

# 故障が定周期保全時点でのみ発見され 無償保証期間を伴う 離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察

海 生 直 人

(受付 2015 年 9 月 10 日)

## あ ら ま し

本稿では故障が定周期保全時点でのみ発見される離散形分布ブロック取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した拡張保全モデルを議論する。評価関数としては定常状態における単位時間当りの期待費用を適用し、それを最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。無償・割引保証期間を製品に考えることは定常状態における単位時間当りの期待費用を当然のことであるが減少させる。

キーワード 1 回の再生, 無償保証期間, 割引保証, 離散形分布, ブロック取換え政策, 定常状態における単位時間当りの期待費用, 最適政策

## 1. は じ め に

本稿では離散形分布を仮定することによって故障が定周期保全時点でのみ発見されるブロック取換えモデルを議論する。当モデルは以下のものである（連続形分布に関しては Osaki [1, p. 205] 参照）。1 ユニットシステムを対象とする。故障が発生した場合定周期保全時点でのみ発見され、故障発生から発見までの間はシステムダウンとなる。定周期保全時点では新しい同じユニットによって保全（交換・取換え）が実施される。ユニットの保全から次のユニットの保全までの期間を 1 サイクルとし、同様なサイクルを繰り返す。

本稿では前述の故障が定周期保全時点でのみ発見される離散形分布ブロック取換えモデルに製品（ユニット）の無償保証期間 [2, 3] を考慮した離散形分布ブロック取換え政策を議論する。最初に故障が定周期保全時点でのみ発見される基本離散形分布ブロック取換え政策を議論する。次に無償保証期間を付加して当離散形分布ブロック取換え政策を議論する。無償保証期間と定周期保全期間の大小関係においてそれぞれの状況下での政策を考察し、総合的な離散形分布ブロック取換え政策を議論する。最後に基となった基本離散形分布ブロック取換え政策との比較を行う。評価関数としては定常状態における単位時間当りの期待費用を

適用し、その期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。

以下の諸量を導入する。

- 1)  $C_d$  単位時間当りの製品（ユニット）故障に対するダウンタイム費用  
 $C_r$  1 回当りの製品（ユニット）購入に対する購入費用（保全費用）
- 2)  $w$  無償（・割引）保証期間，すなわち時間間隔  $[0, w]$  における故障に対しては無償・割引保証でユニットが供給される。但し，ダウンタイム費用  $C_d$  は発生する。  
 $N$  離散形分布ブロック取換え政策における定周期保全期間。故障が発生した場合定周期保全時点でのみ発見され，故障発生から発見までの間はシステムダウンとなる。定周期保全時点では新しい同じユニットによって保全（交換・取換え）が実施される。
- 3)  $f(d)$  製品（ユニット）の寿命時間の確率関数 ( $d = 0, 1, 2, \dots ; f(0) = 0$ )  
 $F(d)$  同累積分布関数  
 $\bar{F}(d)$  同信頼度関数  
 $1/\lambda$  製品の期待寿命時間
- 4)  $SC_i(N)$   $i = 0, 1, 2$  定常状態における単位時間当りの期待費用  
 $i = 0 : w = 0$  のとき  
 $i = 1 : 0 < w \leq N$  のとき  
 $i = 2 : 0 < N \leq w$  のとき

## 2. 基本離散形分布ブロック取換え政策

最初に無償保証期間を伴わない，すなわち  $w = 0$  の場合の故障が定周期保全時点でのみ発見される，基本離散形分布ブロック取換え政策を議論する。

モデルは以下のものである。定周期保全期間  $N$  内において故障が発生した場合，すぐには発見されず定周期保全時点でのみ発見される，故障発生から発見までの間はシステムダウンとなり単位時間当りのダウンタイム費用  $C_d$  が発生する。定周期保全時点では新しい同じユニットによって 1 回当りの保全費用  $C_d$  を伴い保全（交換・取換え）が実施される。ユニットの保全から次のユニットの保全までの期間を 1 サイクルとし，以後同様なサイクルを繰返す。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_0(N) = \frac{C_d \Psi(N-1) + C_r}{N} \quad (2.1)$$

となる。ここで

故障が定周期保全時点でのみ発見され無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察

$$\Psi(N) = \sum_{d=0}^N F(d) \quad (2.2)$$

とする。以下の式を定義する。

$$H(N) = NF(N) - \Psi(N-1) . \quad (2.3)$$

$H(N)$  に関して以下の補題を得る,

**[補題2.1]**

$H(N)$  ( $N \geq 0$ ) は狭義単調増加であり,  $H(0) = 0$ ,  $H(\infty) = 1/\lambda$  である。□

このとき, 期待費用  $SC_0(N)$  を最小にする最適保全周期  $N_0^*$  に対して以下の定理を得る。

**[定理2.2]**

(i) もし  $H(\infty) = 1/\lambda > C_r/C_d$  ならば, そのとき

$$H(N_0^* - 1) < C_r/C_d \text{ かつ } H(N_0^*) \geq C_r/C_d \quad (2.4)$$

を満足する, 期待費用  $SC_0(N)$  を最小にする有限でただ1つの最適保全周期  $N_0^*$  ( $0 < N_0^* < \infty$ ) が存在し, 期待費用に関して以下の関係が成立する。

$$C_d F(N_0^* - 1) < SC_0(N_0^*) \leq C_d F(N_0^*) . \quad (2.5)$$

(ii) もし  $H(\infty) = 1/\lambda \leq C_r/C_d$  ならば, そのとき最適保全周期は  $N_0^* \rightarrow \infty$  となる。すなわち保全是実施されない。そのときの期待費用は

$$SC_0(\infty) = C_d \quad (2.6)$$

となる。□

### 3. 無償保証期間を伴う基本離散形分布ブロック取換え政策

前節では無償保証期間を伴わない ( $w = 0$ ) 基本離散形分布ブロック取換え政策を取扱ったが, 本節では無償保証期間を伴う基本離散形分布ブロック取換え政策を取扱う。無償保証期間内での製品 (ユニット) の故障に対する取換えに関しては原則購入費用  $C_r$  は免除され, ダウンタイム費用  $C_d$  のみが発生する。以下においては無償保証期間  $w$  と保全周期  $N$  の大小関係においてそれぞれの状況下での最適離散形分布ブロック取換え政策を考察し, その結果に基づき総合的な離散形分布ブロック取換え政策を議論する。

### 3.1 無償保証期間が保全周期以下の場合

$0 < w \leq N$  の場合を取扱う。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$SC_1(N) = \frac{C_d \Psi(N-1) + C_r \bar{F}(w)}{N} \quad (3.1)$$

となる。このとき期待費用  $SC_1(N)$  を最小にする最適保全周期  $N_1^*$  に対して以下の補題を得る。

#### [補題3.1]

$0 < w \leq N$  において以下が成立する。

(i) もし  $H(\infty) = 1/\lambda \leq C_r \bar{F}(w)/C_d$  ならば, そのとき期待費用  $SC_1(N)$  を最小にする最適保全周期  $N_1^*$  は  $N_1^* \rightarrow \infty$  となる。そのときの期待費用は

$$SC_1(\infty) = C_d \quad (3.2)$$

となる。

(ii) もし  $H(w) < C_r \bar{F}(w)/C_d < H(\infty) = 1/\lambda$  ならば, そのとき

$$H(N_1^* - 1) < C_r \bar{F}(w)/C_d \text{ かつ } H(N_1^*) \geq C_r \bar{F}(w)/C_d \quad (3.3)$$

を満足する有限でただ 1 つの最適保全周期  $N_1^*(w < N_1^* < \infty)$  が存在し, 期待費用に関して以下の関係が成立する。

$$C_d F(N_1^* - 1) < SC_1(N_1^*) \leq C_d F(N_1^*). \quad (3.4)$$

(iii) もし  $H(w) \geq C_r \bar{F}(w)/C_d$  ならば, そのとき最適保全周期は  $N_1^* = w$  となる。そのときの期待費用は

$$SC_1(N_1^*) = SC_1(w) = \frac{C_d \Psi(w-1) + C_r \bar{F}(w)}{w} \quad (3.5)$$

となる。□

### 3.2 無償保証期間が保全周期以上の場合

$0 < N \leq w$  の場合を取扱う。

この場合, 時刻  $N$  で故障していないとき, その後  $w$  以前に故障するか  $w$  を超えて故障するかわからないので時刻  $N$  で実際支払う予防・事後保全費用は期待値である割引保証費用  $C_r \bar{F}(w)$  とする。従って, 定常状態における単位時間当りの期待費用は

故障が定周期保全時点でのみ発見され無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察

$$SC_2(N) = \frac{C_d \Psi(N-1) + C_r \bar{F}(w)}{N} \quad (3.6)$$

となる。このとき期待費用  $SC_2(N)$  を最小にする最適保全周期  $N_2^*$  に対して以下の補題を得る。

**[補題3.2]**

$0 < N \leq w$  において以下が成立する。

(i) もし  $H(w) \leq C_r \bar{F}(w) / C_d$  ならば、そのとき期待費用  $SC_2(N)$  を最小にする最適保全周期  $N_2^*$  は  $N_2^* = w$  となる。そのときの期待費用は

$$SC_2(N_2^*) = SC_2(w) = \frac{C_d \Psi(w-1) + C_r \bar{F}(w)}{w} \quad (3.7)$$

となる。

(ii) もし  $H(w) > C_r \bar{F}(w) / C_d$  ならば、そのとき

$$H(N_2^* - 1) < C_r \bar{F}(w) / C_d \text{ かつ } H(N_2^*) \geq C_r \bar{F}(w) / C_d \quad (3.8)$$

を満足する有限でただ1つの最適保全周期  $N_2^*$  ( $0 < N_2^* \leq w$ ) が存在し、期待費用に関して以下の関係が成立する。

$$C_d F(N_2^* - 1) < SC_2(N_2^*) \leq C_d F(N_2^*) . \quad (3.9)$$

□

### 3.3 大域的最適保全周期

前もって無償保証期間と保全周期の大小関係を知ることはできない。本節では補題3.1および3.2から大域的最適保全周期  $N_w^*$  についてまとめる。

**[定理3.3]**

保証期間を  $w$  としたとき以下が成立する。

- (i) もし  $H(w) < C_r \bar{F}(w) / C_d$  ならば、 $N_w^* = N_1^* > w$  となる。
- (ii) もし  $H(w) = C_r \bar{F}(w) / C_d$  ならば、 $N_w^* = w$  となる。
- (iii) もし  $H(w) > C_r \bar{F}(w) / C_d$  ならば、 $N_w^* = N_2^* \leq w$  となる。□

### 3.4 考 察

[定理3.3] の (i) において、 $C_d$  が相対的に  $C_r$  より小さいときには、無償保証の利益を得るために最適保全周期は無償保証期間より長くなる。また同定理 (iii) より  $C_d$  が相対的に  $C_r$  より大きいときには、製品故障を避けるために製品は割引保証が終了する前に予防保全さ

れる。また、当然のことであるが無償・割引保証期間を製品に考えることは定常状態における単位時間当りの期待費用を減少させる。

#### 4. む す び

本稿では製品（ユニット）の故障が定周期保全時点でのみ発見される離散形分布ブロック取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した拡張保全モデルを考察した。評価関数としては定常状態における単位時間当りの期待費用を採用し、それを最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求めた。

#### 文 献

- [1] S. Osaki, "Applied Stochastic System Modeling," Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1992.
- [2] W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, "Warranty Cost Analysis," Marcel Dekker, New York, 1994.
- [3] W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, "Product Warranty Handbook," Marcel Dekker, New York, 1996.

## Abstract

### A Note on Discrete Block Replacement Policy with Single Renewal and Free Warranty Interval

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the extended discrete block replacement policy with single renewal and free warranty interval. We apply the expected cost per unit time in the steady state as a criterion of optimality and obtain the optimal discrete block replacement policy minimizing that expected cost. The expected cost decreases, when we adopt the free warranty interval.

**Keywords:** Single renewal, Free warranty interval, Discount warranty, Discrete distribution, Block replacement policy, Optimal policy, Expected cost per unit time in the steady state