小修理およびランダムな計画期間を伴う
離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察

海　生　直　人

（受付　2016 年 9 月 12 日）

あ　ら　ま　し

本稿では小修理を伴う離散形分布ブロック取換えモデルにおいて計画期間がある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従う場合を議論する。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。求められた結果より従来の結果が特別な場合として得られることを示す。

キーワード　小修理，ランダムな計画期間，離散形分布，ブロック取換え政策，計画期間全体の総期待費用，最適政策，定常状態における単位時間当りの期待費用

1. は　じ　め　に

ブロック取換えモデルは基本的な保全モデルの 1 つとして多くの研究者によって議論され，その拡張モデルも種々考案されている（[1]～[8] 参照）。最も基本的なモデルは連続形分布における 1 ユニットシステムに対するものである（Barlow and Proschan［1, p. 95］，海生［2, pp. 12–13］，Osaki［3, pp. 203–204］参照）。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ，かつある前もって定められた時刻において新しい同じユニットと交換される。以後同様な挙動を繰返す。計画期間は無限大である。

本稿では計画期間がある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従う場合を小修理を仮定することにより議論する。小修理によってはシステムの故障率は変化しない（Barlow and Proschan［1, p. 96］，Osaki［3, p. 206］，Nakagawa［5, 8］，海生［7, p. 22］参照）。計画期間が無限大の場合には交換の際に新しい同じユニットで交換し続けることになるが，計画期間が離散形確率変数の場合には有限期間内での計画打切りが可能となる。これは製品の在庫切れや技術革新を考慮することと同じ意味を持つ（Khatab et al.［4］参照）。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。さらに，求められた結果より既存の結果が特別な場合として得られることを示す。

2. モデルと仮定

本稿では以下のモデルを取扱う。システムとしては 1 ユニットシステムを考える。ユニットは故障時点において小修理が施され，かつある前もって定められた時刻において新しい同じユニットと交換される。小修理によってはシステムの故障率は変化しない（Barlow and Proschan［1, p. 96］，Osaki［3, p. 206］，Nakagawa［5, 8］，海生［7, p. 22］参照）。ユニットの交換から次のユニットの交換までの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。小修理／交換は瞬時になされ，小修理が施されたユニット／交換された新しいユニットはただちに動作を引継ぐ。各故障は発生と同時に発見され，故障ユニットは小修理が施される。計画期間はある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従い，ユニットは時刻 0 で動作を始める。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。

以下の諸量を導入する。

1） c_m　故障ユニットの各小修理に対する費用

c_e　非故障ユニットの各交換に対する費用

2） J　計画期間（離散形確率変数，$J = 0, 1, 2,...$）

$g(j)$　計画期間の確率関数（$j = 0, 1, 2,...; g(0) = 0$）

$G(j)$　同累積分布関数

$1 / \mu$　同平均

3） $f(d)$　ユニットの故障時間の確率関数（$d = 0, 1, 2,... ; f(0) = 0$）

$F(d)$　同累積分布関数

$r(d)$　同故障率（$r(d) = f(d) / [1 - F(d - 1)], r(0) = 0$）

$R(d) = \sum_{k=0}^{d} r(k)$（$R(0) = 0$）

$1 / \lambda$　同平均

4） N　予防保全周期。ユニットは故障時点において小修理が施され（事後保全），かつある前もって定められた時刻 N において新しい同じユニットと交換される（予防保全）。小修理によってはシステムの故障率は変化しない（Barlow and Proschan［1, p. 96］，Osaki［3, p. 206］，Nakagawa［5, 8］，海生［7, p. 22］参照）。

5） $C(N)$　計画期間全体の総期待費用

$CI(N)$　定常状態における単位時間当りの期待費用

3. 解 析 と 定 理

計画期間 J が任意分布 $G(j)$ に従うときの計画期間全体の総期待費用は

$$C(N)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=kN+1}^{(k+1)N}[k(c_m R(N)+c_e)+c_m R(j-kN)]g(j) \tag{3.1}$$

となる。

以下の議論においては計画期間 J が幾何分布,

$$g(j)=pq^{j-1},\ \ j=1,2,3,...;0<p<1, q=1-p \tag{3.2}$$

に従う場合を議論する。この場合，計画期間全体の総期待費用は

$$C(N)=\frac{(c_m R(N)+c_e)q^N+c_m\sum_{l=0}^{N}R(l)pq^{l-1}}{1-q^N} \tag{3.3}$$

となる。ここで,

$$C(0)=\infty, \tag{3.4}$$

および

$$C(\infty)=c_m\sum_{j=0}^{\infty}r(j)q^{j-1} \tag{3.5}$$

である。従って $N=0$ では $C(N)$ は最小とならない，すなわち $0<N$ となる（$N=1,2,3,...$）。

次式を定義する。

$$H(N)=\sum_{j=1}^{N}(r(N+1)-r(j))q^{j-1}. \tag{3.6}$$

このとき以下の補題を得る。

[補題3.1]

（1） もし $r(n)$ が狭義単調増加であるならば（$n=1,2,3,...$），$H(n)$ も狭義単調増加となる。そのとき，$H(0)=0$，$H(\infty)>0$ である。

（2） もし $r(n)$ が広義単調減少であるならば（$n=1,2,3,...$），$H(n)$ も広義単調減少となる。そのとき，$H(0)=0$，$H(\infty)\leq 0$ である。□

以上の結果より，計画期間全体の総期待費用 $C(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N^* に

対して以下の定理を得る。

［**定理3.2**］

（1）　$r(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n = 1, 2, 3, ...$）次のことが成立する。

（i）　もし $H(\infty) > c_e / c_m$ ならば，そのとき

$$H(N^* - 1) < c_e / c_m \text{ かつ } H(N^*) \geq c_e / c_m \tag{3.7}$$

を満足する，総期待費用 $C(N)$ を最小にする有限でただ 1 つの最適予防保全周期 N^*（$0 < N^* < \infty$）が存在し，総期待費用に関して以下の関係が成立する，

$$c_m r(N^*) / p - c_e < C(N^*) \leq c_m r(N^* + 1) / p - c_e . \tag{3.8}$$

（ii）　もし $H(\infty) \leq c_e / c_m$ ならば，そのとき最適予防保全周期は $N^* \to \infty$ となる。すなわち予防保全（ユニットの交換）はせず事後保全（小修理）のみを行う。そのときの総期待費用は

$$C(\infty) = c_m \sum_{j=0}^{\infty} r(j) q^{j-1} \tag{3.9}$$

となる。

（2）　$r(n)$ が広義単調減少であるとき（$n = 1, 2, 3, ...$）最適予防保全周期は $N^* \to \infty$ となる。□

4.　む　す　び

本稿では小修理を伴う離散形分布ブロック取換え政策において計画期間がある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従う場合を考察した。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求めた。

最後に計画期間が無限大の場合に言及する。これは本稿で議論した，計画期間が従う幾何分布のパラメータ q を 1（p を0）とすることと同様である。この場合，当然のことであるが総期待費用式（3.3）は $\lim_{q \to 1} C(N) = \infty$ となる。従って，定常状態における単位時間当りの期待費用 $CI(N)$ を評価関数として議論する。以下に得られる結果は既存の結果と一致する（Nakagawa［5, 8］参照）。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$\begin{aligned} CI(N) &= \lim_{q \to 1} \frac{C(N)}{1/p} \\ &= \frac{c_m R(N) + c_e}{N}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$CI(\infty)=\lim_{N\to\infty}\frac{c_m R(N)+c_e}{N} \tag{4.2}$$

となる。また，

$$\begin{aligned} HI(N)&=\lim_{q\to 1}H(N)\\ &=\sum_{j=1}^{N}(r(N+1)-r(j))\\ &=Nr(N+1)-R(N) \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。さらに，定理3.2より以下が得られる。

（1） $r(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n = 1, 2, 3,...$）次のことが成立する。

（i） もし $HI(\infty)>c_e/c_m$ ならば，そのとき

$$HI(N^*-1)<c_e/c_m \text{ かつ } HI(N^*)\geq c_e/c_m \tag{4.4}$$

を満足する，期待費用 $CI(N)$ を最小にする有限でただ1つの最適予防保全周期 N^*（$0 < N^* < \infty$）が存在し，期待費用に関して以下の関係が成立する，

$$c_m r(N^*)<CI(N^*)\leq c_m r(N^*+1)\,. \tag{4.5}$$

（ii） もし $HI(\infty)\leq c_e/c_m$ ならば，$N^*\to\infty$ となる。そのときの期待費用は

$$CI(\infty)=\lim_{N\to\infty}\frac{c_m R(N)+c_e}{N} \tag{4.6}$$

となる。

（2） $r(n)$ が広義単調減少であるとき（$n = 1, 2, 3,...$）$N^*\to\infty$ となる。

文　献

[1] R. E. Barlow and F. Proschan, “Mathematical Theory of Reliability,” John Wiley, New York, 1965.

[2] 海生直人，“確率的保全問題に関する研究，” 広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第52号），1989.

[3] S. Osaki, “Applied Stochastic System Modeling,” Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1992.

[4] A. Khatab, N. Rezg and D. Ait-Kadi, “Optimal Replacement with Minimal Repair Policy for a System Operating over a Random Time Horizon,” *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 415–423（2011）.

[5] T. Nakagawa, “A Summary of Discrete Replacement Policies,” *European Journal of Operational Research*, Vol. 17, No. 3, pp. 382–392（1984）.

[6] 海生直人，“無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察，”経済科学研究，Vol. 18, No. 1, pp. 1 – 8（2014）.
[7] 海生直人，“単一ユニットシステムの予防保全問題に関する解析的研究，”広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第22号），1983.
[8] T. Nakagawa, “A Summary of Periodic Replacement with Minimal Repair at Failure,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 24, No. 3, pp. 213 – 228（1981）.

Abstract

A Note on Discrete Distribution Block Replacement Policy Taking Account of Minimal Repair and Random Planning Horizon

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the extended discrete distribution block replacement policy, taking account of minimal repair and random planning horizon, where the planning horizon obeys a geometric distribution, especially. We adopt the total expected cost over a planning horizon as a criterion of optimality and obtain the optimal discrete distribution block replacement policy minimizing that total expected cost. Finally, we illustrate the relationship between the result obtained in this paper and the existing one.

Keywords: Minimal repair, Random planning horizon, Discrete distribution, Block replacement policy, Total expected cost over a planning horizon, Optimal policy, Expected cost per unit time in the steady state