

ランダムな計画期間を伴う 年齢取換え政策に関する一考察

海 生 直 人

(受付 2016 年 4 月 7 日)

あ ら ま し

本稿では年齢取換えモデルにおいて計画期間がある既知の確率分布、特に指数分布に従う場合を議論する。評価関数としては計画期間全体の総期待費用を適用し、その総期待費用を最小にする最適年齢取換え政策を求める。求められた結果より従来の結果が特別な場合として得られることを示す。

キーワード ランダムな計画期間、年齢取換え政策、計画期間全体の総期待費用、最適政策、定常状態における単位時間当りの期待費用

1. は じ め に

年齢取換えモデルは基本的な保全モデルの 1 つとして多くの研究者によって議論され、その拡張モデルも種々考案されている。最も基本的なモデルは 1 ユニットシステムに対するものである (Barlow and Proschan [1, p. 85], 海生 [2, pp. 15–16], Osaki [3, pp. 200–202] 参照)。ユニットはある前もって定められた時刻までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ、その時刻までに故障しなければその時刻で新しい同じユニットと交換される。ユニットの動作開始からそのユニットの取換え／交換までの期間を 1 サイクルとし、同様なサイクルを繰り返す。計画期間は無限大である。

本稿では計画期間がある既知の確率分布、特に指数分布に従う場合を議論する。計画期間が無限大の場合には取換え／交換の際に新しい同じユニットで取換え／交換し続けることになるが、計画期間が確率変数の場合には有限期間内での計画打ち切りが可能となる。これは製品の在庫切れや技術革新を考慮することと同じ意味を持つ [4, 5]。評価関数としては計画期間全体の総期待費用を適用し、その総期待費用を最小にする最適年齢取換え政策を求める。さらに、求められた結果より既存の結果が特別な場合として得られることを示す。

2. モデルと仮定

本稿では以下のモデルを取扱う。システムとしては1ユニットシステムを考える。ユニットはある前もって定められた時刻までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ、その時刻までに故障しなければその時刻で新しい同じユニットと交換される。ユニットの動作開始からそのユニットの取換え／交換までの期間を1サイクルとし、同様なサイクルを繰り返す。取換え／交換は瞬時になされ、取換えられた／交換された新しいユニットはただちに動作を引継ぐ。各故障は発生と同時に発見され、故障ユニットは廃棄される。計画期間はある既知の確率分布、特に指数分布に従い、ユニットは時刻0で動作を始める。評価関数としては計画期間全体の総期待費用を適用し、その総期待費用を最小にする最適年齢取換え政策を求めらる。

以下の諸量を導入する。

- 1) c_r 故障ユニットの各取換え（大修理）に対する費用
 c_e 非故障ユニットの各交換に対する費用, $c_r > c_e$ とする。
- 2) H 計画期間（確率変数, $H \geq 0$ ）
 $g(h)$ 計画期間の確率密度関数 ($h \geq 0$)
 $G(h)$ 同累積分布関数
 $1/\mu$ 同平均
- 3) $f(t)$ ユニットの故障時間の確率密度関数 ($t \geq 0$)
 $F(t)$ 同累積分布関数
 $r(t)$ 同故障率
 $1/\lambda$ 同平均（製品の期待寿命時間）
- 4) t_0 ある前もって定められた予防保全年齢。ユニットはある前もって定められた時刻 t_0 までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ（事後保全）、時刻 t_0 までに故障しなければ時刻 t_0 で新しい同じユニットと交換される（予防保全）。
- 5) $C(t_0)$ 計画期間全体の総期待費用
 $CI(t_0)$ 定常状態における単位時間当りの期待費用
- 6) $\bar{\psi}$ $1 - \psi$, ψ は任意の関数
- 7) $\zeta(t_0) = \int_0^{t_0} \bar{F}(t) dt$, 1 サイクルの平均時間

3. 解析と定理

計画期間 H が任意分布 $G(h)$ に従うときの計画期間全体の総期待費用は

$$C(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\zeta(t_0)}^{(k+1)\zeta(t_0)} k(c_r F(t_0) + c_e \bar{F}(t_0)) g(h) dh \quad (3.1)$$

となる。

以下の議論においては計画期間 H が指数分布,

$$g(h) = \mu e^{-\mu h} \quad (3.2)$$

に従う場合を議論する。この場合, 計画期間全体の総期待費用は

$$C(t_0) = \frac{(c_r F(t_0) + c_e \bar{F}(t_0)) e^{-\mu \zeta(t_0)}}{1 - e^{-\mu \zeta(t_0)}} \quad (3.3)$$

となる。ここで,

$$C(0) = \infty, \quad (3.4)$$

および

$$C(\infty) = \frac{c_r e^{-\mu \lambda}}{1 - e^{-\mu \lambda}} \quad (3.5)$$

である。従って $t_0 = 0$ では $C(t_0)$ は最小とならない, すなわち $0 < t_0$ となる。

次式を定義する。

$$H(t_0) = (c_r - c_e) r(t_0) (1 - e^{-\mu \zeta(t_0)}) - \mu (c_r F(t_0) + c_e \bar{F}(t_0)). \quad (3.6)$$

このとき以下の補題を得る。

[補題3.1]

総期待費用 $C(t_0)$ を最小にする最適予防保全年令 t_0^* は $0 < t_0^*$ となる。□

以上の結果より, 計画期間全体の総期待費用 $C(t_0)$ を最小にする最適予防保全年令 t_0^* に対して以下の定理を得る。

[定理3.2]

- (1) $r(t)$ が狭義単調増加である ($t > 0$) と仮定する。
- (i) $r'(t) - \mu f(t) > 0$ のとき ($t > 0$) 次のことが成立する。
- (a) もし $H(\infty) > 0$ ならば, そのとき $H(t_0^*) = 0$ を満足する, 総期待費用 $C(t_0)$ を最小に

する有限でただ1つの最適予防保全年令 t_0^* ($0 < t_0^* < \infty$) が存在し, そのときの期待費用は

$$C(t_0^*) = \frac{(c_r - c_e)(r(t_0^*) - \mu F(t_0^*)) - \mu c_e}{\mu} \quad (3.7)$$

となる。

(b) もし $H(\infty) \leq 0$ ならば, そのとき最適予防保全年令は $t_0^* \rightarrow \infty$ となる。すなわち予防保全 (ユニットの交換) はせず事後保全 (大修理, 取換え) のみを行う。そのときの期待費用は

$$C(\infty) = \frac{c_r e^{-\mu/\lambda}}{1 - e^{-\mu/\lambda}} \quad (3.8)$$

となる。

(ii) $r'(t) - \mu f(t) \leq 0$ のとき ($t > 0$) 最適予防保全年令は $t_0^* \rightarrow \infty$ となる。

(2) $r(t)$ が広義単調減少である ($t > 0$) と仮定すると, 最適予防保全年令は $t_0^* \rightarrow \infty$ となる。□

4. む す び

本稿では年令取換え政策において計画期間がある既知の確率分布, 特に指数分布に従う場合を考察した。評価関数としては計画期間全体の総期待費用を適用し, その総期待費用を最小にする最適年令取換え政策を求めた。

最後に計画期間が無限大の場合に言及する。これは本稿で議論した, 計画期間が従う指数分布のパラメータ μ を 0 とすることと同様である。この場合, 当然のことであるが総期待費用式 (3.3) は $\lim_{\mu \rightarrow 0} C(t_0) = \infty$ となる。従って, 定常状態における単位時間当りの期待費用 $CI(t_0)$ を評価関数として考察する。以下に得られる結果は既存の結果と一致する (Barlow and Proschan [1, p. 85], 海生 [2, pp. 15–16], Osaki [3, pp. 200–202] 参照)。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$\begin{aligned} CI(t_0) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{C(t_0)}{1/\mu} \\ &= \frac{c_r F(t_0) + c_e \bar{F}(t_0)}{\int_0^{t_0} \bar{F}(t) dt} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$CI(\infty) = \lambda c_r \quad (4.2)$$

となる。また,

$$\begin{aligned}
 HI(t_0) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} H(t_0) \cdot (1/\mu) \\
 &= (c_r - c_e) \left\{ r(t_0) \int_0^{t_0} \bar{F}(t) dt - F(t_0) - \frac{c_e}{c_r - c_e} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。さらに、定理3.2より以下が得られる。

(1) $r(t)$ が狭義単調増加であるとき ($t > 0$) 次のことが成立する。

(i) もし $HI(\infty) > 0$ ならば, そのとき $HI(t_0^*) = 0$ を満足する, 期待費用 $CI(t_0)$ を最小にする有限でただ1つの最適予防保全年令 t_0^* ($0 < t_0^* < \infty$) が存在し, そのときの期待費用は

$$CI(t_0^*) = (c_r - c_e)r(t_0^*) \tag{4.4}$$

となる。

(ii) もし $HI(\infty) \leq 0$ ならば, $t_0^* \rightarrow \infty$ となる。そのときの期待費用は

$$CI(\infty) = \lambda c_r \tag{4.5}$$

となる。

(2) $r(t)$ が広義単調減少であるとき ($t > 0$) $t_0^* \rightarrow \infty$ となる。

本稿で取扱ったモデルは年令取換え政策の概念によるものであるが, ブロック取換え政策に関しては Khatab et al. [4], 海生 [5] を参照するとよい。

文 献

- [1] R. E. Barlow and F. Proschan, "Mathematical Theory of Reliability," John Wiley, New York, 1965.
- [2] 海生直人, "確率的保全問題に関する研究," 広島修道大学総合研究所 (広島修道大学研究叢書第52号), 1989.
- [3] S. Osaki, "Applied Stochastic System Modeling," Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1992.
- [4] A. Khatab, N. Rezg and D. Ait-Kadi, "Optimal Replacement with Minimal Repair Policy for a System Operating over a Random Time Horizon," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 415–423 (2011).
- [5] 海生直人, "ランダムな計画期間を伴うブロック取換え政策に関する一考察," 経済科学研究, Vol. 16, No. 2, pp. 1–6 (2013 2月).

Abstract

A Note on Age Replacement Policy
with
Random Planning Horizon

Naoto Kaio

In this paper, we treat the extended age replacement policy with random planning horizon, where the planning horizon obeys an exponential distribution, especially. We apply the total expected cost over a planning horizon as a criterion of optimality and obtain the optimal age replacement policy minimizing that expected cost. Finally, we illustrate the relationship between the result obtained in this paper and the existing one.

Keywords: Random planning horizon, Age replacement policy, Total expected cost over a planning horizon, Optimal policy, Expected cost per unit time in the steady state