累積ダメージ・モデルに対する予防保全政策に関する一考察

海　生　直　人

（受付　2013 年 9 月 25 日）

あ　ら　ま　し

本稿においては連続形および離散形確率分布を仮定して，ショックによる累積ダメージ量がある確率分布に従う故障レベルを越えたときシステム故障が発生するシステムの予防保全政策を議論する。評価関数として定常状態における単位時間当りの期待費用を適用し，その期待費用を最小にする最適予防保全政策を考察する。ある条件の下ではただ 1 つの最適予防保全政策が存在することを示す。さらに，ショックが必ずしもシステムにダメージを与えないような修正モデルに対しても言及する。

キーワード　累積ダメージ・モデル，予防保全政策，確率分布に従う故障レベル，連続形確率分布，離散形確率分布

1.　ま　え　が　き

現代社会においては航空機，コンピュータ・システムのようにシステムは大規模化，複雑化しており，その故障（システム・ダウン）は利用者に多大の迷惑を及ぼす。そのためシステムが故障する前に施される予防保全はシステムが故障した後に施される事後保全同様非常に重要なものである。すなわちシステムを効率よく，さらに高い信頼性を保持しながら作動させるためにはこれら予防保全および事後保全を適当に実施する保全政策を考えなければならない。

本稿においては故障レベルが確率変数である拡張された累積ダメージ・モデルの予防保全政策を議論する。すなわち連続形および離散形確率分布を仮定して，ショックによる累積ダメージ量がある確率分布に従う故障レベルを越えたときシステム故障が発生するシステムの予防保全政策を議論する。数種類のショック・モードを仮定する。評価関数として定常状態における単位時間当りの期待費用を適用し，その期待費用を最小にする最適予防保全政策を考察する。ある条件の下ではただ 1 つの最適予防保全政策が存在することを示す。さらに，ショックが必ずしもシステムにダメージを与えないような修正モデルに対しても言及する。

2. 連続形分布累積ダメージ・モデルに対する予防保全政策

2.1 モデルと仮定

1. システムとしては 1 ユニット・システムを考える。
2. システム故障はただちに発見され故障ユニットは修理されずにスクラップされる。
3. 新しい同じユニットは必要なときにはいつでもただちに供給される。
4. 動作ユニットは時刻 0（動作開始）において累積ダメージ量 0 で動作を始める。
5. 計画期間は無限大である。
6. ショックにより発生するダメージは加法的である。
7. システムは累積ダメージ量が確率変数（以下，確率変数を r.v. とする）である故障レベル W（$W \geq 0$）を越えたときのみ故障する。r.v.W は累積分布関数（cdf）$D(w)$（$w \geq 0$），確率密度関数 $d(w)$ に従う。
8. 累積ダメージ量があるショックによりある前もって定められた交換レベル w_0（$0 \leq w_0 < \infty$）を越えたとき，ユニットが故障していないならばその時点で新しいユニットで予防保全（交換）を行う。他方，あるショックによりユニットが故障したならばその時点で新しいユニットで事後保全（取換え）を行う。
9. ユニットの交換および取換えは瞬時に行われ，交換された，あるいは取換えられた新しいユニットはただちに動作を引継ぐ。
10. 以後，同様なサイクルを繰返す。すなわち，動作ユニットの動作開始からそのユニットの交換あるいは取換えまでを 1 サイクルとし，サイクルを繰返す。
11. $(j-1)$ 番目のショックと j 番目のショックの間の時間間隔を r.v.T_j（$j = 1,2,3,\ldots$; $T_j \geq 0$）とし（0 番目のショックとは時点 0 とする），j 番目のショックによるダメージ量を r.v.X_j（≥ 0）とする。ここで，X_i と T_j は独立とする（$i \neq j$）。
12. ショック・モードは n 個あるとし，ショック・モード i が生起する確率は a_i とする（$i = 1,2,\ldots,n$; $\sum_{i=1}^n a_i = 1$; $a_i \geq 0$）。j 番目のショックのモードが i という条件の下では T_j は cdf $F_i(t)$ に，X_j は cdf $G_i(x)$ に従うとする。すなわち T_j は cdf $F(t) = \sum_{i=1}^n a_i F_i(t)$ に，X_j は cdf $G(x) = \sum_{i=1}^n a_i G_i(x)$ に従う。また，$\int_0^\infty t dF_i(t) = 1/\lambda_i$ とし，$\int_0^\infty t dF(t) = 1/\lambda$ とすると，$1/\lambda = \sum_{i=1}^n a_i/\lambda_i$ となる。さらに，X_j は再生関数 $M(x)$，再生密度 $m(x)$ を持つとする。
13. 故障前の 1 回当りの交換費用として c_0，ショック・モード i による故障後の 1 回当りの取換え費用として c_i を考える。事後保全の方が予防保全より高くつくので，$c_i > c_0$ とする。

これらのモデルおよび仮定の下に，定常状態における単位時間当りの期待費用を求め，その期待費用を最小にする最適予防保全政策を考察する。

2.2　解析と定理

1 サイクル当りの期待費用 $A_c(w_0)$ は

$$A_c(w_0) = c_0\int_{w_0}^{\infty}[G(w) - \int_0^{w_0}\bar{G}(w-u)dM(u)]dD(w)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i c_i[\int_0^{w_0}\{\bar{G}_i(w) + \int_0^{w}\bar{G}_i(w-u)dM(u)\}dD(w)$$
$$+\int_{w_0}^{\infty}\{\bar{G}_i(w) + \int_0^{w_0}\bar{G}_i(w-u)dM(u)\}dD(w)], \tag{1}$$

ここで，一般に $\bar{\psi}(\cdot) = 1 - \psi(\cdot)$ とする。

1 サイクルの平均時間 $B_c(w_0)$ は

$$B_c(w_0) = (1/\lambda)[\int_0^{w_0}\{1 + M(w)\}dD(w) + \{1 + M(w_0)\}\bar{D}(w_0)]. \tag{2}$$

$w_0 = 0$ および $w_0 \to \infty$ の場合は以下となる。

$$A_c(0) = c_0\int_0^{\infty}G(w)dD(w) + \sum_{i=1}^{n}a_i c_i\int_0^{\infty}\bar{G}_i(w)dD(w), \tag{3}$$

$$B_c(0) = (1/\lambda), \tag{4}$$

$$A_c(\infty) = \sum_{i=1}^{n}a_i c_i\int_0^{\infty}[\bar{G}_i(w) + \int_0^{\infty}\bar{G}_i(w-u)dM(u)]dD(w), \tag{5}$$

$$B_c(\infty) = (1/\lambda)\int_0^{\infty}[1 + M(w)]dD(w). \tag{6}$$

したがって，定常状態における単位時間当りの期待費用は以下となる（Ross［1］，p. 52参照）。

$$C_c(w_0) = \frac{A_c(w_0)}{B_c(w_0)}. \tag{7}$$

式（7）の右辺の導関数を $m(w_0)\bar{D}(w_0)$ で割ったものの分子を次のように定義する。

$$q_c(w_0) = [1/\bar{D}(w_0)][-c_0\int_{w_0}^{\infty}\bar{G}(w-w_0)dD(w)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i c_i\int_{w_0}^{\infty}\bar{G}_i(w-w_0)dD(w)]B_c(w_0)$$
$$-A_c(w_0)(1/\lambda), \tag{8}$$

ここで，$q_c(0) = -c_0 / \lambda < 0$ である。

式（7）における定常状態における単位時間当りの期待費用 $C_c(w_0)$ を最小にする最適交換レベル w_0^* に関して以下の定理を得る。

定理 1　最適交換レベル w_0^*（$0 < w_0^* \le \infty$）が少なくとも *1* つ存在し，もし $q_c(\infty) > 0$ ならば，有限な最適交換レベル w_0^*（$0 < w_0^* < \infty$）が少なくとも *1* つ存在する。□

定理 2　*1.*　$q_c(w_0)$ が狭義単調増加であるとき次のことが成立する。

（*i*）もし $q_c(\infty) > 0$ ならば，$q_c(w_0) = 0$ を満足する有限でただ *1* つの最適交換レベル w_0^*（$0 < w_0^* < \infty$）が存在し，そのときの最適期待費用は以下となる。

$$C_c(w_0^*) = [\lambda / \bar{D}(w_0^*)][-c_0\int_{w_0^*}^{\infty}\bar{G}(w-w_0^*)dD(w) + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \int_{w_0^*}^{\infty}\bar{G}_i(w-w_0^*)dD(w)]. \tag{9}$$

（*ii*）もし $q_c(\infty) \le 0$ ならば，最適交換レベルは $w_0^* \to \infty$ となる。すなわち，ユニットは故障するまで動作を続け，故障時点で新しいユニットと取換えられる。そのときの最適期待費用は $C_c(\infty) = A_c(\infty) / B_c(\infty)$ となる。

2.　$q_c(w_0)$ が広義単調減少であるとき $w_0^* \to \infty$ となる。□

2.3　考察

本節のモデルにおいて，$c_N = c_i$（$i = 1,2,\dots,n$），$D(w) = u(w - W_0)$（単位関数），$w_0 < W_0$ とすると，あるいは $c_N = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$，$G(x) = G_i(x)$，$D(w) = u(w - W_0)$，$w_0 < W_0$とすると，

$$A_c(w_0) = c_0 + (c_N - c_0)[\bar{G}(W_0) + \int_0^{w_0}\bar{G}(W_0 - u)\,dM(u)], \tag{10}$$

$$B_c(w_0) = [1 + M(w_0)] / \lambda \tag{11}$$

となり，これは文献［2］の結果と一致する。

また，本節のモデルにおいてはショックは確率 1 でシステムにダメージを与えると仮定されている。次に，ショックは必ずしもシステムにダメージを与えないような修正連続形累積ダメージ・モデルに対する予防保全政策を考察する（Nakagawa and Osaki［3］参照）。すなわち，ショックはシステムに確率 p（$0 < p \le 1$）でダメージを与え，確率 $1 - p$ でダメージを与えない状況を考える。この状況においても，λ の代わりに λp を使用することによって本節の結果を適用することができる。

3. 離散形分布累積ダメージ・モデルに対する予防保全政策

3.1 モデルと仮定

2.1節の1項〜6項，9項，10項および13項はそのまま使用し，残りの7項，8項，11項および12項を以下のものとする。

7. システムは累積ダメージ量が確率変数である故障レベル V（$V = 0, 1, 2, ...$）を越えたときのみ故障する。r.v.V は cdf $K(v)$（$v = 0, 1, 2, ...$），確率関数（pmf）$k(v)$（$k(0) = 0$）に従う。
8. 累積ダメージ量があるショックによりある前もって定められた交換レベル v_0（$v_0 = 0, 1, 2, \ldots$）を越えたとき，ユニットが故障していないならばその時点で新しいユニットで予防保全（交換）を行う。他方，あるショックによりユニットが故障したならばその時点で新しいユニットで事後保全（取換え）を行う。
11. $(k-1)$ 番目のショックと k 番目のショックの間の時間間隔を r.v.B_k（$k = 1, 2, 3, ...; B_k = 0, 1, 2, ...$）とし（0番目のショックとは時点0とする），$k$ 番目のショックによるダメージ量を r.v.D_k（$D_k = 0, 1, 2, ...$）とする。ここで，D_i と B_j は独立とする（$i \neq j$）。
12. ショック・モードは n 個あるとし，ショック・モード i が生起する確率は a_i とする（$i = 1, 2, \ldots, n$; $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$; $a_i \geq 0$）。k 番目のショックのモードが i という条件の下では B_k は cdf $F_i(b)$（$b = 0, 1, 2, ...$），pmf $f_i(b)$（$f_i(0) = 0$）に，D_k は cdf $G_i(d)$ に従うとする。すなわち B_k は cdf $F(b) = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(b)$，pmf $f(b) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(b)$ に，D_k は cdf $G(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i G_i(d)$ に従う。また，$\sum_{b=0}^{\infty} b f_i(b) = 1 / \lambda_i$ とし，$\sum_{b=0}^{\infty} b f(b) = 1 / \lambda$ とすると，$1 / \lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i / \lambda_i$ となる。さらに D_k は再生関数 $M(d)$，再生確率関数 $m(d)$ を持つとする（文献［4］参照）。

これらのモデルおよび仮定の下に，定常状態における単位時間当りの期待費用を求め，その期待費用を最小にする最適予防保全政策を考察する。

3.2 解析と定理

1サイクル当りの期待費用 $A_d(v_0)$ は

$$A_d(v_0) = c_0 \sum_{v=v_0+1}^{\infty} [G(v) - \sum_{l=0}^{v_0} \bar{G}(v-l)m(l)]k(v) + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i [\sum_{v=0}^{v_0} \{\bar{G}_i(v) + \sum_{l=0}^{v} \bar{G}_i(v-l)m(l)\}k(v)$$
$$+ \sum_{v=v_0+1}^{\infty} \{\bar{G}_i(v) + \sum_{l=0}^{v_0} \bar{G}_i(v-l)m(l)\}k(v)] . \tag{12}$$

1 サイクルの平均時間 $B_d(v_0)$ は

$$B_d(v_0)=(1/\lambda)[\sum_{v=0}^{v_0}\{1+M(v)\}k(v)+\{1+M(v_0)\}\bar{K}(v_0)]\,. \tag{13}$$

$v_0=0$ および $v_0\to\infty$ の場合は以下となる。

$$A_d(0)=c_0\sum_{v=1}^{\infty}G(v)k(v)+\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\sum_{v=1}^{\infty}\bar{G}_i(v)k(v)\,, \tag{14}$$

$$B_d(0)=(1/\lambda)\,, \tag{15}$$

$$A_d(\infty)=\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\sum_{v=0}^{\infty}[\bar{G}_i(v)+\sum_{t=0}^{v}\bar{G}_i(v-l)m(l)]k(v)\,, \tag{16}$$

$$B_d(\infty)=(1/\lambda)\sum_{v=0}^{\infty}[1+M(v)]k(v)\,. \tag{17}$$

したがって，定常状態における単位時間当りの期待費用は以下となる（Ross［1］，p. 52参照）。

$$C_d(v_0)=\frac{A_d(v_0)}{B_d(v_0)}\,. \tag{18}$$

式（18）における $C_d(v_0)$ の差分を $m(v_0+1)\,\bar{K}\,(v_0)$ で割ったものの分子を次のように定義する。

$$\begin{aligned}q_d(v_0)=[1/\bar{K}(v_0)][-c_0&\sum_{v=v_0+1}^{\infty}\bar{G}(v-v_0-1)k(v)\\&+\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\sum_{v=v_0+1}^{\infty}\bar{G}_i(v-v_0-1)k(v)]B_d(v_0)\\&-A_d(v_0)(1/\lambda)\,.\end{aligned} \tag{19}$$

式（18）における定常状態における単位時間当りの期待費用 $C_d(v_0)$ を最小にする最適交換レベル v_0^* に関して以下の定理を得る。

定理 3　*1*.　もし $q_d(\infty)>0$ ならば，有限な最適交換レベル v_0^*（$0\le v_0^*<\infty$）が少なくとも *1* つ存在する。

2.　もし $q_d(0)<0$ ならば，最適交換レベル v_0^*（$0<v_0^*\le\infty$）が少なくとも *1* つ存在する。□

定理 4　*1*.　$q_d(v_0)$ が狭義単調増加であるとき次のことが成立する。

（*i*）もし $q_d(0)<0$ で $q_d(\infty)>0$ ならば，$q_d(v_0-1)<0$ かつ $q_d(v_0)\ge 0$ を満足する有限でただ 1 つの最適交換レベル v_0^*（$0<v_0^*<\infty$）が存在し，最適期待費用に関して以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&[\lambda / \bar{K}(v_0^*-1)][-c_0\sum_{v=v_0^*}^{\infty}\bar{G}(v-v_0^*)k(v)\\
&\qquad +\sum_{i=1}^{n}a_i c_i\sum_{v=v_0^*}^{\infty}\bar{G}_i(v-v_0^*)k(v)]\\
&\qquad < C_d(v_0^*)\\
&\qquad \le [\lambda / \bar{K}(v_0^*)][-c_0\sum_{v=v_0^*+1}^{\infty}\bar{G}(v-v_0^*-1)k(v)\\
&\qquad +\sum_{i=1}^{n}a_i c_i\sum_{v=v_0^*+1}^{\infty}\bar{G}_i(v-v_0^*-1)k(v)]\,. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

（*ii*）もし $q_d(\infty)\le 0$ ならば，最適交換レベルは $v_0^*\to\infty$ となる。そのときの最適期待費用は $C_d(\infty)=A_d(\infty)/B_d(\infty)$ となる。

（*iii*）もし $q_d(0)\ge 0$ ならば，最適交換レベルは $v_0^*=0$ となる。すなわち，ユニットは初めてショックによるダメージを受けた時点で新しいユニットと交換される，または取換えられる（故障）。そのときの最適期待費用は $C_d(0)=A_d(0)/B_d(0)$ となる。

2.　$q_d(v_0)$ が広義単調減少であるとき $v_0^*\to\infty$ あるいは $v_0^*=0$ となる。□

3.3　考察

$$u(d)=\sum_{j=0}^{d}\delta(j)=1,\ \ d=0,1,2,..., \qquad (21)$$

ただし，

$$\delta(d)=\begin{cases}1,\ \ d=0,\\ 0,\ \ d=1,2,3,...\end{cases} \qquad (22)$$

とする。本節のモデルにおいて，$c_N=c_i\ (i=1,2,\dots,n)$，$K(v)=u(v-V_0)$，$v_0<V_0$ とすると，あるいは $c_N=\sum_{i=1}^{n}a_i c_i$，$G(d)=G_i(d)$，$K(v)=u(v-V_0)$，$v_0<V_0$ とすると

$$A_d(v_0)=c_0+(c_N-c_0)[\bar{G}(V_0)+\sum_{l=0}^{v_0}\bar{G}(V_0-l)m(l)]\,, \qquad (23)$$

$$B_d(v_0)=[1+M(v_0)]/\lambda \qquad (24)$$

となり，これは文献［5］の結果と一致する。

また，2.3節で指摘したのと同じくショックがシステムに確率 p（$0<p\le 1$）でダメージを与え，確率 $1-p$ でダメージを与えない場合には λ の代わりに λp を使用することによって本節の結果を適用することができる。

4. む　す　び

本稿では連続形および離散形確率分布，数種類のショック・モードを仮定して，ショックによる累積ダメージ量がある確率分布に従う故障レベルを越えたときシステム故障が発生する拡張された累積ダメージ・モデルの予防保全政策を議論した。評価関数として定常状態における単位時間当りの期待費用を適用し，その期待費用を最小にする最適予防保全政策を考察した。

参　考　文　献

［1］S. M. Ross, Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden–Day, San Francisco, 1970.
［2］T. Nakagawa, “On a replacement problem of a cumulative damage model,” *Opl Res. Q.*, vol. 27, pp. 895–900, 1976.
［3］T. Nakagawa and S. Osaki, “Some aspects of damage models,” *Microelectron. Reliab.*, vol. 13, pp. 253–257, 1974.
［4］N. Kaio and S. Osaki, “Review of discrete and continuous distributions in replacement models,” *Int. J. Systems Sci.*, vol. 19, no. 1, pp. 171–177, 1988.
［5］海生，尾崎，“離散形累積ダメージモデルに対する最適取換え政策 ,” 信学論（A), vol. J68–A, no. 9, pp. 981–982 (1985).

Abstract

A Note on Preventive Maintenance Policies for Cumulative Damage Models

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the preventive maintenance policies for the system that fails when the cumulated amount of damage by shocks exceeds a stochastic failure level, assuming a continuous distribution and a discrete one, respectively. We apply the expected costs per unit time in the steady—state as criteria of optimality, and seek the optimal policies minimizing these expected costs. We show that there exists a unique optimal policy under certain conditions, respectively. Furthermore, we refer to the modified models where the shock does not always give the damage to the system.

Keywords: cumulative damage model, preventive maintenance policy, stochastic failure level, continuous distribution, discrete distribution