{m}_P = \rho m_P - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = m_P\left(\rho + \frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - \frac{\partial U}{\partial P} - m_K \frac{\partial Y}{\partial P} - m_S \frac{\partial \Gamma}{\partial P} \tag{14f}$$

（14a）、（14b）、（14c）の３本の式は、各制御変数がハミルトニアンを最大化するように選択されていることを表している。（14d）、（14e）、（14f）の３本の式はオイラー方程式とよばれ、各ストック変数の変化が効用に及ぼす影響を調整するようにシャドープライスが時間を通じて変化していくことを表している。

なお、$\mathcal{H}$ が制御変数と状態変数について凹関数であるならば、（14a）から（14f）までの各式、および、以下の 3 つの横断性条件が最適化のための必要十分条件となる。

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} m_K(t)\, K(t) = 0, \tag{15a}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} m_S(t)\, S(t) = 0, \tag{15b}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} m_P(t)\, P(t) = 0 \tag{15c}$$

横断性条件は、各ストック変数の現在価値が最終時点、つまりは無限の将来においてゼロになることを表している。

3.2　社会的最適経路の性質

これらの条件式をもちいながら、社会的に最適な経済成長経路がもつ性質について検討を進めていこう。はじめに、(14a)、(14b)、(14c) をもちいながら静学的な最適資源配分の条件について検討する。そのために、以下の定義をおくことにする。

$$\mu_s \equiv \frac{m_s}{\partial U/\partial C}, \qquad \mu_p \equiv -\frac{m_p}{\partial U/\partial C} \tag{16}$$

これは、ハミルトニアンの定義においてもちいられたシャドープライス m_S、m_P を消費の限界効用で除することで、それぞれのシャドープライスを消費財の価値で測り直したものである。(16) における μ_S の定義に (14a)、(14b) を代入し、(14c) に (14a) と (16) における μ_P の定義を代入すると、以下の 2 つの関係式を得る。

$$\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial R} = \mu_S \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial C} = \left(\frac{\partial U}{\partial E} - \mu_P \frac{\partial U}{\partial C}\right)\frac{\partial E}{\partial A} \tag{18}$$

(17) の左辺は自然資源の限界生産力を表しており、右辺は自然資源ストックの社会的限界価値を表している。自然資源の生産活動への追加的投入は限界生産力の分だけ生産性を高めるが、一方で、自然資源ストックの減少はその社会的限界価値の分だけ社会的なコストをもたらすことになる。(17) は自然資源の限界生産力と社会的限界価値が均等化すべきであることを表している。

(18) の右辺においては、第 1 項は汚染排出量を削減させることで効用を増加させる効果を表しており、第 2 項は、汚染排出量を削減させることでその社会

的費用が低下するが、その低下によって効用が増加する効果を表している。よって、2 つの効果を合わせた全体としての効果が、汚染排出量の削減に使用した生産物を消費した場合の限界効用の大きさと等しくなるように資源配分がおこなわれるべきであることを（18）は表している。

次に、動学的な最適資源配分の条件について検討しよう。（14a）を時間で微分した式に(14d）を代入して整理すると、異時点間の消費配分に関する以下の式を得る。

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{1}{\sigma_C}\left[\frac{\partial Y}{\partial K}-\delta+\frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A}+\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial E}\cdot\dot{E}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial S}\cdot\dot{S}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial P}\cdot\dot{P}}{\partial U/\partial C}-\rho\right] \tag{19}$$

$\sigma_C\ \equiv\ -\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial C^2}\cdot C}{\partial U/\partial C}$ は消費の限界効用の弾力性を表している。ここで、（19）によって示されていることについて考察しよう。まず、右辺の括弧内の $\frac{\partial Y}{\partial K}-\delta$ の部分については以下のことを表していると考えられる。すなわち、生産されたもののうち消費されなかった部分は貯蓄に回されるが、その貯蓄は全て資本蓄積に充てられる。その結果、資本の純限界生産力 $\frac{\partial Y}{\partial K}-\delta$ で表される大きさだけ将来の生産量が増加することを表している。次に、$\frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A}$ の部分については以下のことを表している。消費されず貯蓄に回された部分は資本ストックを増加させるが、その増加は同時に汚染排出量も増加させるため、汚染防止活動への支出がおこなわれることになる。すなわち、$\frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A}$ は汚染の限界削減率に対する汚染の限界発生率の割合を表しており、消費へのマイナス効果を表している。最後に、$\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial E}\cdot\dot{E}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial S}\cdot\dot{S}+\frac{\partial^2 U}{\partial C\partial P}\cdot\dot{P}}{\partial U/\partial C}$ の部分については以下のことを表していると考えられる。資本ストックが変化することで汚染排出量が変化するが、その変化によって限界効用が変化する。また、資本ストックの変化を通じた自然資源ストックの変化によっても限界効用の大きさが変化する。さらに、資本ストック

の変化を通じた汚染ストックの変化によっても限界効用の大きさは変化する。$\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial C \partial E}\cdot\dot{E}+\frac{\partial^2 U}{\partial C \partial S}\cdot\dot{S}+\frac{\partial^2 U}{\partial C \partial P}\cdot\dot{P}}{\partial U/\partial C}$ の部分は、消費の限界効用に対するそれらの変化の合計割合がどの程度になるかを表している。

これら 3 つの効果を合わせた大きさが時間選好率を上回るとき、(19) の左辺は正の値を取り、将来の消費が増加することになる。

3.4. 市場経済における成長経路

前節では、社会的に最適な経済成長経路を実現するために、経済の構造を知っている社会計画者が存在し、すべての資源配を決定することを想定していた。一方、この節では、家計、企業、自然資源採取業者、および、政府から構成される分権化された市場経済を想定して最適経済成長経路について検討する。

そこで、まず家計、企業、自然資源採取業者のそれぞれの主体的均衡条件を導出し、市場均衡条件について考察をおこなった後、市場経済における最適経済成長経路について検討をおこなう。

企業は、家計が供給する資本ストックと自然資源採取業者から購入する自然資源を生産要素としてもちいながら生産活動をおこなう。その生産過程において環境汚染物質が排出されるため、政府によって環境税が課されるとする。自然資源採取業者は、自然資源を採取し、企業に販売するが、その売上げに対しては政府によって売上税が課されるものとする。政府は、それぞれの税による税収を一括補助金として家計に給付する。家計は、利子収入、利潤配当、および、政府からの補助金によって消費をおこない、消費しなかった部分を資本蓄積に充てる。ここでは、企業、および、自然資源採取業者は家計によって所有され、企業の利潤は家計に還元されるものとしている。

3.4.1　家計の主体的均衡条件

まず、家計の主体的均衡条件について考察しよう。資本のレンタル料を $r(t)$, 企業の利潤を $\Pi_F(t)$、自然資源採取業者の利潤を $\Pi_R(t)$、政府からの補助金を T(t) の記号をもちいてそれぞれ表すと、家計の予算制約式は以下のようにな

る。

$$\dot{K}(t) = \Pi_F(t) + \Pi_R(t) + [r(t) - \delta]K(t) + T(t) - C(t) \tag{20}$$

家計は、(20) の制約のもとで効用の割引現在価値 (12) を最大にするように消費の時間経路を決定する。この動学的最適化問題を (19) を求めたときと同様の方法で解くと、消費の変化率に関する以下の関係式を得る。

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\sigma_C}\left[r - \delta + \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial C \partial E}\cdot \dot{S} + \frac{\partial^2 U}{\partial C \partial S}\cdot \dot{S} + \frac{\partial^2 U}{\partial C \partial P}\cdot \dot{P}}{\frac{\partial U}{\partial C}} - \rho\right] \tag{21}$$

3.4.2　企業の主体的均衡条件

次に、企業の主体的均衡条件について検討する。企業は、各期において利潤を最大化するように、資本 K、自然資源の雇用量 R、および、汚染防止活動の水準 A をそれぞれ決定する。自然資源の価格を q、環境税率を τ_E で表すと、企業の利潤は以下のように表される。

$$\Pi_F = Y(K,R,P) - rK - qR - \tau_E E(K,A) - A \tag{22}$$

(22)を最大にするように K、R、A の水準をそれぞれ選択すると、利潤最大条件は以下のように求められる。

$$Y_K = r + \tau_E E_K, \tag{23a}$$

$$Y_R = q, \tag{23b}$$

$$-\tau_E E_A = 1 \tag{23c}$$

(23a) は資本の限界生産力がそのレンタル料と税負担の合計が等しいことを、(23b) は自然資源の限界生産力がその要素価値と等しいことを、(23c) は汚染防止活動の限界収入はその限界費用に等しいことを、それぞれ表している

3.4.3　自然資源採取業者の主体的均衡条件

最後に、自然資源採取業者の主体的均衡条件について検討する。自然資源採取業者は、(5)の制約のもとで、(24) によって表される自然資源の販売から得られる純収入 $\Pi_R = [q - \tau_R]R$ の割引現在価値を最大にするように自然資源の採取量の時間経路を決定するとする。

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t}[q(t) - \tau_R(t)]R(t)\,dt \tag{24}$$

τ_R は自然資源採取業者に課される売上税率を表している。(19) を求めたときと同様の方法でこの動学的最適化問題を解くと、最適性の必要条件が以下のように求められる。

$$\mathrm{q} = \tau_R + \mu, \tag{25a}$$

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - \Gamma_S \tag{25b}$$

μ は状態変数 S に対応する共状態変数であり、自然資源ストックのシャドープライスを表している。

3.4.4　市場均衡条件

以上の準備をもとにして市場均衡について考察をすすめよう。そのために、生産された財の市場、資本市場、自然資源の市場におけるそれぞれの市場需要関数と市場供給関数について検討をおこなわなければならないが、ここでワルラス法則について確認しよう。家計の予算制約 (20) に (22) 、Π_R の式、および、政府の予算制約 $T = \tau_E E + \tau_R R$ を代入して整理すると以下のようになる。

$$\left[\left(C + \dot{K} + \delta K + A\right) - Y\right] + r[K^d - K^S] + q[R^d - R^S] = 0 \tag{26}$$

K^d は資本への需要、R^d は自然資源への需要、K^S は資本の供給、R^S は自然

資源の供給をそれぞれ表している。(26) は各市場における超過需要の合計が恒等的にゼロになることを示しているので、たとえば資本市場と自然資源の市場が均衡していれば財市場も均衡していることになる。

そこで、資本市場、および、自然資源の市場の均衡について検討することにする。利潤最大化条件 (23a)、(23b)、(23c) より、企業は r、q、τ_E、P を所与として資本 K への需要関数$K^d(r,q,\tau_E,P)$、自然資源 R への需要関数 $R^d(r,q,\tau_E,P)$、および、汚染防止支出関数 $A(r,q,\tau_E,P)$ をそれぞれ決定する。一方、自然資源採取業者の最適性の条件 (25a)、(25b) より自然資源 R の供給関数 $R^S(q,\tau_R,S)$ が決定される。

以上のことから、資本市場、および、自然資源市場の均衡条件は、それぞれ以下のようになる。

$$K^d(r,q,\tau_E,P) = K \tag{27}$$

$$R^d(r,q,\tau_E,P) = R^s(q,\tau_R,S) \tag{28}$$

(27)、(28) より明らかなように、両市場の均衡によって資本のレンタル率 r、自然資源の価格 q は、ストック変数（K,S,P）、および、政策変数（τ_E,τ_R）によって決定される。さらに、(5)、(7)、(11) よりストック変数（K,S,P）も政策変数（τ_E,τ_R）に依存しているので、市場経済の均衡成長経路は政策変数に依存していることになる。

3.5　成長経路の比較と最適税率

この節では、ここまでの分析にもとづいて、社会的に最適な経済成長経路が満たす条件と市場均衡経路が満たす条件を比較し、両者の乖離を確認しながら政策によって市場均衡経路と社会的最適経路を一致させることについて検討をおこなう。

市場均衡経路が満たす条件 (23b) および (25a) より、自然資源の限界生産力Y_R は $Y_R = \tau_R + \mu$ と表されるが、これは社会的最適経路が満たす Y_R の条件 (17) とは一致していないので、2 つの条件を一致させ、社会的最適経路を実現することを想定するのであれば、自然資源採取業者への最適売上税率 τ_R^*

は以下のように決定されなければならない。

$$\tau_R^* = \mu_S - \mu \tag{29}$$

さらに、市場均衡経路が満たす条件（23c）より $E_A = -1/\tau_E$ となるが、この関係式を社会的最適経路が満たす条件（18）に代入して整理し、2 つの経路を一致させることを想定すると、社会的最適経路を実現するための企業への最適環境税率 τ_E^* は以下のように決定されなければならない。

$$\tau_E^* = \mu_P - \frac{\partial U/\partial E}{\partial U/\partial C} \tag{30}$$

ここで、(29)、および、(30) が表していることについて検討する。(29) は、社会的最適解を想定した場合の自然資源ストックの社会的限界価値と市場均衡解を想定した場合の私的限界価値の差額を埋めるように売上税が政府によって課されなければならないことを表している。また、(30) は、社会的最適解を想定した場合の汚染ストックの社会的限界費用と市場均衡解を想定した場合の私的限界費用の差額を埋めるように環境税が課されなければならないことを表している。

3.6 おわりに

本章においては、Mohtadi (1996)、Rosendahl (1996)、Schou (2000) などを参照しながら、まず最適経済成長モデルに環境汚染問題、および、資源問題を導入したモデルの基本的枠組みについて詳細な検討をおこなった。次に、そのモデルをもちいて社会的最適成長経路と市場均衡成長経路の比較をおこない、2 つの経路が乖離することを確認するとともに、その乖離を埋めるための政策についても言及した。

しかしながら、本章におけるモデルは、環境汚染や自然資源の問題を包括的に導入しているため、たとえば、定常状態における解の存在や一意性の問題、および、定常状態への収束の問題などを取り扱うことができない。そのため、

これらの問題を取り扱っていくためにモデルをより特定化して分析を進めることが必要となる。

　また、最適経済成長モデルでは、無限時間視野をもった家計が想定されているが、たとえば、John and Pecchenino (1994) や Marini and Scaramozzino (1995) において分析にもちいられているような、家計の有限性を想定した世代重複モデルによって同様の分析
をおこなうことも必要である。さらに、たとえば、Smulders (1999) や Jones and Manuelli (2001) において分析にもちいられているような、いわゆる内生的経済成長モデルによって同様の分析を試みることも必要である。

第４章　最適経済成長とフローの環境汚染問題

4.1　はじめに

本章においては、最適経済成長モデルにフローの環境汚染を導入したモデルについて詳細に検討をおこない、そのモデルをもちいて社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路についてそれぞれ分析をおこなう。そして、その分析をもとにして 2 つの経路の比較をおこない、環境問題へも言及する。

拙稿（2021）においては、環境保全と経済成長の両立という観点から経済成長と環境問題について分析をおこなうための基本モデルとして、最適経済成長モデルにストックの環境汚染問題、および、自然資源ストックを包括的に導入したモデルの基本的枠組みについて詳細に検討をおこなった。そして、そのモデルをもちいて社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路がそれぞれ満たす最適性の条件を導出し、それらの条件の比較をおこなうことで最適な環境税率についても言及した。

しかしながら、拙稿（2021）においてはモデルが包括的なため、それぞれの成長経路の定常状態における定常解の存在と一意性の問題、および、定常解への収束の問題などが取り扱われていなかった。

そこで、本章では、たとえば、Forster (1973)、Gruver (1976)、van der Ploeg and Withagen(1991)、Gradus and Smulders(1993)、Xepapadeas(2005)などを参照しながら、環境問題をフローの環境汚染に限定し、モデルをシンプルな形に限定することにはなるが、位相図をもちいた分析が可能となる枠組みに修正して、2 つの成長経路における定常解の存在と一意性の問題、および、定常解への収束の問題についてそれぞれ検討をおこなっている。また、2 つの成長経路を比較することで、社会的に最適な状態と市場経済における状態の比較もおこなっている。

本章は以下のように構成されている。第 4.2 節においては、Forster (1973)、Gruver（1976）、van der Ploeg and Withagen(1991)、Gradus and Smulders(1993)、Xepapadeas(2005)などを参照しながら、フローの環境汚染を導入した最適経済成長モデルの基本的な枠組みを詳細に検討する。第 4.3 節に

おいては、社会的最適成長経路の分析を、第 4.4 節においては、市場経済における成長経路の分析を、定常解の存在と一意性、および、安定性の問題を中心にそれぞれおこなう。第 4.5 節においては、第 4.3 節、第 4.4 節の分析を受けて、社会的最適成長経路と市場経済における成長経路の比較をおこない、環境問題についても言及する。第 4.6 節においては、今後の研究の方向性について言及する。

4.2 モデル

この節では、フローとしての環境問題を導入した最適経済成長モデルの基本構造を詳細に検討する。経済には、経済主体として家計と企業が存在している。人口は一定と仮定し、労働供給は非弾力的におこなわれると仮定する。そして、その規模も 1 に規準化する。以下、生産関数、汚染排出関数、効用関数、資本ストックについて詳細に検討していく。

4.2.1 生産関数

生産活動は、資本ストック K と労働 L によっておこなわれる。資本ストック K には物的資本の他に知識資本や人的資本も含まれているとする。労働 L は人口の一定割合であり、人口は成長しないものとする。すなわち、L はある定数となる。生産関数を Y=F(K,L)と表し、1 次同次性を仮定すると、λを任意定数としてλY=F(λK, λL)と表されるが、λ=1/L とおくと Y/L=F(K/L,1)と表される。ここで、L がある定数であることから、さらに L=1 とおくと Y=F(K,1)と表されるが、括弧内の 1 を省略すると、生産量 Y は以下の生産関数によって表されることになる。

$$Y = F(K) \tag{1}$$

生産関数 F(K)は資本ストック K に関して増加関数であるが、さらに以下のような性質をもつものとする。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,\quad \lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty,\quad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \tag{2}$$

4.2.2　汚染排出関数

　生産関数（1）による生産活動によって汚染が排出されると仮定するが、汚染排出量 E は生産に投入される資本ストック K が大きいほど多くなると仮定する。その一方で、汚染排出を抑制・削減するための活動がおこなわれれば汚染の排出量を少なくすることが可能であると考えられるので、資本ストック、および、汚染排出を抑制・削減するための活動と汚染排出量との関係が以下の関係式で表されるとする。

$$E = E(K, A) \tag{3}$$

A は汚染排出を防止・削減するための支出水準を表している。この汚染排出関数 E(K,A)については、K の増加関数、A の減少関数と仮定するが、さらに以下の性質をもつものとする。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial K^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial K \partial A} \leq 0, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial A^2} > 0, \lim_{A \to 0} \frac{\partial E}{\partial A} = -\infty, \quad \lim_{A \to \infty} \frac{\partial E}{\partial A} = 0. \tag{4b}$$

$\frac{\partial^2 E}{\partial K^2} \geq 0$ は排出量の増加分は資本ストックの増加にともない逓増的あるいは比例的になっていることを表し、$\frac{\partial^2 E}{\partial K \partial A} \leq 0$ は汚染防止支出の増加によって排出量の増加分が減少することを表している。さらに（4b）は汚染防止支出の限界生産性が逓減することを表している。

4.2.3　効用関数

　代表的消費者の効用水準は、消費水準 C、および、環境の質（環境汚染のフローE ）に依存すると想定し、代表的消費者の効用関数は以下のように表されるものとする。

$$U = U(C, E) \tag{5}$$

（5）は凹関数であるとし、さらに以下の性質を満たすと仮定する。

$$\frac{\partial U}{\partial C} > 0\,, \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} < 0, \qquad \lim_{C \to 0} \frac{\partial U}{\partial C} = \infty,\ \lim_{C \to \infty} \frac{\partial U}{\partial C} = 0, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial E} < 0\,, \frac{\partial^2 U}{\partial E^2} < 0, \qquad \lim_{E \to 0} \frac{\partial U}{\partial E} = 0,\ \lim_{E \to \infty} \frac{\partial U}{\partial E} = -\infty, \tag{6b}$$

4.2.4　資本ストックの動き

生産関数（1）によって生産され、消費されたものの残りは投資に回されて資本ストックを形成していくことになるが、その資本ストックの蓄積は以下の微分方程式で表されるとする。

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t)\,, \qquad K(0) = K_0\,. \tag{7}$$

$K_0 > 0$ は資本ストックの初期値を表し、$\delta \geq 0$ は資本減耗率を表している。

4.3. 社会的に最適な成長経路

この節では、前節で紹介した基本モデルをもちいながら社会的に最適な経済成長経路について検討をおこなう。社会的に最適な経済成長経路とは、社会的厚生を(1)、(3)、(7) の制約のもとで最大化するような消費 C、汚染防止支出 A、資本ストック K の時間経路を求めることによって得られる経済成長経路である。

4.3.1　動学的最適化の条件

分析を進めるために社会的厚生を定義しなければならないので、ここでは各時点の効用の割引現在価値の合計として社会的厚生を定義することにする。よって社会的厚生は以下のように表される。

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} U\big(C(t), E(t)\big)\, dt \tag{8}$$

$\rho > 0$ は時間選好率を表しており、ρ の値が大きくなるほど将来の効用は低く評価されることになる。(7)、および、(8) によって社会的に最適な経済成長経路を求める問題は、以下のような動学的最適化問題となる。

$$\max \quad \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} U\big(C(t), E(K,A)(t)\big)\, dt$$

$$\text{s.t.} \qquad \dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t), \qquad K(0) = K_0, \tag{9}$$

この動学的最適化問題 (9) の制御変数は C、A であり、状態変数は K であるが、この問題はポントリアーギンの最大値原理をもちいて解くことができる。そのために経常価値ハミルトニアン$\mathcal{H}$を次のように定義する。

$$\mathcal{H} \equiv U\big(C(t), E(K,A)(t)\big) + \lambda[Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t)]$$

λ は状態変数 K に対応する共状態変数であり、資本ストック変数のシャドープライスを表している。

社会的に最適な経済成長経路となるための必要条件は、最大値原理を適用することによって以下のように求められる。

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = \frac{\partial U}{\partial C} - \lambda = 0, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A} = \left(\frac{\partial U}{\partial E}\right) \cdot \frac{\partial E}{\partial A} - \lambda = 0, \tag{10b}$$

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \lambda\left(\rho + \delta - \frac{\partial Y}{\partial K}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial E}\right)\frac{\partial E}{\partial K}. \tag{10c}$$

（10a）、（10b）の 2 本の式は、各制御変数がハミルトニアンを最大化するように選択されていることを表している。（10c）はオイラー方程式とよばれ、資本ストック変数の変化が効用に及ぼす影響を調整するようにシャドープライスが時間を通じて変化していくことを表している。

なお、$\mathcal{H}$ が制御変数と状態変数について凹関数であるならば、（10a）から（10c）までの各式、および、以下の横断性条件が最適化のための必要十分条件となる。

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)\,K(t) = 0, \qquad (11)$$

横断性条件は、ストック変数の現在価値が最終時点、つまりは無限の将来においてゼロになることを表している。

4.3.2　社会的最適経路の性質

これらの条件式をもちいながら、社会的に最適な経済成長経路がもつ性質について検討を進めていく。はじめに、(10a)、(10b) をもちいながら静学的な最適資源配分の条件について検討する。(10a)、(10b) より以下の関係式を得る。

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial C} = \left(\frac{\partial U}{\partial E}\right)\frac{\partial E}{\partial A} \qquad (12)$$

(12) の右辺は、汚染排出量を削減させることで効用を増加させる効果を表しているが、この効果が汚染排出量の削減に使用した生産物を消費した場合の限界効用の大きさと等しくなるように資源配分がおこなわれるべきであることを(12) は表している。

次に、動学的な最適資源配分の条件について検討しよう。(10a) を時間で微分した式に(10c) を代入して整理すると、異時点間の消費配分に関する以下の式を得る。

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\sigma_C}\left[\frac{\partial Y}{\partial K} + \frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A} - \delta - \rho\right] \qquad (13)$$

$\sigma_C \equiv -\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial C^2}\cdot C}{\partial U/\partial C}$ は消費の限界効用の弾力性を表している。

ここで、(13) によって示されていることについて考察しよう。まず、右辺の括弧内の $\frac{\partial Y}{\partial K} - \delta$ の部分については以下のことを表していると考えられる。すなわち、生産されたもののうち消費されなかった部分は貯蓄に回されるが、そ

の貯蓄は全て資本蓄積に充てられる。その結果、資本の純限界生産力 $\frac{\partial Y}{\partial K} - \delta$ で表される大きさだけ将来の生産量が増加することを表している。

次に、$\frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A}$ の部分については以下のことを表している。消費されず貯蓄に回された部分は資本ストックを増加させるが、その増加は同時に汚染排出量も増加させるため、汚染防止活動への支出がおこなわれることになる。すなわち、$\frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A}$ は汚染の限界削減率に対する汚染の限界発生率の割合を表しており、消費へのマイナス効果を表している。

これら 2 つの効果を合わせた大きさが時間選好率 ρ を上回るとき、(13) の左辺は正の値を取り、将来の消費が増加することになる。

4.3　経済成長経路の分析

4.3.1　定常解の存在と一意性

この節では、(7)と(13)をもちいて経済成長経路の定常解の存在と一意性について分析を進める。まず定常状態の存在性について分析を進めるが、(13)より消費の変化が止まる（$\dot{C} = 0$となる）のは、以下の関係式が成立するときである。

$$\frac{1}{\sigma_C}\left[\frac{\partial Y}{\partial K} + \frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A} - \delta - \rho\right]C(t) = 0 \qquad (14)$$

(14)より、$C(t) \neq 0$ である限りは $C(t)$ の水準に関係なく、

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = -\frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A} + \delta + \rho \qquad (15)$$

が成立すれば(13)より $C(\dot{t}) = 0$ となる。以下、(15)をもとにして $\dot{C} = 0$ の状態を表した $\dot{C} = 0$ 線について考察を進めていく。

まず、$C(\dot{t}) = 0$ 線の傾きを求めるために (15) より、

$$F^C \equiv \frac{\partial Y}{\partial K} + \frac{\partial E/\partial K}{\partial E/\partial A} - \delta - \rho \tag{16}$$

と定義しよう。(16)よりdC/dKを求めるために陰関数定理を適用すると、

$$\frac{dC}{dK} = -\frac{\partial F^C/\partial K}{\partial F^C/\partial C} \tag{17}$$

となる。ここで(16)の定義より$\partial F^C/\partial K = Y_{KK} + (E_{KK}E_A - E_K E_{AK})/E_A^2$ となるが、仮定（$Y_{KK} < 0, E_{KK} \geq 0, E_A < 0, E_K > 0, E_{AK} > 0$）より $\partial F^C/\partial K < 0$となる。また、$\partial F^C/\partial C = -E_K E_{AC}/E_A^2$ となるが、(12)より$E_{AC} = \frac{U_{CC}U_E - U_C U_{EC}}{U_E^2}$ となる。ここで、分析を単純化するために効用関数の加法分離性を仮定として追加すると$U_{EC} = 0$ となり、仮定（$U_{CC} < 0, U_E < 0, U_C > 0$）と併せて考えると$\partial F^C/\partial C < 0$ となる。

この 2 つの結果から (17)より$\frac{dC}{dK}|_{\dot{C}=0} < 0$ となるので、$\dot{C(t)} = 0$ 線は図 1 のように負の傾きをもつことになる。

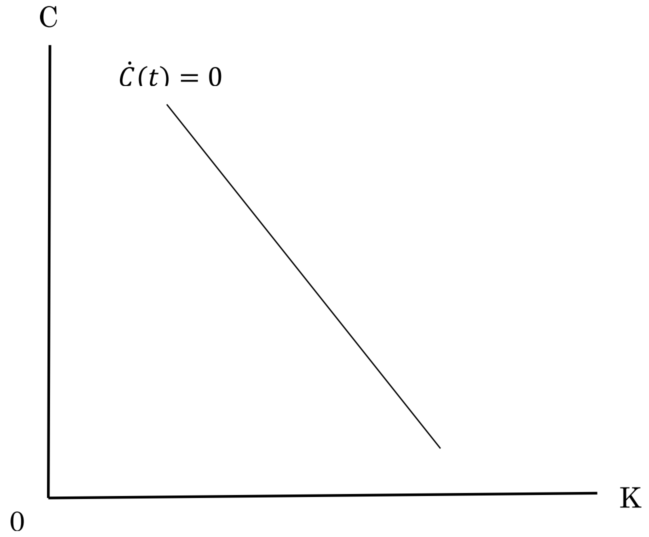

図 1

次に、(7)をもちいて $\dot{K} = 0$ を表すグラフ（$\dot{K} = 0$ 線）についても、同様の

考察を進めていく。(7)より資本ストックの変化が止まる（$\dot{K}=0$となる）のは、以下の関係式が成立するときである。

$$C(t) = Y(t) - \{A(t) + \delta K(t)\} \tag{18}$$

(18)の右辺第 1 項と中括弧でくくられた第 2 項を、それぞれ図をもちいて表すと図 2 のようになる。図 2 より、消費 C の大きさは、2 つの曲線に囲まれた部分の縦方向の長さで表されるので、(18)を図によって表すと図 3 のようになる。

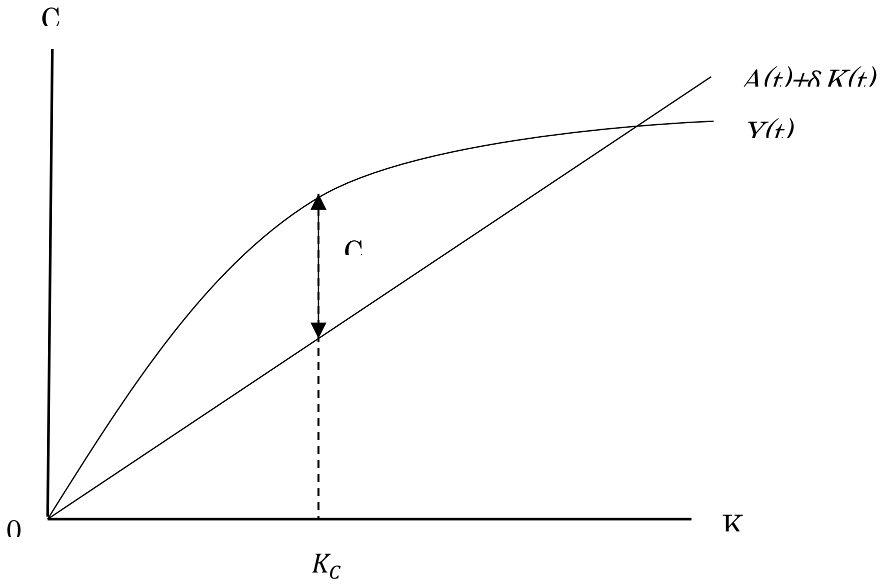

図 2

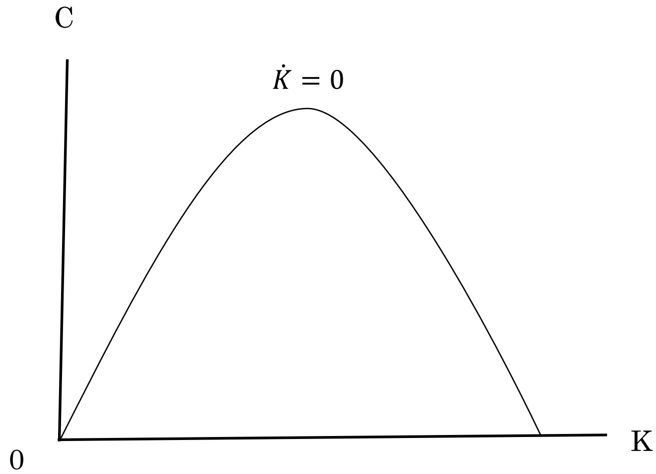

図 3

図 1 と図 3 を合わせると、2 つの曲線が交差して定常解が存在する場合について、図4_a、および、図4_b に示されているような 2 つのケースが可能性として考えられることになる。

図4_a は定常解が一意に存在するケースが示されており、図4_b は定常解が 2 つ存在する複数均衡の状態になっているケースが示されている。

ここで、図4_b のように複数均衡が存在するケースは排除されることを確認しておく。(14)において、資本のレンタル料として $\mathrm{r} \equiv \partial Y/\partial K$ と定義し、さらに汚染排出関数 E が存在しない場合を想定すると(14)は以下のように表される。

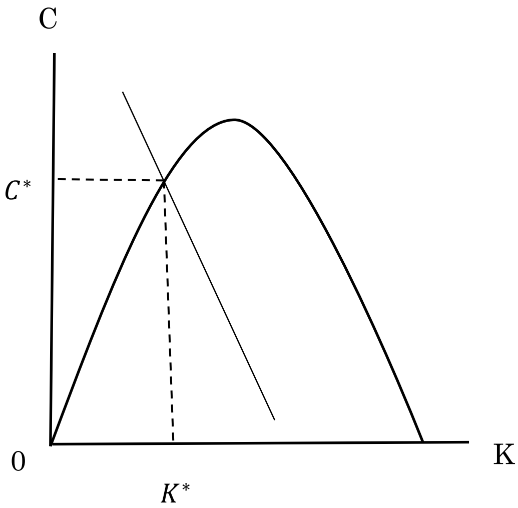

図4_a

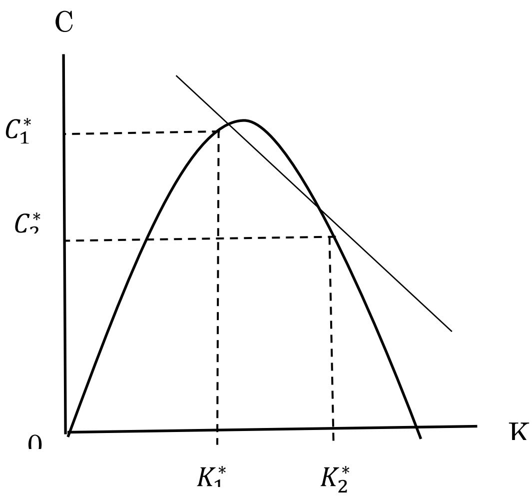

図4_b

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\sigma_C}\left[r - (\delta + \rho)\right] \tag{19}$$

$\dot{C} = 0$ とすると $\mathrm{C} \neq 0$ である限り、r＝δ＋ρ となるので、この関係を満たす資本ストックを資本レンタル料の定義よりK_0 とすると、(19)より$\dot{C} = 0$ 線を図5における右側の直線のように表すことができる。

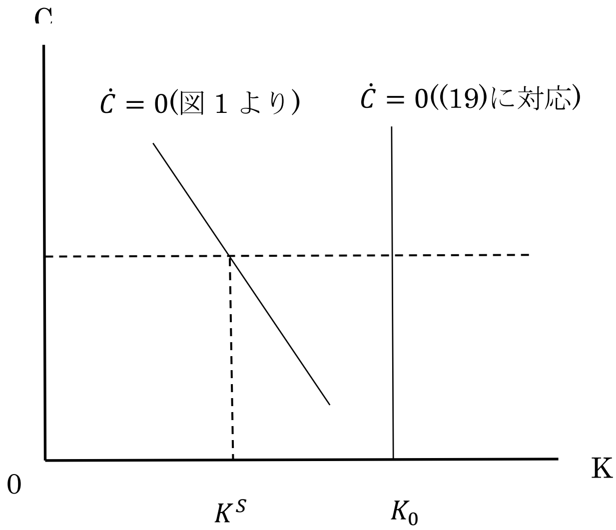

図 5

一方、図 1 において描かれていた $\dot{C}=0$ 線は図 5 における左側の直線であるが、図 5 に示されているように、(19)に対応する $\dot{C}=0$ 線の左側に必ず位置することを確認する。

r＝δ+ρ に対応する K_0 と（14）における $Y_K=\delta+\rho—E_K/E_A$ を満たす資本ストックK^Sを、図 5 のように同じ消費の値 C_0 のところで比較すると、$E_K>0, E_A<0$ より$\delta+\rho<\delta+\rho—E_K/E_A$ となるので、生産関数に関する仮定より $K^S<K_0$ となるが、このことが任意の消費の値に対して成り立つので、図 5 に描かれているように 図 1 における $\dot{C}=0$ 線(図 5 の左側)は、(19)から得られる $\dot{C}=0$ 線(図 5 の右側)の左側に必ず位置することになる。

よって、(19)から得られる $\dot{C}=0$ 線(図 5 の右側)が図 3 の $\dot{K}=0$ 線と交点をもつかぎり、図4_a に表されているように $\dot{C}=0$ 線と $\dot{K}=0$ 線は 1 つの交点をもち、定常解は一意に存在することになる。

4.3.2　定常解の安定性

前項において、定常解の存在性、および、一意性について確認することができたので、次に定常解の安定性について位相図をもちいた分析を進める。そのために、$C(\dot{t})=0$ 線、$K(\dot{t})=0$ 線によって分けられる領域での消費や資本ストックの動きについて分析をおこなう。

まず、図 6 をもちいながら $C(\dot{t})=0$ 線によって分けられる左右の 2 つの領域における消費の動きについて検討する。

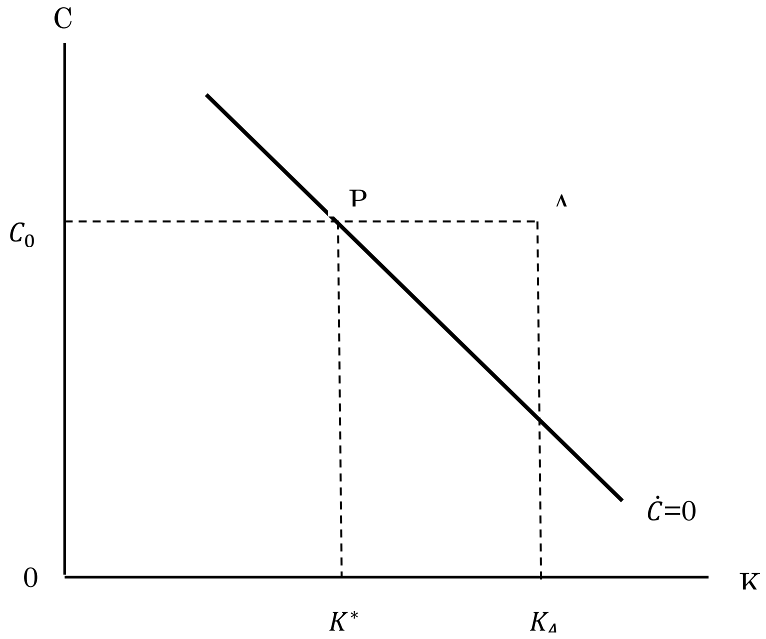

図 6

図 6 において、点 P(K^*, C_0) は$\dot{C(t)} = 0$ 線上にあるので、(13)より

$$\frac{1}{\sigma_C}\left[\frac{\partial Y(K^*)}{\partial K} + \frac{\partial E(K^*, A^*)/\partial K}{\partial E(K^*, A^*)/\partial A} - \delta - \rho\right] C(t) = 0 \qquad (20)$$

が成立している。一方、点 A(K_A, C_0) においては、資本ストックは点 P より多い$(K^* < K_A)$ ので、$\partial Y(K_A)/\partial K < \partial Y(K^*)/\partial K$ の関係が成立している。したがって、次の不等式が成立する。

$$\frac{1}{\sigma_C}\left[\frac{\partial Y(K_A)}{\partial K} + \frac{\partial E(K_A, A)/\partial K}{\partial E(K_A, A)/\partial A} - \delta - \rho\right] C(t) < \frac{1}{\sigma_C}\left[\frac{\partial Y(K^*)}{\partial K} + \frac{\partial E(K^*, A^*)/\partial K}{\partial E(K^*, A^*)/\partial A} - \delta - \rho\right] C(t) \quad (21)$$

(20)より(21)の右辺はゼロとなるので、$K^* < K_A$ の領域では$\dot{C(t)} < 0$ となる。また、逆は逆になるので 2 つの領域における C(t)の動きには図 7 のように表される。

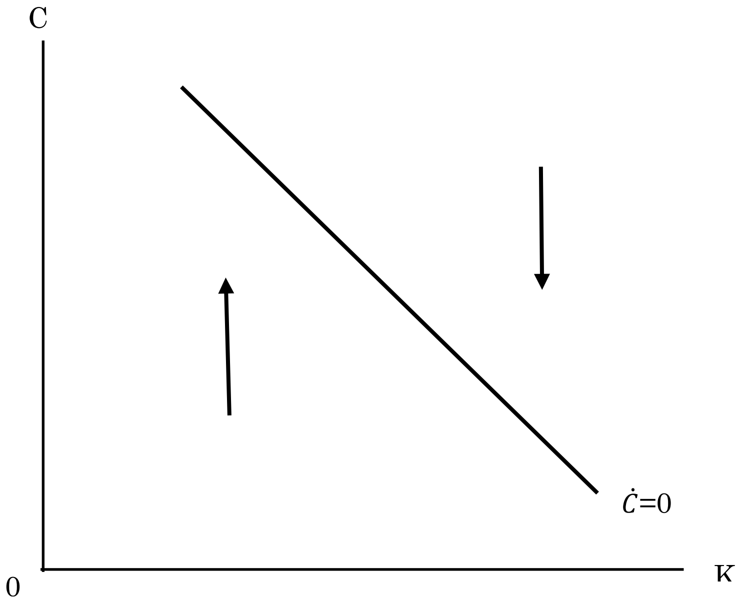

図 7

次に、$K(\dot{t}) = 0$ 線によって分けられる 2 つの領域における資本ストックの動きについて調べよう。

図 8 において、点$Q^*(K_C, C^*)$ は$\dot{K} = 0$ 線上にあるので、(7)より

$$Y(K_C) - C^* - A - \delta K_C = 0 \tag{22}$$

が成立している。一方、点 B(K_C, C_1) においては、消費は点 Q より少ない$(C_B < C^*)$ ので、

$$Y(K_C) - C^* - A - \delta K_C < Y(K_C) - C_B - A - \delta K_C \tag{23}$$

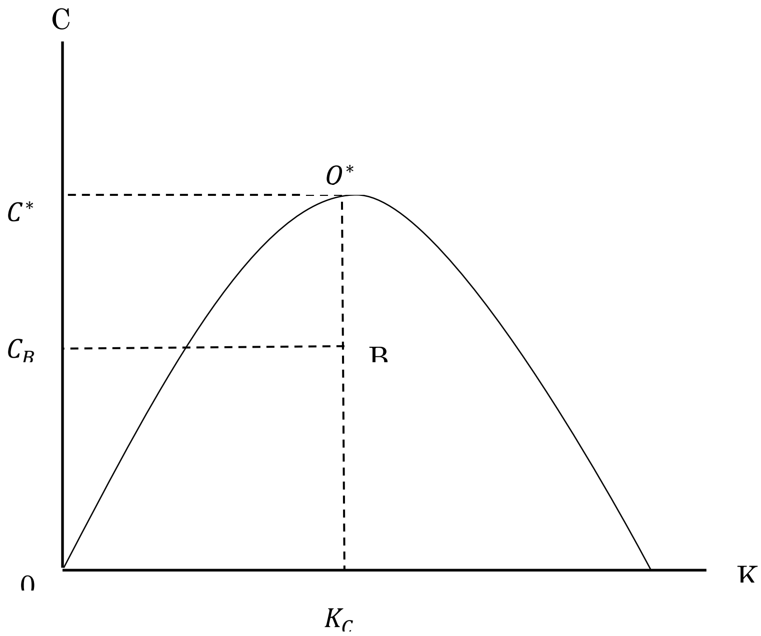

図 8

の関係が成立している。(22)より(23)の左辺はゼロとなるので、$C(t) < C^*$ の領域では$0 < \dot{K}(t)$ となる。また、逆は逆になるので K(t)の動きについては図 9 のように示されることになる。

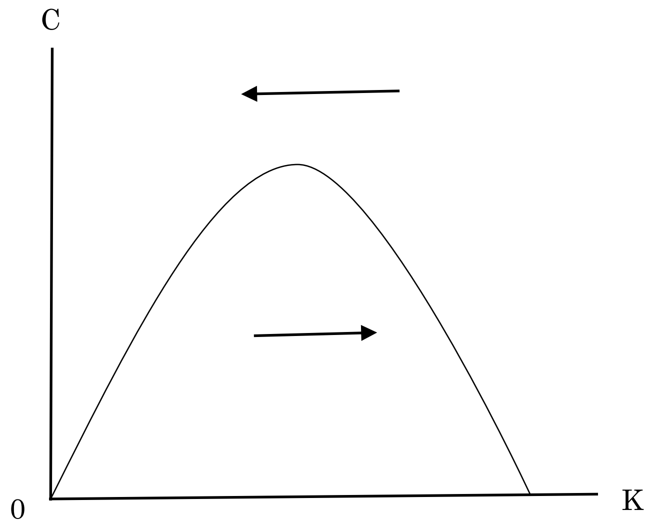

図 9

以上の分析から得られた 2 つの位相図（図 7 および図 9）を 1 つに合わせ、消

費Cの動き、および、資本ストックKの動きを鑑みながら経済成長経路について図示すると、図10のように定常解に収束するサドル・パスが存在することが確認できる。したがって、定常解はサドル・パスの意味で安定的であると考えられる。

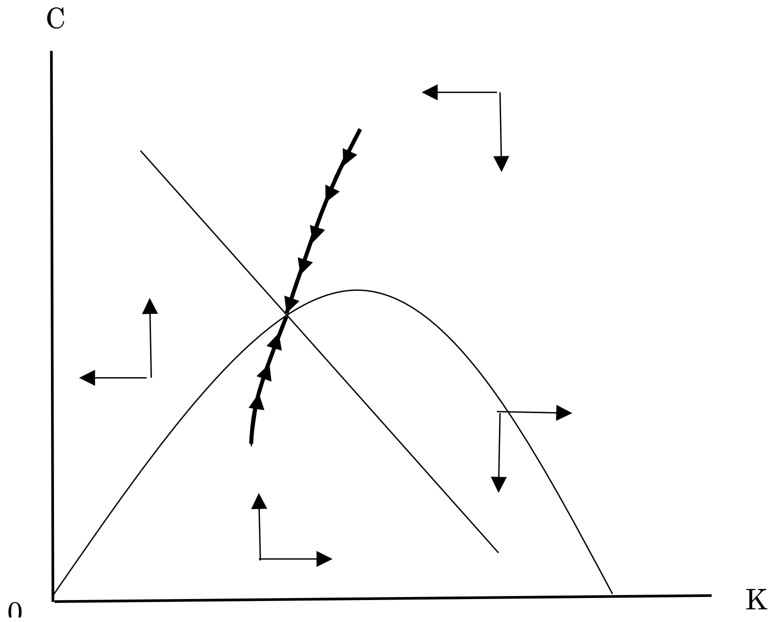

図10

位相図をもちいた分析では定常解はサドルパスの意味で安定的であることが確認できたが、この定常解の安定性について、消費Cと資本ストックKの微分方程式体系である(7)および(13)をそれぞれ線形近似して、固有値を検討する方法で再度確認してみることにする。

(7)および(13)を定常解（K^*, C^*）の近傍で線形近似すると以下のようになる。

$$\dot{K} = [Y_K(K^*) - \delta\,]K - C + B\,; \quad B \equiv Y(K^*) - Y_K(K^*)K^* - A \tag{24}$$

$$\dot{C} = \frac{1}{\sigma_C}\left[Y_{KK}(K^*) + \frac{E_{KK}E_A - E_K E_{AK}}{E_A^2}\right]C^*K + D\ ;$$

$$D \equiv \frac{1}{\sigma_C}\left[Y_{KK}(K^*) + \frac{E_{KK}E_A - E_K E_{AK}}{E_A^2}\right]C^*K^* \tag{25}$$

(24)、(25)よりヤコビ行列 J が以下のように表される。

$$J=\begin{bmatrix} Y_K(K^*)-\delta & -1 \\ \dfrac{1}{\sigma_C}\left[Y_{KK}(K^*)+\dfrac{E_{KK}E_A-E_K E_{AK}}{E_A^2}\right]C^* & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

(26)より $|J|=\frac{1}{\sigma_C}\left[Y_{KK}(K^*)+\frac{E_{KK}E_A-E_K E_{AK}}{E_A^2}\right]C^*<0$ となるが、これは 2 つの固有値が異符号をもつことを意味するので、図 10 で示されているように定常解は鞍点になっていることが確認できる。

4.4　市場経済における成長経路

前節では、社会的に最適な経済成長経路について分析を進めるために、経済の構造を知っている社会計画者の存在を前提として、この社会計画者がすべての資源配分を決定することを想定して分析をおこなった。この節では、家計、企業、および、政府から構成される分権化された市場経済を想定しながら、市場経済における経済成長経路について分析を進める。

そこで、まず家計、企業のそれぞれの主体的均衡条件を導出し、市場均衡条件について考察をおこなった後、市場経済における経済成長経路について分析を進めることにする。

企業は、家計が供給する資本ストックを生産要素としてもちいながら生産活動をおこなうが、その生産過程においてフローとしての環境汚染物質が排出されるため、政府によって環境税が課されるとする。

政府は、環境税による税収を一括補助金として家計に給付する。家計は、利子収入、利潤配当、および、政府からの補助金によって消費をおこない、消費しなかった部分を資本蓄積に充てる。ここでは、企業は家計によって所有され、企業の利潤は家計に還元されるものとする。

4.4.1　家計の主体的均衡条件

まず、家計の主体的均衡条件について考察しよう。資本のレンタル料を

r(t)、企業の利潤をΠ(t)、政府からの補助金をT(t) の記号をもちいてそれぞれ表すと、家計の予算制約式は以下のようになる。

$$\dot{K}(t) = \Pi(t) + [r(t) - \delta]K(t) + T(t) - C(t) \tag{27}$$

家計は、(27) の制約のもとで効用の割引現在価値 (8) を最大にするように消費の時間経路を決定する。この動学的最適化問題を (13) を求めたときと同様の方法で解くと、消費の変化率に関する以下の関係式を得る。

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\sigma_C}[r - (\delta + \rho)] \tag{28}$$

4.4.2　企業の主体的均衡条件

次に、企業の主体的均衡条件について検討する。企業は、各期において利潤を最大化するように、資本K、汚染防止活動の水準Aをそれぞれ決定する。環境税率を τ_E で表すと、企業の利潤は以下のように表される。

$$\Pi = Y(K) - rK - \tau_E E(K, A) - A \tag{29}$$

(29)を最大にするようにK、Aの水準をそれぞれ選択すると、利潤最大条件は以下のように求められる。

$$Y_K = r + \tau_E E_K, \tag{30a}$$

$$-\tau_E E_A = 1 \tag{30b}$$

(30a) は資本の限界生産力がそのレンタル料と税負担の合計と等しいことを、(30b) は汚染防止活動の限界収入はその限界費用に等しいことを、それぞれ表している

4.4.3　市場均衡条件

以上の準備をもとにして市場均衡について考察を進める。そのために、生産

された財の市場、および、資本市場におけるそれぞれの市場需要関数と市場供給関数について検討をおこなわなければならないが、ここでワルラス法則について確認しよう。家計の予算制約（27）に（29）、および、政府の予算制約 $T = \tau_E E$ を代入して整理すると以下のようになる。

$$\left[\left(C + \dot{K} + \delta K + A\right) - Y\right] + r[K^d - K^S] = 0 \qquad (31)$$

K^d は資本への需要、K^S は資本の供給をそれぞれ表している。(31）は各市場における超過需要の合計が恒等的にゼロになることを示しているので、たとえば資本市場が均衡していれば財市場も均衡していることになる。

そこで、資本市場の均衡について検討することにする。利潤最大化条件(30a)、(30b）より、企業は r、τ_E を所与として資本 K への需要関数 $K^d(r, \tau_E)$、および、汚染防止支出 $A(r, \tau_E)$ をそれぞれ決定する。

以上のことから、資本市場の均衡条件は以下のようになる。

$$K^d(r, \tau_E) = K^S \qquad (32)$$

(32)より明らかなように、資本市場の均衡によって資本のレンタル率 r は、ストック変数（K）、および、政策変数（τ_E）によって決定される。さらに、(27)よりストック変数(K)も政策変数（τ_E）に依存しているので、市場経済の均衡成長経路は政策変数に依存していることになる。

4.4.4　市場経済における成長経路の定常解の存在と一意性

(27)と(28)をもちいて、まず定常状態について考察をおこなう。(28)より消費の変化が止まる（$\dot{C} = 0$となる）のは、以下の関係式が成立するときである。

$$\frac{1}{\sigma_C}[r - (\delta + \rho)]C(t) = 0 \qquad (33)$$

$C(t) \neq 0$ である限りは $C(t)$ の水準に関係なく、

$$r = \delta + \rho \tag{34}$$

が成立すれば $\dot{C}(t) = 0$ となる。$\mathrm{r} = \partial Y/\partial K$ なので、（34）を満たすK_0 は図 5 の右側に描かれた $\dot{C}(t) = 0$ 線の横軸上の切片であり、$\dot{C}(t) = 0$ 線は図 5 の右側に描かれているものと同じになる。

次に $\dot{K} = 0$ 線について検討しよう。(27)より資本ストックの変化が止まる（$\dot{K} = 0$となる）のは、以下の関係式が成立するときである。

$$C(t) = \Pi(t) + [r(t) - \delta]K(t) + T(t) \tag{34}$$

(34)をもとにして図 9 を描いたときと同様の分析をおこなうと図 9 と同様の図が得られることになる。図 5 の右側の$\dot{C}(t) = 0$ 線と図 9 と同様の図を組み合わせることによって、図 11 のような位相図が得られる。

また、図 10 によって存在性が示されている定常解の安定性をヤコビ行列によって検討した方法と同様の方法によって、図 11 における定常解が鞍点であることも確認することができる。

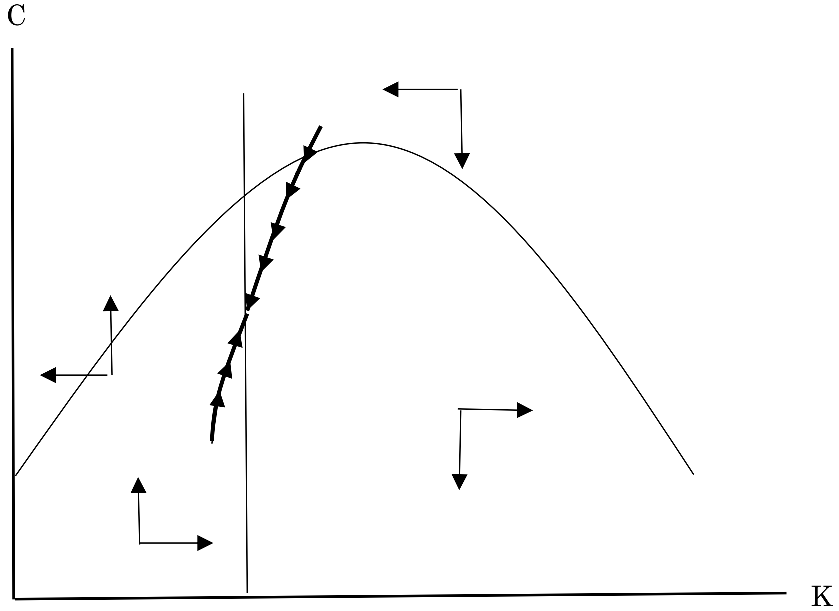

図 11

4.5　成長経路の比較

この節では、図 10 と図 11 を比較することで、社会的に最適な経済成長経路と市場経済における成長経路を比較し、併せて環境への影響についても比較することにする。

図 5 による分析から社会的な最適経路を考察する場合、および、市場経済を考察する場合の$\dot{C(t)} = 0$ 線の位置関係については確認できているので、2 つの場合の $\dot{K} = 0$ 線の位置関係がどのようになっているかについて考察を進める。

(18)より、社会的な最適経路を検討する場合に $\dot{K} = 0$ とおくと $C = Y - A - \delta K$ となるが、(27)より市場経済を検討する場合に $\dot{K} = 0$ とおくと $\mathrm{C} = \Pi(t) + [r(t) - \delta]K(t) + T(t)$ となる。両者を比較すると、任意の資本ストックの値に対して市場経済における C の方が大きいことが確認できるので、2 つの $\dot{K} = 0$ 線の位置関係は図 12 のように表される。

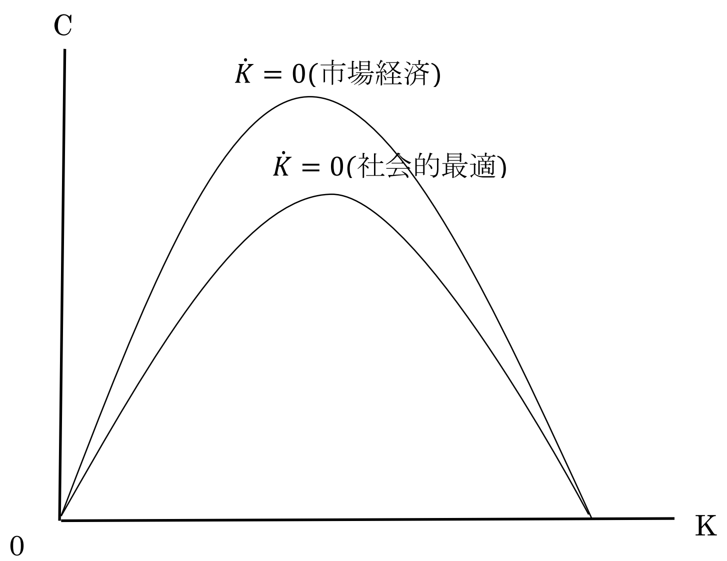

図 12

図 12 に図 5 の 2 つの $\dot{C(t)} = 0$ 線を書き込むと、それぞれの場合の定常解の位置関係が図 13 のように表される。

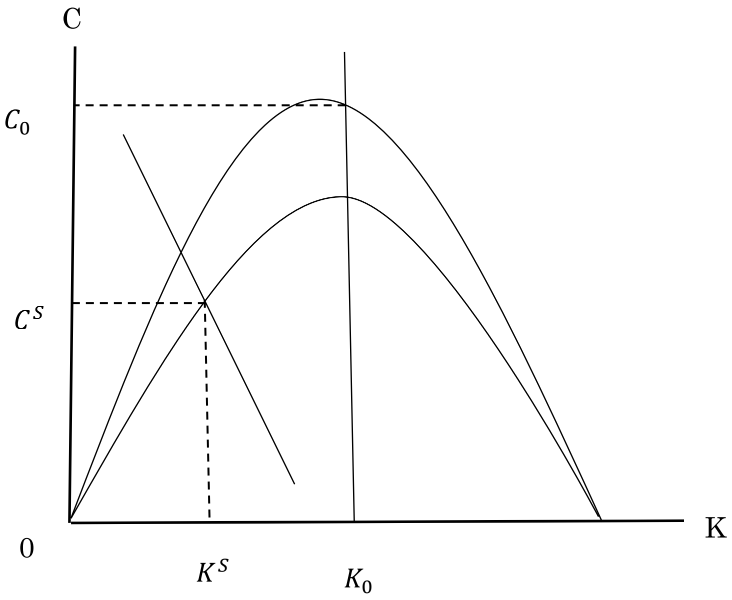

図 13

図 13 より明らかなように、社会的に最適な成長経路における定常解((K^S, C^S))と市場経済における成長経路の定常解((K_0, C_0))を比較すると、定常状態での市場経済における資本ストック、および、消費の方が社会的に最適な成長経路における資本ストック、および、消費よりも大きくなっている。これは、社会的に最適な状態と比較した場合、市場経済では大量生産と大量消費がおこなわれていることになり、その結果、フローの環境汚染も社会的に最適な状態と比較すると市場経済においてより多く発生していることになる。図 13 には、環境汚染が正しく内部化されていない市場経済の弊害が表されているのである。

4.6　おわりに

本章においては、Forster (1973)、Gruver (1976)、van der Ploeg and Withagen(1991)、Gradus and Smulders(1993)、Xepapadeas(2005) などを参照しながら、最適経済成長モデルにフローの環境汚染を導入したモデルについて詳細に検討をおこない、そのモデルをもちいて社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路についてそれぞれ分析をおこなった。そして、そ

れぞれの成長経路における定常解の存在と一意性、および、安定性について確認し、成長経路はサドルパスになっており、定常解は鞍点になっていることを確認した。さらに、2 つの定常解を比較することで、市場経済では社会的に最適な成長経路と比較して大量生産、および、大量消費がおこなわれており、フローの環境汚染が正しく内部化されていないことも確認した。

しかしながら、本稿におけるモデルは、位相図をもちいた分析をおこなうために、環境汚染をフローの環境汚染に限定して分析をおこなっているが、ストックの環境汚染をモデルに導入して分析をおこなうことは早急な課題である。ストックの環境汚染を導入した場合、成長経路の挙動を表す微分方程式が 3 本になり、位相図をもちいた分析が難しくなるため連立微分方程式に関する分析が必要となる。

また、最適経済成長モデルでは、無限時間視野をもった家計が想定されているが、たとえば、John and Pecchenino (1994) や Marini and Scaramozzino (1995) において分析にもちいられているような、家計の有限性を想定した世代重複モデルによって同様の分析

をおこなうことも必要である。さらに、たとえば、Smulders (1999) や Jones and Manuelli (2001) において分析にもちいられているような、いわゆる内生的経済成長モデルによって同様の分析を試みることも課題である。

第５章　内生的経済成長と環境汚染

－Barro(1990)型モデルによる分析－

5.1 はじめに

本章においては、Barro(1990)型の内生的経済成長モデルに汚染ストックを導入したモデルについて詳細に検討をおこない、そのモデルをもちいて経済成長経路について分析をおこなう。そして、その分析をもとにして環境問題へも言及する。

本章では、Barro(1990)、Barro and　Sala-i-Martin (2003)、Xepapadeas (2005) などを参照しながら、内生的経済成長モデルに汚染ストックを挿入し、位相図をもちいた分析を中心に、定常状態の存在と一意性の問題、および、定常状態への収束の問題についてそれぞれ検討をおこなっている。さらに、汚染ストックと経済厚生の関連についても言及している。

　本章は以下のように構成されている。第 2 節においては、Barro(1990)、Barro and　Sala-i-Martin (2003)、Xepapadeas (2005) などを参照しながら、汚染ストックを導入した内生的経済成長モデルの基本的な枠組みを詳細に検討する。第 3 節においては、成長経路の分析を、定常状態の存在と一意性、および、安定性の問題を中心にそれぞれおこなう。第 4 節においては、汚染ストックと経済厚生の関連性について考察している。第 6 節においては、今後の研究の方向性について言及する。

5.2　モデル

この節では、本章における分析にもちいられる環境を導入した内生的経済成長モデルについて詳細に検討する。経済には、経済主体として家計、企業、および政府が存在している。人口は一定と仮定し、労働供給は非弾力的におこなわれると仮定する。そして、その規模も１に規準化する。以下、家計による消費、企業による生産、生産活動による汚染について詳細に検討していく。

5.2.1　家計の消費行動

　消費者の効用水準は、消費水準 c(t)から得られる効用、および、ストック汚染 P(t)による不効用によって決定されるとする。そして、効用関数 u(t) を以下のように特定化する。

$$u(t) = \mathrm{u}\big(\mathrm{c(t)}, \mathrm{P(t)}\big) = \ln \mathrm{c(t)} - \eta \ln \mathrm{P(t)} \qquad (1)$$

また、消費者の予算制約は以下のようになる。

$$\dot{K}(t) = Y(t) - c(t) - T(t) \qquad (2)$$

ここで、K(t)は資本ストック、Y(t)は生産量、T(t)は所得税を表している。

5.2.2 生産関数

　生産活動は、(3)の生産関数にしたがって、資本ストック K と公共資本 G によっておこなわれるものとする。また、A は全要素生産性を表しており、定数であるとする。資本ストック K には物的資本の他に知識資本や人的資本も含まれているとする。労働 L は人口の一定割合であり、人口は成長しないものとする。公共資本は生産に関連した社会的基盤を表しており、道路、電力網、港湾などが想定されている。(3) において重要なことは、生産がおこなわれる際に公共資本が正の外部性を与えていることである。

$$Y(t) = F\big(K(t), G(t)\big) = AK(t)^{\alpha} G(t)^{1-\alpha} \qquad (3)$$

なお、後述するが、公共資本投資のための政府の予算制約を考慮すると、(3) の生産関数はいわゆる AK モデル型の生産関数になっているので、本章におけるモデルは、Barro(1990)型の内生的経済成長モデルになっている。

5.2.3 汚染ストックの蓄積

　生産関数 (1) による生産活動によって汚染が排出されると仮定し、汚染スト

ックを P で表すことにする。汚染排出は生産に投入される資本ストック K が大きいほど多くなると仮定する。その一方で、汚染排出を抑制・削減するために政府による汚染除去活動がおこなわれると想定し、その規模を M(t)で表すことにする。

$$\dot{P}(t) = \dot{P}(K(t), M(t)) = A_P K(t)^{\beta} M(t)^{-\gamma} \qquad (4)$$

（3）は生産活動の規模が拡大すると汚染ストックの増加分に正の効果があり、汚染除去活動の規模が拡大すると汚染ストックの増加分に負の効果があることを示している。

5.2.4　政府

政府は、所得税によって家計から税収を得て、その財源を均衡予算のもとで公共資本の整備と汚染除去活動をおこなうものとする。さらに、分析の簡単化のために、2 つの政府活動への財源の配分比率は時間を通じて一定であるとする。

$$T(t) = \tau Y(t) \qquad (5)$$

$$G(t) = \theta \tau Y(t) \qquad (6)$$

$$M(t) = (1-\theta)\tau Y(t) \qquad (7)$$

ここで、$\tau\ (0 \le \tau \le 1)$は所得税率を表しており、$\theta(0 \le \theta \le 1)$は公共資本に対する配分比率を表している。そして、それぞれの率は時間を通じて一定であるとする。

5.3　最適成長経路

この節では、前節で紹介したモデルをもちいながら最適な経済成長経路について検討をおこなう。

3.1　動学的最適化の条件

家計の消費活動として、予算制約のもとで無限期間にわたる生涯効用を最大化することを想定する。なお、以下の展開においては、カッコ書きによる時間の表示（(t)）を省略する。

$$\max \qquad \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t}(\ln c - \eta \ln P)\, dt \qquad (8)$$

$$\text{s.t.} \qquad \dot{K}(t) = (1-\tau)AK^{\alpha}G^{1-\alpha} - c \qquad (9)$$

予算制約(9)については、(2)に(3)と(6)を代入して整理したものである。$\rho > 0$ は時間選好率を表しており、ρ の値が大きくなるほど将来の効用は低く評価されることになる。

この最大化問題において、家計は公共資本の流列$\{G(t)\}_0^{\infty}$を所与として、予算制約を考慮しながら、生涯効用(7)の最大化を図る。

この動学的最適化問題の制御変数は c であり、状態変数は K であるが、この問題はポントリアーギンの最大値原理をもちいて解くことができる。そのために経常価値ハミルトニアン$\mathcal{H}$を次のように定義する。

$$\mathcal{H} \equiv \ln c - \eta \ln P + \lambda[(1-\tau)AK^{\alpha}G^{1-\alpha} - c] \qquad (10)$$

λ は状態変数 K に対応する共状態変数であり、資本ストック変数のシャドープライスを表している。

最適な経済成長経路となるための必要条件は、最大値原理を適用することによって以下のように求められる。

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = \frac{1}{c} - \lambda = 0, \qquad (11)$$

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \rho\lambda - \alpha(1-\tau)AK^{\alpha-1}G^{1-\alpha}\lambda. \qquad (12)$$

（11）、（12）の 2 本の式は、制御変数がハミルトニアンを最大化するように選択されていることを表している。（12）はオイラー方程式とよばれ、資本ストック変数の変化が効用に及ぼす影響を調整するようにシャドープライスが時間を通じて変化していくことを表している。

なお、$\mathcal{H}$ が制御変数と状態変数について凹関数であるならば、（11）、（12）、および、以下の横断性条件が最適化のための必要十分条件となる。

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)\,K(t) = 0, \tag{13}$$

横断性条件は、ストック変数の現在価値が最終時点、つまりは無限の将来においてゼロになることを表している。

(11)、(12)より消費の成長率が以下のように計算される。

$$\frac{\dot{c}}{c} = \alpha(1-\tau)AK^{\alpha-1}G^{1-\alpha} - \rho \tag{14}$$

さらに、(3)と(6)から$(G/K)^{\alpha} = \theta\tau A$という関係式が成立するので、この関係式を(12)へ代入すると以下のように整理される。

$$\frac{\dot{c}}{c} = \alpha(1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho \tag{15}$$

(13)は、最適成長経路においては消費の成長率が一定であることが示されている。ここでは、消費の成長率が正であることを想定するために、以下の仮定を導入する。

仮定：$\alpha(1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} > \rho$ (16)

次に、資本ストックの成長率についても、(9)と(15)より、以下のように表される。

$$\frac{\dot{K}}{K} = (1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{c}{K} \tag{17}$$

さらに、(4)、(7)、(15)より汚染ストックの成長率が以下のように表される。

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{A_P K^{\beta-\gamma}[(1-\theta)\tau A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}]^{-\gamma}}{P} \tag{18}$$

最適経済成長経路を決定する動学方程式が導出されたので、次に、これらの方程式にもとづいて移行動学に関する分析をおこなう。

5.3.2　移行動学の分析

この節では、最適成長経路の移行過程について分析をおこなう。消費ｃと資本ストックＫに関する動学方程式にもとづいて（ｃ,Ｋ）平面に位相図を描くことによる動学分析を行うことが常套手段であるが、(13)および(14)より消費は永久に増加し続けることになるので、消費と資本ストックによって位相図を描く分析は、ここでは適切ではないと思われる。

そこで、持続状態において一定となるような変数への変換をおこなうことによって分析を進めることにする。ここでは、資本ストックを基準として、以下のような新しい変数を導入する。

$$x = \frac{P^{\frac{1}{\beta-1}}}{K} \quad , \qquad y = \frac{c}{K} \tag{19}$$

資本ストック K と汚染ストック P は状態変数であるので、ｘは資本ストックによって基準化された状態変数となる、また、ｃは制御変数であるので、ｙは資本ストックによって基準化された制御変数になる。

新しく導入した(19)における 2 つの変数の自然対数をとって微分し、(15)、(17)、(18)をもちいて整理すると、それぞれの変数の変化率が以下のように表される。

$$\frac{\dot{x}}{x}=\frac{1}{\beta-\gamma}x^{\gamma-\beta}A_P[(1-\theta)\tau A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}]^{-\gamma}-(1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+y \qquad (20)$$

$$\frac{\dot{y}}{y}=-(1-\alpha)(1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-\rho+y \qquad (21)$$

5.3.3　定常状態の存在と一意性

この節では、(20)と(21)をもちいて定常状態の存在と一意性について分析を進める。まず定常状態の存在性について分析を進めるが、(21)より$\dot{y}=0$ とおくと、y の定常状態における値 y*が以下のようになる。

$$y^*=(1-\alpha)(1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+\rho \qquad (22)$$

(20)において$\dot{x}=0$ とおき、x の定常状態における値を x*とおいた式に(22)を代入して整理する。

$$(x^*)^{\beta-\gamma}=\frac{1}{\beta-\gamma}\frac{A_P[(1-\theta)\tau A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}]^{-\gamma}}{\alpha(1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-\rho} \qquad (23)$$

ここで、$\beta>\gamma$ を新たに仮定すると、(15)に関する仮定と併せて(23)の値は正となる。以下の分析においても $\beta>\gamma$ の仮定を維持する。

(19)における変数 y の定義より、定常状態$\dot{y}=0$において消費と資本ストックの成長率は等しく、以下の値となる。

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^*=\left(\frac{\dot{K}}{K}\right)^*=\alpha(1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-\rho \qquad (24)$$

また、(19)における変数 x の定義より、定常状態$\dot{x}=0$において汚染ストックの成長率は以下の値となる。

$$\left(\frac{\dot{P}}{P}\right)^{*} = (\beta-\gamma)\left[\alpha(1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho\right] \tag{25}$$

ここから、(20)、(21)をもとにして $\dot{x}=0$ および $\dot{y}=0$ の状態を表した $\dot{x}=0$ 線、および、$\dot{y}=0$線について考察を進め、位相図をもちいながら定常状態の存在と一意性について検討をおこなう。

まず、(20)より$\dot{x}=0$ 線は以下のように表される。

$$y = \frac{1}{\beta-\gamma}x^{\gamma-\beta}A_P\left[(1-\theta)\tau A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]^{-\gamma} - (1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \tag{26}$$

(26)より$\frac{dy}{dx}|_{\dot{x}=0} = x^{\gamma-\beta-1}A_P\left[(1-\theta)\tau A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]^{-\gamma} > 0$ となるので、$\dot{x}=0$ 線は図 1 のように正の傾きをもつことになる。

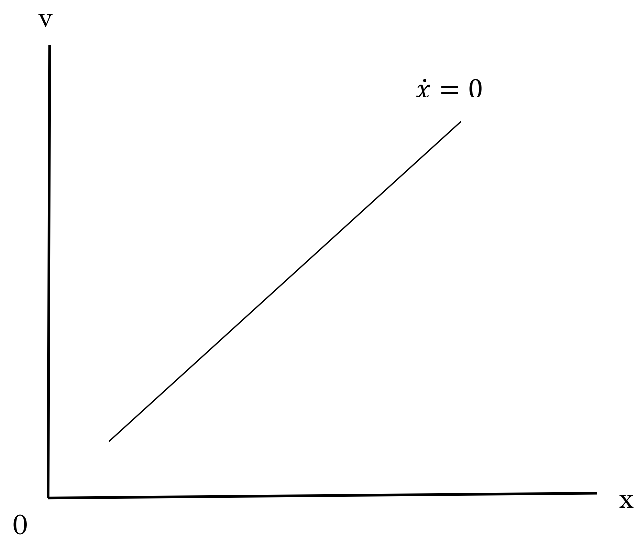

図 1

次に、(21)をもちいて $\dot{y}=0$ を表すグラフ（$\dot{y}=0$ 線）についても、同様の考察を進める。(21)より$\dot{y}=0$ 線は以下のように表される。

$$y = (1-\alpha)(1-\tau)A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \rho > 0 \tag{27}$$

(27)よりｙの値が定数となるので、$\dot{y} = 0$ 線は図２のような水平な直線になる。

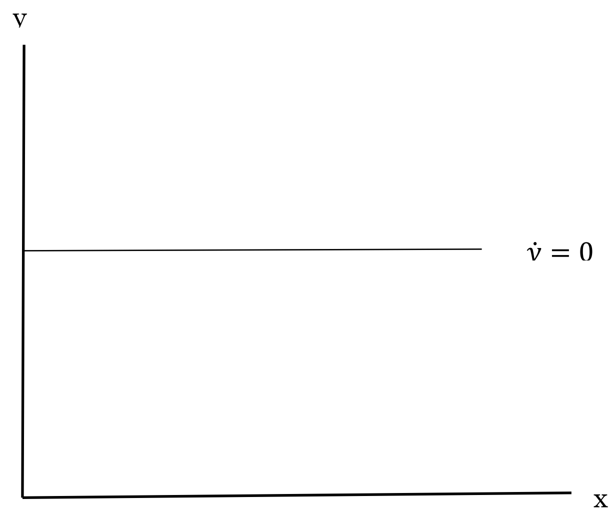

図２

図１および図２より、$\dot{x} = 0$ 線と$\dot{y} = 0$ 線は図３のように１つの交点をもつことになるので、定常状態が一意に存在することが確認できる。

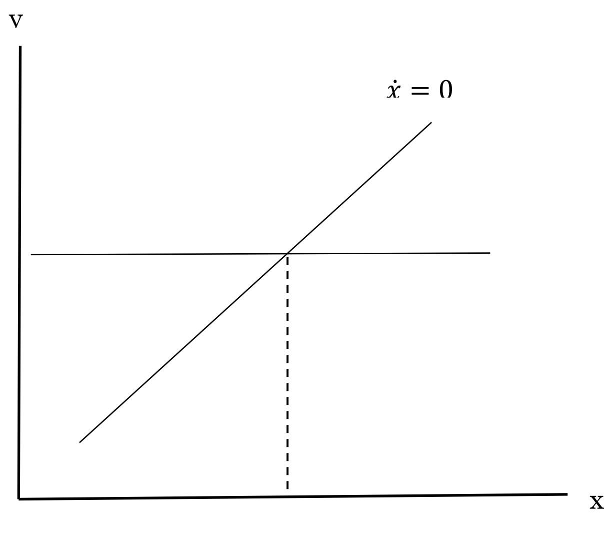

図３

5.3.4　定常状態の安定性

前項において、定常状態の存在と一意性について確認することができたので、次に定常状態の安定性について位相図をもちいた分析を進める。そのために、$\dot{x}=0$ 線、$\dot{y}=0$ 線によって分けられる領域での変数 x、および、変数 y の動きについて分析をおこなう。

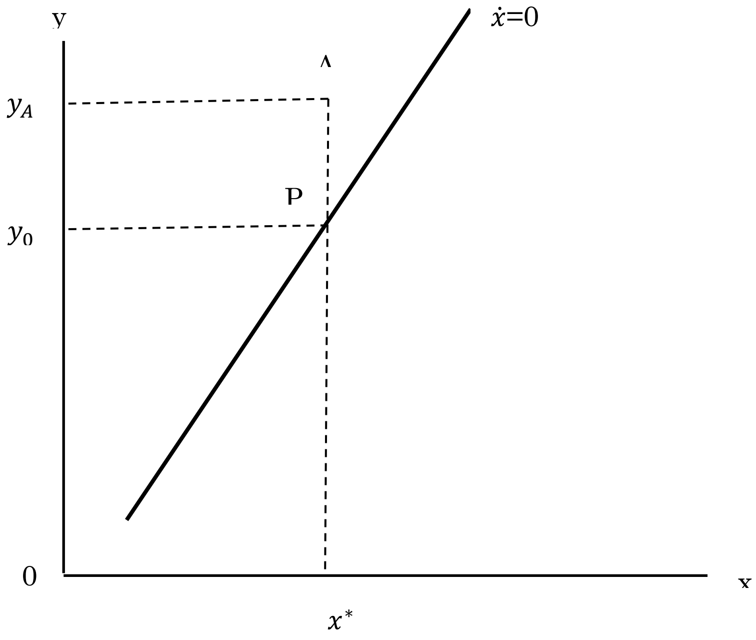

図 4

まず、図 4 をもちいながら $\dot{x}=0$ 線によって分けられる左右の 2 つの領域における X の動きについて確認する。x^*を固定して y の値をたとえばy_Aに増加させると、(20)より$\dot{x}>0$ となる。また、逆は逆になるので 2 つの領域における x の動きには図 5 のように表される。

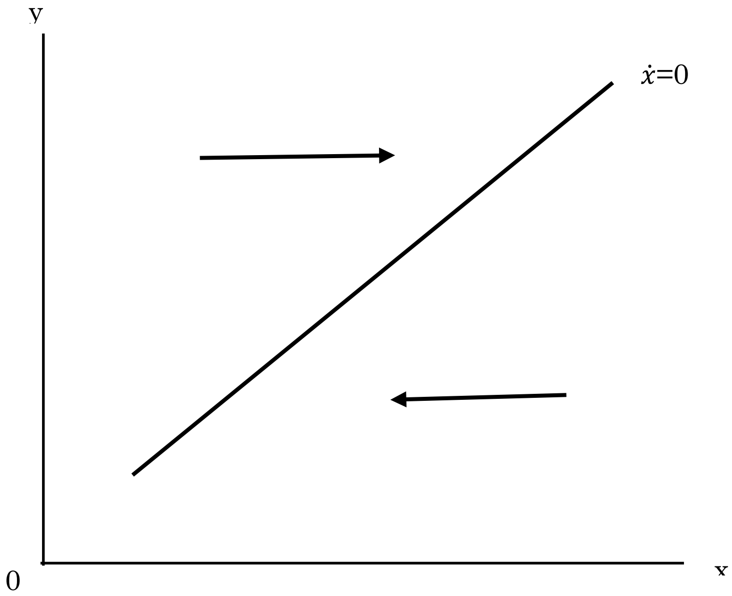

図 5

次に、$\dot{y} = 0$ 線によって分けられる２つの領域における変数ｙの動きについて調べよう。(21)より、ｙの値がy^*より大きくなると$\dot{y} > 0$ となり、逆は逆になるので２つの領域におけるｙの動きには図６のように表される。

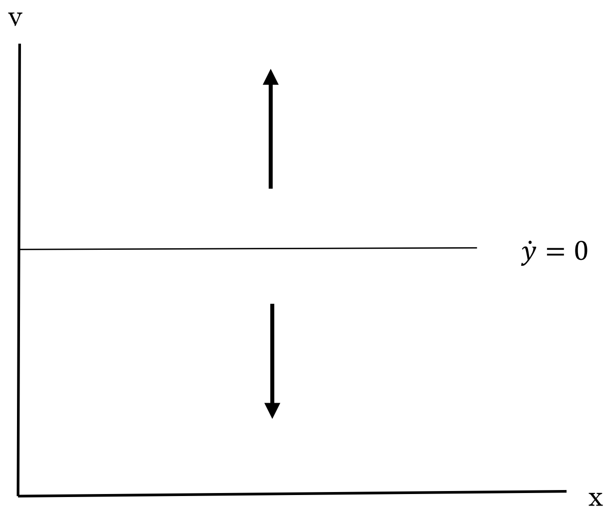

図 6

以上の分析から得られた２つの位相図（図５および図６）を１つに合わせ、変数ｘの動き、および、変数 ｙ の動きを鑑みながら経済成長経路について図示す

ると、図 7 のように定常状態に収束するサドル・パスが存在することが確認できる。したがって、定常状態はサドル・パスの意味で安定的であると考えられる。

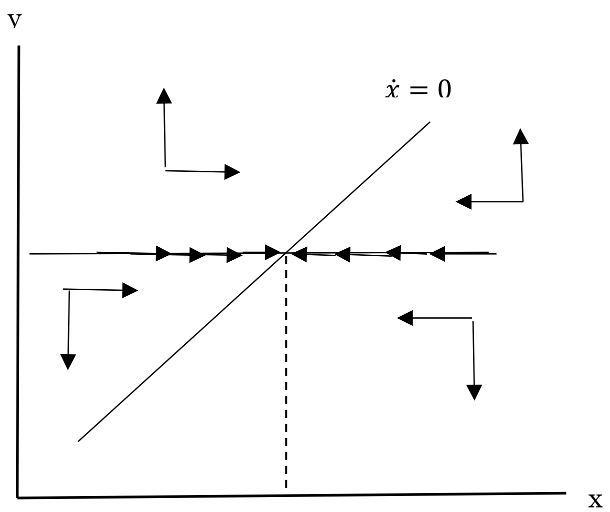

図 7

位相図をもちいた分析では定常状態はサドルパスの意味で安定的であることが確認できたが、この定常解の安定性について、変数 x と変数 y の微分方程式体系である(7)および(13)をそれぞれ線形近似して、固有値を検討する方法で再度確認してみることにする。

(20)および(21)を定常状態 (x^{*}, y^{*}) の近傍で線形近似すると、ヤコビ行列 J が以下のように表される。

$$J = \begin{bmatrix} -x^{\gamma-\beta} A_P [(1-\theta)\tau A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}]^{-\gamma} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

(28)より $|J| = -x^{\gamma-\beta} A_P [(1-\theta)\tau A(\theta\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}]^{-\gamma} < 0$ となるが、これは 2 つの固有値が異符号をもつことを意味するので、図 7 に示されているように定常状態は鞍点になっていることが確認できる。

5.4　汚染ストックと経済厚生

前節までの分析において、Barro(1990)型の内生的経済成長モデルに環境汚染を導入したモデルによる動学分析をおこない、定常状態はサドルパスの意味で安定的であることを確認した。この動学分析により(19)において定義した変数ｘ、および、ｙは定常状態に向かって収束するため、資本ストックによって基準化された汚染ストックも定常状態における定常値に向かって収束していくことになる。

そのため、汚染ストックを消去する方向性をもった分析が難しくなるため、経済厚生の側面から分析を進めることが必要になってくる。家計の予算制約(2)には所得税が入っているが、政府は所得税による財源をもとにして汚染除去活動をおこない、また一方で、公共資本を使って生産活動に外部性を与えている。

政府のこのような活動は、効用関数(1)を通して家計の経済厚生に影響を与えることができるので、汚染ストックは定常状態に向かって収束していくが、政府活動と経済厚生の関連性に関する分析を進めることで、さらなる分析が可能となる。そして、汚染ストックの消去は難しいが、政府による活動によって経済成長経路上において経済厚生を改善していくことが可能となるであろう。

5.5　おわりに

本章においては、Barro(1990)、Barro and Sala-i-Martin (2003)、Xepapadeas (2005) などを参照しながら、内生的経済成長モデルに汚染ストックを挿入し、位相図をもちいた分析を中心に、定常状態の存在と一意性の問題、および、定常状態への収束の問題についてそれぞれ検討をおこなった。そして、経済成長経路は定常状態に向かってサドルパスの意味で安定的に収束することを確認した。

分析の結果、経済成長経路上において資本ストックによって基準化された汚染ストックも、また定常状態における定常値に向かって収束していくことになるため、汚染ストックを除去する方向性での分析が難しくなるため、経済厚生の側面から分析を進めることが必要になってくることにも言及した。

政府による活動によって効用関数を通して経済厚生に影響を与えることを想定し、汚染ストックは定常状態に向かって収束していくが、政府活動と経済厚生の関連性に関する分析を進めることで、さらなる分析が可能となることが考えられる。そして、汚染ストックの除去は難しいが、政府による活動によって経済成長経路上において経済厚生を改善していくことに関する分析が今後の課題である。

第６章　おわりに

本論文では、経済成長によって引き起こされる環境問題と経済成長をどのように両立させながら経済を持続的に発展させていくことができるか、ということを基本的な問題意識としながら、経済成長と環境保全を両立させるような持続的な経済発展について考察を進めた。考察を進めていくためには環境問題を明示的に取り入れた経済成長モデルをもちいた分析を行わなければならないため、Solow(1956)をはじめとする新古典派経済成長モデル、Ramsey (1928) を開祖とし、Cass (1965) や Koopmans (1965) らによって基礎付けがおこなわれた最適経済成長モデル、Romer(1986)、Barro(1990)、Lucas(1988)、Romer(1990)、Grossman and Helpman(1991)、および、 Aghion and Howitt(1992)などによって、いくつかのバリエーションをもちながら発展していった内生的経済成長モデルをそれぞれもちいた分析を行った。

経済成長理論の発展と併行して 1970 年代ころから環境汚染問題が経済成長理論に導入されはじめたが、環境汚染問題については最適経済成長理論の研究成果を適用する形で、環境汚染を最適に制御しつつ経済が成長するための条件について研究が進められてきている。持続的な発展のために経済成長と環境保全を両立することを目的として研究が進められてきているが、内生的経済成長理論の発展によって持続的成長を実現するためのメカニズムや環境政策が経済成長率に与える影響などの分析が可能になってきている。

本論文では、これらの研究成果を参照しながら環境問題を含んだ経済成長経路の分析、定常状態における資本ストックと環境汚染ストックの分析、環境汚染が経済成長率におよぼす影響などについて分析を行った。第２章では、ソローモデルに環境汚染ストックを導入したモデルをもちいて、資本ストックと環境汚染ストックの関係、経済成長率と環境汚染の関係、資本蓄積が環境汚染におよぼす影響などについて分析を行った。第３章では、最適経済成長モデルに環境汚染問題、資源問題を導入したモデルの基本的枠組みについて詳細に検討を行った。そして、社会的に最適な成長経路、市場経済における成長経路の比較を行い、2 つの経路を一致させる政策についても検討を行った。第４章では、最適経済成長モデルにフローの環境汚染を導入したモデルの分析を行い、

社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路について、それぞれの経路の定常解の存在と一意性、定常解への収束の問題などの分析を、位相図をもちいた動学分析によって行った。さらに2つの成長経路の比較も行った。第5章では、まず、内生的経済成長モデルに関する先行研究を概観して内生的経済成長モデルの枠組みを確認し、その後、第3章の分析にもちいた最適経済成長モデルを内生的経済成長モデルに読み替えて、均斉成長経路が実現するための条件について検討を行った。そして、生産関数や効用関数を特定化して長期的な成長率に関する分析を行った。さらに、汚染防止支出と長期的な成長率の関係についても分析を行った。

今後の研究課題としては、以下のようなことが残されている。第2章においては、ソローモデルに環境汚染を導入して分析を行ったが、さらに資源問題を導入することができるかどうかを検討することは課題として残されていると考えられる。また、第4章においては、最適経済成長モデルにフローの環境汚染を導入して動学分析を行ったが、環境汚染ストックを分析に導入することは重要な課題であると考えられる。ただし、環境汚染ストックを分析に導入するとモデルの動学的挙動を表す微分方程式が3本となるため位相図をもちいた動学分析が適用できず、別の動学分析の方法を検討しなければならない。第5章においては、内生的経済成長モデルをもちいた動学分析を行ったが、内生的経済成長モデルによる環境問題の分析は発展途上の部分があるため、今後の研究成果をフォローし、本論文における研究に導入していかなければならない。最後に、本論文では経済成長モデルもちいた理論的な分析に限定して考察を進めたが、環境問題に関する実証的な分析を導入することを今後の課題としたい。

参考文献

[1] Aghion, P. and P. Howitt (1992), A Model of Growth through Creative Destruction, *Econometrica* **60**, 323-351.

[2] Barro, R. and X. Sala-i-Martin (2004), *Economic Growth*, McGraw-Hill, New York.

[3] Barro, R. (1990), Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth, *Journal of Political Economy* **98**, S103-S125.

[4] Blanchard, O. and S. Fisher (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

[5] Cass, D. (1965), Optimal Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies* **32**, 233-240.

[6] Domar, E. D. (1946), Capital Extension, Rate of Growth, and Employment, *Econometrica* **14**, 137-147.

[7] Domar, E. D. (1957), *Essays in the Theory of Economic Growth*, Oxford University Press, Oxford .

[8] Forster, B. A. (1973), Optimal Capital Accumulation in a Polluted Environment, *Southern Economic Journal* **39**, 544-547.

[9] Gradus, R. and S. Smulders (1993), The Trade-off between Environmental Care and Long-term Growth—Pollution in Three Prototype Growth Models, *Journal of Economics* **58**, 25-51.

[10] Grossman, G. M. and E. Helpman (1991), *Innovation and Growth in*

the Global Economy, MIT Press, Cambridge.

[11]　Gruver, G. W. (1976), Optimal Investment in Pollution Control in a Neoclassical Growth Context, *Journal of Environmental Economics and Management* **3,** 165-177.
[12]　Harrod, R. F. (1939), An Essay in Dynamic Theory, *Economic Journal* **49**, 14-33.

[13]　林山泰久・武藤慎一・佐藤徹治（2005).「環境資源経済学における最適成長論」『土木学会論文集』**799**, IV66, 25-44.

[14]　Inada, K. (1965), On a Two-Sector Model of Economic Growth : Comments and Generalization , *Review of Economic Studies* **30**, 119-127.

[15]　John, A. A. and R. A. Pecchenino (1994), An Overlapping Generations Model of Growth and the Environment, *Economic Journal* **104**, 1393-1410.

[16]　Johns, L. E. and R. E. Manuelli (2001), Endogenous Policy Choice: The Case of Pollution and Growth, *Review of Economic Dynamics* **4**, 369-405

[17]　Koopmans, T. C. (1965), On the Concept of Optimal Economic Growth, in *The Econometric Approach to Development Planning*, North-Holland.

[18]　Lucus, R. E., Jr. (1988), On the Mechanics of Economic Development, *Journal of Monetary Economics* **22**, 3-42.

[19]　前田純一・浦瀬康裕（2021).「最適経済成長モデルによる環境問題分析の基礎」『経済科学研究』25 巻 1 号, p.65-78.

[20]　前田純一・浦瀬康裕（2022).「最適経済成長とフローの環境汚染」『経

済科学研究』25 巻 2 号, p.53-72.

[21]　前田純一・浦瀬康裕（2023).「ソローの経済成長モデルと環境汚染」『経済科学研究』27 巻 1 号, p.　-　.

[22]　前田純一・浦瀬康裕（2024).「内生的経済成長と汚染ストック」『経済科学研究』27 巻 2 号（掲載予定）

[23]　Marini, G. and P. Scaramozzino (1995), Overlapping Generations and Environment Control, *Journal of Environmental Economics and Management* **29**, 64-77.

[24]　Mohtadi, H. (1996), Environment, Growth, and Optimal Policy Design, *Journal of Public Economics* **63**, 119-140.

[25]　Ramsey, F. P. (1928), A Mathematical Theory of Saving, *The Economic Journal* **38**, 543-559.

[26]　Romer, D. (2018),　*Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill.

[27]　Romer, P. (1986), Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy* **94**, 1002-1037.

[28]　Romer, P. (1990), Endogenous Technological Change, *Journal of Political Economy* **98**, S71-S102.

[29]　Rosendahl, K. E. (1996), Does Improved Envitonment Policy Enhance Economic Growth? *Environmental and Resource Economics* **9**, 341-364.

[30]　Schou, P. (2000), Polluting Non-Renewable Resources and Growth, *Environmental and Resource Economics* **16**, 211-227.

[31]　Siebert, H. (1992), *Economics of the Environment*, Springer-Verlag, Berlin.

[32]　Smulders, S. (1999), Endogenous Growth Theory and the Environment, in *Handbook of Environmental and Resource Economics*, Edward Elgar, Cheltenfam.

[33]　Solow, R. M. (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly journal of Economics* **70,** 65-94.

[34]　Solow, R. M. (1999),　Neoclassical Growth Theory, In: Taylor. J. B., Woodford, M. (Eds), *Handbook of Macroeconomics*, vol.1. Elsevier.

[35]　Swan, T. W. (1956),　Economic Growth and Capital Accumulation, *Economic Record* **32**, 334-361.

[36]　植田和弘（1996).『環境経済学』，岩波書店.

[37]　植田和弘他（1997).『環境政策の経済学』，日本評論社.

[38]　van der Ploeg, F. and C. Withagen(1991), Pollution Control and Ramsey Problem, *Environmental and Resource Economics* **1**, 215-236.

[39]　Xepapadeas, A.(2005), Economic Growth and the Environment, *Handbook of Environmental Economics*, Edward Elgar, Cheltenfam.

[40]　Xepapadeas, A. and A. de Zeeuw (2003), Environmental policy and Competitiveness : The Porter Hypothesis and the Composition of Capital, *Journal of Environmental Economics Management* **37**, 165-182.