

内生的経済成長と公債の持続可能性

——内生的人口成長モデルによる検討——

前 田 純 一

(受付 2017 年 10 月 30 日)

1 はじめに

本稿においては、Bräuninger (2003, 2005), Carlberg and Hansen (2013), Groezen, Leers, and Meijdam (2003) などにしたがいながら、財政赤字と公債が経済成長率や出生数におよぼす影響について検討をおこなう。分析は、Romer (1986) と Lucas (1988) によって展開された内生的経済成長モデルを基礎にしている。分析の単純化のために、彼らのモデルの基本的なアイデアを反映している AK モデルをもちいながら、Diamond (1965) によって展開された世代重複モデルによって分析をすすめていく。

分析においては、Bräuninger (2003, 2005), Carlberg and Hansen (2013) などによって展開された内生的経済成長モデルによって、公債の対 GDP 比率を固定したケースについて検討をすすめていく。そして、公債の対 GDP 比率を固定した場合、公債・資本比率が一定になる定常状態が2つ存在する可能性が示されるが、これらの定常状態のうち、1つは安定であり、もう1つは不安定である。しかしながら、公債の対 GDP 比率には定常状態が存在するための臨界値が存在し、この臨界値を超えた場合は定常状態は存在しなくなる。このとき、消費の時間選好率や子供をもつことから得られる効用が、定常状態の存在性に影響を与えることも確認され、同時に、公債の対 GDP 比率が子供の数に影響を与えることも確認される。すなわち、本稿での分析にもちいられているモデルは、財政赤字問題と少子化問題を同時にあつかえるモデルにもなっているのである。

本稿は以下のように構成される。第2節では、分析にもちいられるモデルが紹介される。第3節では、そのモデルをもちいて定常状態の存在性に関する分析がおこなわれる。第4節では、定常状態が存在する場合の安定性に関する分析がおこなわれる。第5節では、まとめがおこなわれ、同時に、今後の課題についても言及する。

2 モ デ ル

2.1 個 人

個人は2期間生存し、1期目（労働期）においては、労働市場に労働を供給して所得を得て、その所得によって消費をおこない、何人かの子供を育て、そして、2期目（引退期）のための貯蓄をおこなう。2期目においては、1期目の貯蓄によって消費をおこなう。このような個人の生涯について、もう少し詳しく検討しよう。

t 期において労働期にある代表的個人は、労働期において労働市場に1単位の労働を非弾力的に供給して所得を得て、 c_t^y の消費をおこない、また、所得の z の割合を子育てに充てながら n_t 人の子供を育てる。そして、所得の残りの部分は引退期の消費のために貯蓄(s_t)する。 $t+1$ 期においては、引退期の個人は貯蓄とその利子収入をもちいて c_{t+1}^o の消費をおこなう。

t 期に生まれた代表的個人の生涯効用は(1)によって与えられる。

$$u(c_t^y, n_t, c_{t+1}^o) = \log c_t^y + \gamma \log n_t + \beta \log c_{t+1}^o \quad (1)$$

ここで、 β は引退期の消費に対する通時的な割引率であり、 γ は子供の数から得られる効用に対する割引率である。

代表的個人は通時的予算制約に直面する。労働期の純所得は純賃金 $(1-\tau_t)w_t$ となり、ここで w_t は賃金率、 τ_t は所得税率である。純所得は、労働期の消費、子育ての費用、および、貯蓄に使われる。よって、労働期の予算制約は以下ようになる。

$$c_t^y = (1-\tau_t - zn_t)w_t - s_t \quad (2)$$

貯蓄の純利子率は $(1-\tau_{t+1})r_{t+1}$ であり、ここで、 r_{t+1} は $t+1$ 期の利子率である。このことから、引退期の消費は次式で与えられる。

$$c_{t+1}^o = \{1 + (1-\tau_{t+1})r_{t+1}\}s_t \quad (3)$$

以上より、代表的個人の生涯の予算制約は以下ようになる。

$$c_t^y + \frac{1}{1 + (1-\tau_{t+1})r_{t+1}} c_{t+1}^o + zn_t w_t = (1-\tau_t)w_t \quad (4)$$

個人は、生涯の予算制約にしたがって生涯効用を最大化するように、労働期の消費、引退期の消費、および、子供の数を決定している。(4)にしたがって(1)を最大化することで、以下の条件式を得る。

$$c_{t+1}^o = \beta\{1 + (1 - \tau_{t+1})r_{t+1}\}c_t^y \quad (5)$$

$$zw_t n_t = \gamma c_t^y \quad (6)$$

これらの条件式により、労働期の消費、引退期の消費、および、子供の数が次のように決定される。

$$c_t^y = \frac{1 - \tau_t}{1 + \beta + \gamma} w_t \quad (7)$$

$$c_{t+1}^o = \frac{\beta\{1 + (1 - \tau_{t+1})r_{t+1}\}(1 - \tau_t)}{1 + \beta + \gamma} w_t \quad (8)$$

$$n_t = \frac{\gamma(1 - \tau_t)}{(1 + \beta + \gamma)z} \quad (9)$$

2.2 政 府

政府は、政府支出と公債の利払いを賄うように所得税を課し、かつ、借入をおこなう。政府は、国民所得のある割合の大きさを財とサービスに対して支出する。なお、この割合は固定されているものとする。

$$G_t = gY_t \quad (10)$$

ここで、 G_t は政府支出を表し、政府の支出割合 g は定数であるとする。さらに、政府は国民所得のある割合の大きさの借入をおこなう。

$$B_t = bY_t \quad (11)$$

ここで、 B_t は政府借入を表し、借入割合 b は定数である。この財政赤字は公債発行で賄われ、同じ期の公債残高 D_t と合わせて、次の期の公債残高 D_{t+1} となる。

$$D_{t+1} = D_t + B_t \quad (12)$$

公債残高 D_t に対して r_t の割合の利払いをおこなわなければならないので、公債への利払額は $r_t D_t$ となる。

これらの支払いを賄うための財源の一部として、政府は要素所得と公債への利払いに対して τ_t の率で課税する。

$$T_t = \tau_t(Y_t + r_t D_t) \quad (13)$$

以上のことから政府の予算制約式は以下のようになる。

$$B_t + T_t = G_t + r_t D_t \quad (14)$$

(10), (11), (13) より (14) は次のようになる。

$$bY_t + \tau_t(Y_t + r_t D_t) = gY_t + r_t D_t \quad (15)$$

政府は、支出割合 (g) と公債発行額の対 GDP 比率 (b) を固定しており、また公債への利払い額も確定しているので、(15) より税率 (τ_t) が決定されることになる。

2.3 企業

i の添字で区別された多数の同質的な企業が単一財を生産しているとする。企業は、利用可能な労働力と資本ストックを雇用して生産活動をおこなうが、労働力は労働期の世代の人数と同じである。 t 期に企業 i に雇用される労働力は N_t^i 、資本ストックは K_t^i で表され、生産関数は次のコブ=ダグラス型のものであるとする。

$$Y_t^i = A(K_t^i)^\lambda (E_t N_t^i)^\mu, \quad (16)$$

ここで、 $A > 0, \lambda > 0, \mu > 0, \lambda + \mu = 1$ であり、 E_t は外生的に与えられた労働生産性のインデックスである。

各企業は完全競争の下で利潤を最大化するように生産活動をおこない、その結果、資本の限界生産力が利子率と等しくなるように資本の雇用量を調整し、労働の限界生産力が賃金率と等しくなるように労働の雇用量を調整する。

各企業の生産を総計した総生産関数は以下のようなようになる。

$$Y_t = AK_t^\lambda (E_t N_t)^\mu \quad (17)$$

ここで、労働生産性は労働 1 人当たりの資本に比例すると仮定し、内生的に決定されるものとする。

$$E_t = \frac{K_t}{N_t} \quad (18)$$

(18) より、総生産関数は、以下のように単純な形に変換される。

$$Y_t = AK_t \quad (19)$$

完全競争市場を仮定するならば、利子率と賃金率は資本と労働の供給と需要が等しくなるように調整されるので、利子率は資本の限界生産力に対応し、賃金率は労働の限界生産力に対応するように決定される。

$$r_t = \lambda A \quad (20)$$

$$w_t = \frac{\mu Y_t}{N_t} \quad (21)$$

3 定常状態の分析

3.1 定常状態の存在性

純労働所得から労働期の消費と子育て費用を差し引いた残りは、労働期の貯蓄になる。

$$s_t = (1 - \tau_t)w_t - c_t^y - zn_t w_t \quad (22)$$

労働世代の総貯蓄は $S_t = s_t N_t$ で与えられるので、まず個人の貯蓄について考える。(7) と (9) を (22) に代入すると、個人の貯蓄が次のように表される。

$$s_t = \frac{\beta(1 - \tau_t)}{1 + \beta + \gamma} w_t \quad (23)$$

次に、(21) を (23) に代入すると、総貯蓄関数が以下のようにになる。

$$S_t = \frac{\beta\mu(1 - \tau_t)}{1 + \beta + \gamma} Y_t \quad (24)$$

この労働期の世代の貯蓄は、資本市場において、次の期の公債と資本の購入にもちいられる。

$$D_{t+1} + K_{t+1} = \frac{\beta\mu(1 - \tau_t)}{1 + \beta + \gamma} Y_t \quad (25)$$

以上の考察から、このモデルによって表される経済は、次の5本の方程式によるシステムとして表される。ここで、(12) に (11) を代入したものを (12') としている。

$$D_{t+1} = D_t + bY_t \quad (12')$$

$$bY_t + \tau_t(Y_t + r_t D_t) = gY_t + r_t D_t \quad (15)$$

$$Y_t = AK_t \quad (19)$$

$$r_t = \lambda A \quad (20)$$

$$D_{t+1} + K_{t+1} = \frac{\beta\mu(1 - \tau_t)}{1 + \beta + \gamma} Y_t \quad (25)$$

ここで、 $\lambda, \mu, \gamma, b, g, A, D_t, K_t$ は外生変数であり、一方、 $r_t, \tau_t, D_{t+1}, K_{t+1}, Y_t$ は内生変数である。

この5本のシステムにもとづいて、この経済の成長経路について考察をすすめることにする。そのために、成長率を決定する成長要素について考察しよう。まず、公債の成長要素は、次のようにして求められる。(12)を D_t で除すると $D_{t+1}/D_t = 1 + bY_t/D_t$ となる。そして、 Y_t に(19)を代入し、公債-資本比率を表した $x_t \equiv D_t/K_t$ を代入すると、公債の成長要素が次のように表される。

$$\frac{D_{t+1}}{D_t} = 1 + \frac{bA}{x_t} \quad (26)$$

次に、資本の成長要素について考察するために、まず内生的に決定される税率について考えよう。(15)から $\tau_t = \{(g-b)Y_t + r_t D_t\} / (Y_t + r_t D_t)$ となるので、 Y_t を AK_t と置き換え、 r_t を λA と置き換えると、 $\tau_t = \{(g-b)K_t + \lambda D_t\} / (K_t + \lambda D_t)$ となる。さらに、分子と分母を K_t で除し、 $x_t = D_t/K_t$ とおくと、税率に関する次の式を得る。

$$1 - \tau_t = \frac{1 + b - g}{1 + \lambda x_t} \quad (27)$$

それでは、資本の成長要素を求めることにしよう。(25)に(19)と(27)を代入すると、 $D_{t+1} + K_{t+1} = \beta\mu(1+b-g)AK_{t+1} / \{(1+\beta+\gamma)(1+\lambda x_t)\}$ となる。(12)を代入し、 K_{t+1} について解き、 K_t で除し、 $x_t = D_t/K_t$ をもちいると、資本の成長要素が次のように表される。

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = A \left\{ \frac{\beta\mu(1+b-g)}{(1+\beta+\gamma)(1+\lambda x_t)} - b \right\} - x_t \quad (28)$$

公債の成長要素と同様に、資本の成長要素も公債-資本比率に依存しているので、公債-資本比率が一定であれば、2つの成長要素も一定になる。ゆえに、定常状態においては、公債は資本と同じ率で成長することになるので、公債-資本比率も一定になる。そこで、(26)と(28)を等しいとおく。

$$1 + \frac{bA}{x_t} = A \left\{ \frac{\beta\mu(1+b-g)}{(1+\beta+\gamma)(1+\lambda x_t)} - b \right\} - x_t \quad (29)$$

(29)をもとに、定常状態について考察をすすめよう。そのために、 $F(x_t, b) \equiv 1 + \frac{bA}{x_t} + x_t$, および、 $G(x_t, b) \equiv A \left\{ \frac{\beta\mu(1+b-g)}{(1+\beta+\gamma)(1+\lambda x_t)} - b \right\}$ と定義する。定常状態においては $F(x, b) = G(x, b)$ となるが、それぞれの関数の形状を確認することで、2つの関数が交点をもつ可能性があるかどうかについて検討をすすめよう。

x_t が無限大に発散するとき、関数 F は無限大に発散し、 x_t がゼロに収束するときも無限大に発散する。ゆえに、関数 F は $x_{min} = \sqrt{bA}$ において最小値 $F(x_{min}, b) = 1 + 2\sqrt{bA}$ をとる。一

方、関数 G は x_t の増加に伴って、 $G(0, b)$ から単調に減少していく。

以上のことから、定常状態の存在性に関して3つの可能性を考えることができる：(1) 関数 F と G が2つの交点を持ち、2つの定常状態が存在する場合。(2) 関数 F と G が接しており、1つの定常状態しか存在しない場合。(3) F と G が交点をもたず、定常状態が存在しない場合。以上の3つの可能性が存在することになるが、図.1はこれらの3つの場合を描いている。

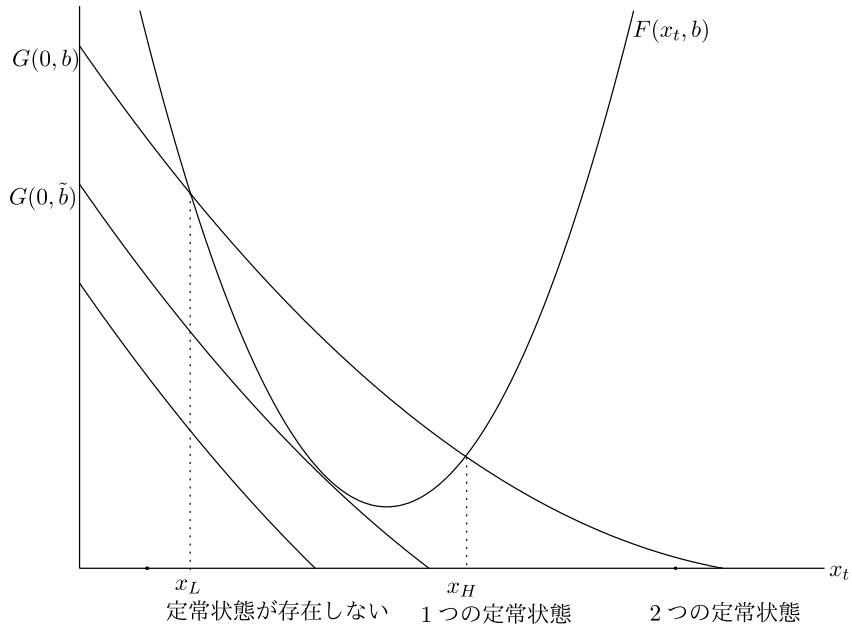


図.1

$\partial F / \partial \beta = 0$ であり、 $\partial G / \partial \beta > 0$ なので、引退期の消費への割引率は F には影響を及ぼさないが、 G は増加させる。ゆえに、十分に大きい β に対して2つの定常解が存在する可能性がある。さらに、 $\partial F / \partial \gamma = 0$ であり、 $\partial G / \partial \gamma < 0$ なので、子供の効用への割引率は F には影響を及ぼさないが、 G は減少させる。したがって、十分に小さい γ に対して2つの定常解が存在する可能性がある。

β が十分に大きく、 γ が十分に小さいと仮定しよう。 $\partial F / \partial b > 0$ であり、 $\partial G / \partial b < 0$ であることから、 b の増加は F の増加と G の減少をもたらす。よって、低い水準の b に対しては2つの定常解が存在する可能性がある。また、定常状態が一つしか存在しない状況に対応した b の臨界値 \tilde{b} が存在し、 $b > \tilde{b}$ の場合は定常状態は存在しない。 β の増加と γ の減少は \tilde{b} を増加させる。

3.2 出生数への影響

(27) を (9) に代入することで、子供の数を以下のように表すことができる。

$$n_t = \frac{\gamma(1+b-g)}{z(1+\beta+\gamma)(1+\lambda x_t)} \quad (30)$$

定常状態においては公債－資本比率は定数になるので、定常状態での値を \bar{x} とおくことにする。このことから、(30) より子供の数は定数になるので、定常状態での出生数を \bar{n} で表すことにする。

$$\bar{n} = \frac{\gamma(1+b-g)}{z(1+\beta+\gamma)(1+\lambda \bar{x})} \quad (31)$$

$\partial \bar{n} / \partial \gamma > 0$ なので、子供の数から得られる効用に対する割引率の増加は定常状態での子供の数 \bar{n} を増加させる。また、 $\partial \bar{n} / \partial \beta < 0$ なので、通時的割引率の増加は \bar{n} を減少させる。さらに、 $\partial \bar{n} / \partial b > 0$ なので、公債の対 GDP 比率の増加は出生数を増加させることになる。

これは、次のようなメカニズムによるものと考えられる。税率の決定式 (27) より b が増加すると τ が減少する。これは、政府の予算制約である (15) を考えると、公債による政府収入が増加すれば、その分税収を抑えることができるためである。さらに、(9) より τ の減少は n_t を増加させるが、これは、代表的個人の予算制約である (4) より、税率の低下は可処分所得を増加させ、子供の養育費に回せる部分が大きくなるためである。

4 安定性

このモデルの動学システムは、公債と資本の成長要素に関する 2 本の方程式で表される。そこで、その 2 本の方程式を再度掲載することにする。

$$\frac{D_{t+1}}{D_t} = 1 + \frac{bA}{x_t} \quad (26)$$

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = A \left\{ \frac{\beta\mu(1+b-g)}{(1+\beta+\gamma)(1+\lambda x_t)} - b \right\} - x_t \quad (28)$$

2つの成長要素は公債－資本比率に依存している。まず、公債の成長について検討しよう。(26) が示しているように、公債－資本比率がゼロに向かうとき、公債の成長要素は無限大に発散する。逆に、公債－資本比率が無限大に発散するとき、成長要素は 1 に収束する。図 2 において、(26) を表した右下がりの D 線が描かれている。また、(28) によって、資本の成長要素は公債－資本比率の減少関数であることが示されている。したがって、(28) を表した K 線も右下がりである。

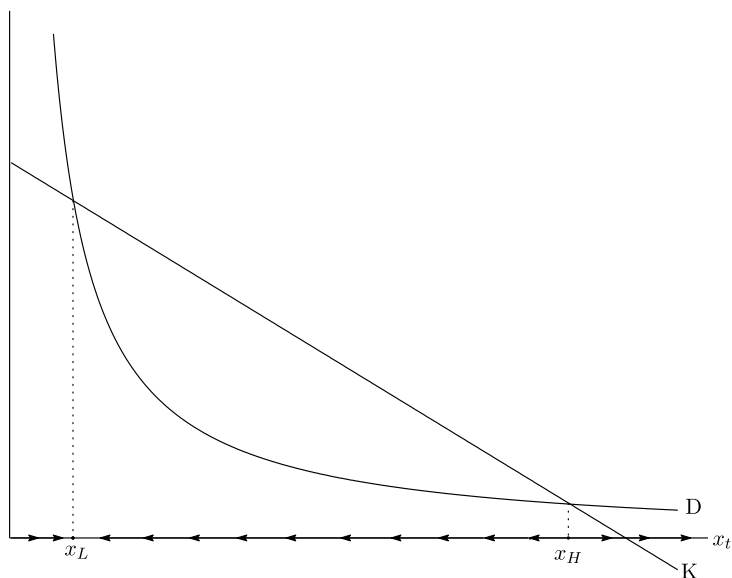


図 2

図 2は成長の図式を表している。図には、定常状態が2つ存在する場合が示されている。公債－資本比率の初期値が x_L を下回る場合は、公債は資本よりも速く成長する。ゆえに、公債－資本比率は x_L に向かって増加する。公債－資本比率の初期値が x_L と x_H の間にある場合は、資本は公債より速く成長し、公債－資本比率は x_L に向かって減少する。公債－資本比率の初期値が x_H を上回る場合は、公債は資本より速く成長し、公債－資本比率は増加していく。

図 2によって、2つの定常状態が存在する場合における、それぞれの定常状態の安定性について検討がおこなわれたが、公債－資本比率の成長要素について検討をおこなうことで、さらに詳しく安定性について分析をすすめてみよう。

公債－資本比率の成長要素は次のように表される。

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{D_{t+1} / D_t}{K_{t+1} / K_t} \quad (32)$$

(32) より、公債－資本比率の成長要素は、公債の成長要素と資本の成長要素の比率に対応している。そこで、 $D_g \equiv D_{t+1} / D_t$ 、および、 $K_g \equiv K_{t+1} / K_t$ と定義することにする。

$$x_{t+1} = \frac{D_g}{K_g} x_t \quad (33)$$

(33) を微分して、公債－資本比率の変化率について考える。

$$\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = \frac{dD_g}{dx_t} \frac{1}{K_g} + \frac{D_g}{K_g} - \frac{dK_g}{dx_t} \frac{D_g}{K_g^2} x_t \quad (34)$$

定常状態を想定し、 $D_g = K_g$, $x_{t+1} = x_t$ とおくと、(34)は(35)のように表される。

$$\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = 1 + \frac{1}{K_g} \left(\frac{dD_g}{dx_t} - \frac{dK_g}{dx_t} x_t \right) \quad (35)$$

(35)に(26)と(28)を代入する。

$$\frac{dD_g}{dx_t} = -\frac{bA}{x_t^2} \quad (36)$$

$$\frac{dK_g}{dx_t} = -1 - \frac{\beta\mu(1+b-g)A}{1+\beta+\gamma} \frac{\lambda}{(1+\lambda x_t)^2} \quad (37)$$

(36)と(38)を代入すると(35)は(38)のように表される。

$$\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = 1 + \frac{1}{K_g} \left[-\frac{bA}{x_t^2} + \left\{ 1 + \frac{\lambda\beta\mu(1+b-g)A}{(1+\beta+\gamma)(1+\lambda x_t)^2} \right\} x_t \right] \quad (38)$$

(38)にもとづいて公債－資本比率の変化率について考察してみよう。 x_t がゼロに収束するとき、(38)の右辺のカッコ内はマイナス無限大に発散する。 x_t が無限大に発散するとき、カッコ内は無限大に発散する。このことから、 x_t の低い水準に対しては $dx_{t+1}/dx_t < 1$ となり、 x_t の高い水準に対しては $dx_{t+1}/dx_t > 1$ となることが考えられる。ゆえに、定常状態が2つ存在する場合は、低い公債－資本比率に対応する定常状態においては $dx_{t+1}/dx_t < 1$ となり、高い公債－資本比率に対応する定常状態においては $dx_{t+1}/dx_t > 1$ となるのである。以上の考察より、 x_L は安定であり、 x_H は不安定であると考えられる。

5 おわりに

本稿においては、世代重複モデルの枠組みにおいて、財政赤字による公債発行が経済成長率や出生数に及ぼす影響について考察がおこなわれた。そして、政府が公債の対GDP比率を固定した場合、この比率が臨界値を下回るときは2つの定常状態が存在し、資本、アウトプット、および、公債は同じ率で成長することが確認された。また、定常状態の1つは安定であり、もう1つは不安定であることも確認された。さらに、将来消費に対する割引率や子供ももつことから得られる効用に対する割引率が定常状態の存在性に影響を与えることも確認された。将来消費に対する割引率の増加、および、子供をもつことから得られる効用に對

する割引率の減少は、2つの定常状態が存在する可能性を拡大することになる。なお、公債の対 GDP 比率が臨界値を越える場合は、定常状態は存在しない。

今後の課題としては、次のようなことが残されている。まず、定常状態の存在性については可能性のみの検討にとどまっているが、2つの定常状態が存在するための十分条件について検討することは重要な課題である。パラメータの制約を検討することになると思われるが経済的に意味のあるパラメータ制約を導出できれば、さらなる分析にすすむことができるであろう。次に、本稿においては、政府が公債の対 GDP 比率を固定する場合について検討をおこなったが、逆に税率を固定して公債の対 GDP 比率を変数とする場合についての検討をすすめることも早急な課題である。現実的にも、税率ではなく公債発行量を調整している場合が多いので、この検討をすすめることは重要であると考えられる。

参 考 文 献

- [1] Bräuninger, M., (2003), *Public Debt and Endogenous Growth*, Physica-Verlag.
- [2] Bräuninger, M., (2005), "The Budget Deficit, Public Debt, and Endogenous Growth," *Journal of Public Economic Theory*, 7, pp.827-840.
- [3] Carlberg, M., (1988), *Public Debt, Taxation and Government Expenditures in a Growing Economy*, Berlin.
- [4] Carlberg, M., (1995), *Sustainability and Optimality of Public Debt* (1st ed.), Physica-Verlag.
- [5] Carlberg, M., and A. Hansen, (2013), *Sustainability and Optimality of Public Debt* (2nd ed.), Physica-Verlag.
- [6] Diamond, P., (1965), "National Debt in a Neoclassical Growth Model," *American Economic Review*, 55, pp.1126-1150.
- [7] Groezen, B., T. Leers, and L. Meijdam, (2003), "Social Security and Endogenous Fertility: Pensions and Child Allowances as Siamese Twins," *Journal of public Economics*, 87, pp.233-251.
- [8] Hansen, A., (2013), *Economic Growth and Public Debt under a Declining Population*, Tectum.
- [9] Ihuri, T., (1988), "Optimal Deficits in a Growing Economy," *Journal of the Japanese and International Economies*, 2, pp.526-542.
- [10] Lucas, R., (1988), "On the Mechanics of Economic Development," *Journal of Monetary Economics*, 22, pp.2-42.
- [11] Romer, P., (1986), "Increasing Returns and Long-run Growth," *Journal of Political Economy*, 94, pp.1002-1035.