故障が定周期保全時点でのみ発見されランダムな計画期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察

海　生　直　人

（受付　2017 年 9 月 6 日）

あ ら ま し

本稿では故障が定周期保全時点でのみ発見される離散形分布ブロック取換えモデルにおいて計画期間がある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従う場合を議論する。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。求められた結果より従来の結果が特別な場合として得られることを示す。

キーワード　1 回の再生，ランダムな計画期間，離散形分布，ブロック取換え政策，計画期間全体の総期待費用，最適政策，定常状態における単位時間当りの期待費用

1. は じ め に

ブロック取換えモデルは基本的な保全モデルの 1 つとして多くの研究者によって議論され，その拡張モデルも種々考案されている（[1]～[7] 参照)。最も基本的なモデルは連続形分布における 1 ユニットシステムに対するものである（Barlow and Proschan［1, p. 95］，海生［2, pp. 12–13］，Osaki［3, pp. 203–204］参照)。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ，かつある前もって定められた時刻において新しい同じユニットと交換される。以後同様な挙動を繰返す。計画期間は無限大である。

本稿では拡張モデルとしての故障が定周期保全時点でのみ発見される離散形分布ブロック取換えモデルを考察する。当モデルは以下のものである（海生［7，２．基本離散形分布ブロック取換え政策（無償保証期間 $w = 0$ の場合)］参照)。 1 ユニットシステムを対象とする。故障が発生した場合定周期保全時点でのみ発見され，故障発生から発見までの間はシステムダウンとなる。定周期保全時点では新しい同じユニットによって保全（交換・取換え）が実施される。ユニットの保全から次のユニットの保全までの期間を 1 サイクルとし，以後同様なサイクルを繰返す。

本稿では前述の故障が定周期保全時点でのみ発見される離散形分布ブロック取換えモデルにおいて，計画期間がある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従う場合を議論する。計

画期間が無限大の場合には保全の際に新しい同じユニットで保全し続けることになるが，計画期間が離散形確率変数の場合には有限期間内での計画打切りが可能となる。これは製品の在庫切れや技術革新を考慮することと同じ意味を持つ（Khatab et al.［4］参照）。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。さらに，求められた結果より既存の結果が特別な場合として得られることを示す。

2.　モデルと仮定

本稿では以下のモデルを取扱う。システムとしては 1 ユニットシステムを考える。定周期保全期間 N 内において故障が発生した場合，すぐには発見されず定周期保全時点でのみ発見される，故障発生から発見までの間はシステムダウンとなり単位時間当りのダウンタイム費用 c_d が発生する。定周期保全時点では新しい同じユニットによって 1 回当りの保全費用 c_r を伴い保全（交換・取換え）が実施される。ユニットの保全から次のユニットの保全までの期間を 1 サイクルとし，以後同様なサイクルを繰返す。取換え／交換（保全）は瞬時になされ，取換えられた／交換された新しいユニットはただちに動作を引継ぐ。故障ユニットは廃棄される。計画期間はある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従い，ユニットは時刻 0 で動作を始める。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。

以下の諸量を導入する。

1）　c_r　故障ユニットの各取換えおよび非故障ユニットの各交換に対する保全費用
　　c_d　単位時間当りの故障に対するダウンタイム費用

2）　J　計画期間（離散形確率変数，$J=0, 1, 2, ...$）
　　$g(j)$　計画期間の確率関数（$j=0, 1, 2,...;\ g(0)=0$）
　　$G(j)$　同累積分布関数
　　$1/\mu$　同平均

3）　$f(d)$　ユニットの故障時間の確率関数（$d=0, 1, 2,...;\ f(0)=0$）
　　$F(d)$　同累積分布関数
　　$\bar{F}(d)$　同信頼度関数
　　$1/\lambda$　同平均

4）　N　ブロック取換え政策における定周期保全期間。故障が発生した場合定周期保全時点でのみ発見され，故障発生から発見までの間はシステムダウンとなる。定周期保全時点では新しい同じユニットによって保全（交換・取換え）が実施される。

5）　$C(N)$　計画期間全体の総期待費用

　　$CI(N)$　定常状態における単位時間当りの期待費用

3. 解 析 と 定 理

計画期間 J が任意分布 $G(j)$ に従うときの計画期間全体の総期待費用は

$$C(N)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=kN+1}^{(k+1)N}\left[k(c_d\Psi(N-1)+c_r)+c_d\Psi(j-kN-1)\right]g(j) \tag{3.1}$$

となる。ここで,

$$\Psi(N)=\sum_{d=0}^{N}F(d) \tag{3.2}$$

である。

以下の議論においては計画期間 J が指数分布,

$$g(j)=pq^{j-1},\ j=1,2,3,...;0<p<1,q=1-p \tag{3.3}$$

に従う場合を議論する。この場合，計画期間全体の総期待費用は

$$C(N)=\left[(c_d\Psi(N-1)+c_r)q^N+c_d\sum_{l=0}^{N}\Psi(l-1)pq^{l-1}\right]/(1-q^N) \tag{3.4}$$

となる。ここで,

$$C(0)=\infty, \tag{3.5}$$

および

$$C(\infty)=c_d\sum_{d=0}^{\infty}F(d)q^d \tag{3.6}$$

である。従って $N=0$ では $C(N)$ は最小とならない，すなわち $0<N$ となる（$N=1, 2, 3,...$）。

次式を定義する。

$$H(N)=\sum_{j=0}^{N-1}(F(N)-F(j))q^j. \tag{3.7}$$

このとき以下の補題を得る。

［**補題3.1**］

$H(n)$ は狭義単調増加であり $(n=0,\ 1,\ 2,...)$, $H(0)=0$, $H(\infty)=\sum_{j=0}^{\infty}\overline{F}(j)q^j>0$ である。□

以上の結果より，計画期間全体の総期待費用 $C(N)$ を最小にする最適定周期保全周期 N^* に対して以下の定理を得る。

［**定理3.2**］

(i)　もし $H(\infty)=\sum_{j=0}^{\infty}\overline{F}(j)q^j>c_r/c_d$ ならば，そのとき

$$H(N^*-1)<c_r/c_d \text{ かつ } H(N^*)\geq c_r/c_d \tag{3.8}$$

を満足する，総期待費用 $C(N)$ を最小にする有限でただ1つの最適定周期保全周期 N^*（$0<N^*<\infty$）が存在し，総期待費用に関して以下の関係が成立する，

$$c_dF(N^*-1)/p-c_r<C(N^*)\leq c_dF(N^*)/p-c_r. \tag{3.9}$$

(ii)　もし $H(\infty)=\sum_{j=0}^{\infty}\overline{F}(j)q^j\leq c_r/c_d$ ならば，そのとき最適定周期保全周期は $N^*\to\infty$ となる。すなわち保全（取換え・交換）は実施されない。そのときの期待費用は

$$C(\infty)=c_d\sum_{d=0}^{\infty}F(d)q^d \tag{3.10}$$

となる。□

4.　む　　す　　び

本稿では製品（ユニット）の故障が定周期保全時点でのみ発見される離散形分布ブロック取換え政策において計画期間がある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従う場合を考察した。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求めた。

最後に計画期間が無限大の場合に言及する。これは本稿で議論した，計画期間が従う幾何分布のパラメータ p を0（$q=1$）とすることと同様である。この場合，当然のことであるが総期待費用式（3.4）は $\lim_{q\to1}C(N)=\infty$ となる。従って，定常状態における単位時間当りの期待費用 $CI(N)$ を評価関数として議論する。得られる結果は既存の結果と一致する（海生［7，２．基本離散形分布ブロック取換え政策（無償保証期間 $w=0$ の場合)］参照)。

定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$CI(N)=\lim_{q\to 1}\frac{C(N)}{1/p}$$
$$=\frac{c_d\Psi(N-1)+c_r}{N}, \tag{4.1}$$
$$CI(\infty)=c_d \tag{4.2}$$

となる。また,

$$HI(N)=\lim_{q\to 1}H(N)$$
$$=\sum_{j=0}^{N-1}(F(N)-F(j)) \tag{4.3}$$
$$=NF(N)-\Psi(N-1) \tag{4.4}$$

となる。

文　献

[1] R. E. Barlow and F. Proschan, “Mathematical Theory of Reliability,” John Wiley, New York, 1965.
[2] 海生直人,“確率的保全問題に関する研究,” 広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第52号), 1989.
[3] S. Osaki, “Applied Stochastic System Modeling,” Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1992.
[4] A. Khatab, N. Rezg and D. Ait-Kadi, “Optimal Replacement with Minimal Repair Policy for a System Operating over a Random Time Horizon,” *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 415–423（2011).
[5] T. Nakagawa, “A Summary of Discrete Replacement Policies,” *European Journal of Operational Research*, Vol. 17, No. 3, pp. 382–392（1984).
[6] 海生直人,“無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察,” 経済科学研究，Vol. 18, No. 1, pp. 1– 8 （2014).
[7] 海生直人,“故障が定周期保全時点でのみ発見され無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察,” 経済科学研究，Vol. 19, No. 2, pp. 1–7（2016).

Abstract

A Note on Discrete Distribution Block Replacement Policy Taking Account of Single Renewal and Random Planning Horizon

Naoto Kaio

In this paper, we treat the extended discrete distribution block replacement policy taking account of single renewal and random planning horizon, where the planning horizon obeys a geometric distribution, especially. We adopt the total expected cost over a planning horizon as a criterion of optimality and obtain the optimal discrete distribution block replacement policy minimizing that expected cost. Finally, we illustrate the relationship between the result obtained in this paper and the existing one.

Keywords: Single renewal, Random planning horizon, Discrete distribution, Block replacement policy, Total expected cost over a planning horizon, Optimal policy, Expected cost per unit time in the steady state