ランダムな計画期間を伴う
離散形分布年令取換え政策に関する一考察

海　生　直　人

（受付　2018 年 4 月 9 日）

あ　ら　ま　し

本稿では離散形分布年令取換えモデルにおいて計画期間がある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従う場合を議論する。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布年令取換え政策を求める。求められた結果より従来の結果が特別な場合として得られることを示す。

キーワード　ランダムな計画期間，離散形分布，年令取換え政策，計画期間全体の総期待費用，最適政策，定常状態における単位時間当りの期待費用

1.　は　じ　め　に

基本的な保全モデルの 1 つとして年令取換えモデルは多くの研究者によって議論され，その拡張モデルも種々考案されている。最も基本的なモデルは連続形分布における 1 ユニットシステムに対するものである（Barlow and Proschan［1, p. 85］，海生［4, pp. 15－16］，Osaki［5, pp. 200－202］参照）。ユニットはある前もって定められた時刻までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ，その時刻までに故障しなければその時刻で新しい同じユニットと交換される。ユニットの動作開始からそのユニットの取換え／交換までの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。計画期間は無限大である。離散形分布に対する基本的なモデルに関しては Nakagawa and Osaki［2］，Nakagawa［3］，海生［4, pp. 16－17］を参照。

本稿では計画期間がある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従う場合を議論する。計画期間が無限大の場合には取換え／交換の際に新しい同じユニットで取換え／交換し続けることになるが，計画期間が離散形確率変数の場合には有限期間内での計画打切りが可能となる。これは製品の在庫切れや技術革新を考慮することと同じ意味を持つ（Khatab et al.［6］，海生［7］参照）。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布年令取換え政策を求める。さらに，求められた結果より既存の結果

が特別な場合として得られることを示す。

2. モデルと仮定

本稿では以下のモデルを取扱う。システムとしては1ユニットシステムを考える。ユニットはある前もって定められた時刻までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ，その時刻までに故障しなければその時刻で新しい同じユニットと交換される。ユニットの動作開始からそのユニットの取換え／交換までの期間を1サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。取換え／交換は瞬時になされ，取換えられた／交換された新しいユニットはただちに動作を引継ぐ。各故障は発生と同時に発見され，故障ユニットは廃棄される。計画期間はある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従い，ユニットは時刻0で動作を始める。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布年令取換え政策を求める。

以下の諸量を導入する。

1） c_r　故障ユニットの各取換え（大修理）に対する費用
　c_e　非故障ユニットの各交換に対する費用，$c_r > c_e$ とする。

2） J　計画期間（離散形確率変数，$J = 0, 1, 2,...$）
　$g(j)$　計画期間の確率関数（$j = 0, 1, 2,...; g(0) = 0$）
　$G(j)$　同累積分布関数
　$1 / \mu$　同平均

3） $f(d)$　ユニットの故障時間の確率関数（$d = 0, 1, 2,...; f(0) = 0$）
　$F(d)$　同累積分布関数
　$r(d)$　同故障率
　$1 / \lambda$　同平均（製品の期待寿命時間）

4） N　ある前もって定められた予防保全年令。ユニットはある前もって定められた時刻 N までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ（事後保全），時刻 N までに故障しなければ時刻 N で新しい同じユニットと交換される（予防保全）。

5） $C(N)$　計画期間全体の総期待費用
　$CI(N)$　定常状態における単位時間当りの期待費用

6） $\bar{\psi}$　$1 - \psi$，ψ は任意の関数

7） $\zeta(N)$　$\sum_{d=1}^{N} \bar{F}(d-1)$，1サイクルの平均時間，$\zeta(\infty) = 1/\lambda$

3．解析と定理

計画期間 J が任意分布 $G(j)$ に従うときの計画期間全体の総期待費用は

$$C(N)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k\zeta(N)+1}^{(k+1)\zeta(N)}k(c_rF(N)+c_e\bar{F}(N))g(j) \tag{3.1}$$

となる。

以下の議論においては計画期間 J が幾何分布,

$$g(j)=pq^{j-1},\ \ j=1,2,3,...;0<p<1,q=1-p \tag{3.2}$$

に従う場合を議論する。この場合，計画期間全体の総期待費用は

$$C(N)=\frac{(c_rF(N)+c_e\bar{F}(N))q^{\zeta(N)}}{1-q^{\zeta(N)}} \tag{3.3}$$

となる。ここで,

$$C(0)=\infty\ , \tag{3.4}$$

および

$$C(\infty)=\frac{c_rq^{1/\lambda}}{1-q^{1/\lambda}} \tag{3.5}$$

である。従って $N=0$ では $C(N)$ は最小とならない，すなわち $0<N$ となる（$N=1,2,3,...$）。

次式を定義する。

$$H(N)=(c_r-c_e)r(N+1)(1-q^{\zeta(N)})+(c_rF(N)+c_e\bar{F}(N))\frac{1-q^{-\bar{F}(N)}}{\bar{F}(N)}\ . \tag{3.6}$$

このとき以下の補題を得る。

［補題3.1］

総期待費用 $C(N)$ を最小にする最適予防保全年令 N^* は $0<N^*$ となる（$N^*=1,2,3,...$）。□

以上の結果より，計画期間全体の総期待費用 $C(N)$ を最小にする最適予防保全年令 N^* に対して以下の定理を得る。

［定理3.2］

（1） $H(N)$ が狭義単調増加であるとき（$N>0$）次のことが成立する。

（i） もし $H(\infty)>0$ ならば，そのとき

$$H(N^*-1)<0 \text{ かつ } H(N^*)\geq 0 \tag{3.7}$$

を満足する，総期待費用 $C(N)$ を最小にする有限でただ 1 つの最適予防保全年令 N^*（$0<N^*<\infty$）が存在し，総期待費用に関して以下の関係,

$$(c_r-c_e)\left[-\frac{1-q^{\zeta(N^*-1)}}{1-q^{-\bar{F}(N^*-1)}}+1\right]r(N^*)\frac{q^{\zeta(N^*)}}{1-q^{\zeta(N^*)}}\bar{F}(N^*-1)<C(N^*)$$
$$\leq -(c_r-c_e)r(N^*+1)\frac{\bar{F}(N^*)}{q^{-\zeta(N^*)}-q^{-\zeta(N^*+1)}} \tag{3.8}$$

が成立する。

（ii）　もし $H(\infty)\leq 0$ ならば，そのとき最適予防保全年令は $N^*\to\infty$ となる。すなわち予防保全（ユニットの交換）はせず事後保全（大修理，取換え）のみを行う。そのときの期待費用は

$$C(\infty)=\frac{c_r q^{1/\lambda}}{1-q^{1/\lambda}} \tag{3.9}$$

となる。

（2）　$H(N)$ が広義単調減少であるとき（$N>0$）最適予防保全年令は $N^*\to\infty$ となる。□

4.　む　す　び

本稿では離散形分布年令取換え政策において計画期間がある既知の離散形確率分布，特に幾何分布に従う場合を考察した。計画期間全体の総期待費用を評価関数として適用し，その総期待費用を最小にする最適離散形分布年令取換え政策を求めた。

最後に計画期間が無限大の場合に言及する。これは本稿で議論した，計画期間が従う幾何分布のパラメータ q を 1 （p を0）とすることと同様である。この場合，当然のことであるが総期待費用式（3.3）は $\lim_{q\to 1}C(N)=\infty$ となる。従って，定常状態における単位時間当りの期待費用 $CI(N)$ を評価関数として議論する。定常状態における単位時間当りの期待費用は

$$\begin{aligned} CI(N) &= \lim_{p\to 0}\frac{C(N)}{1/p} \\ &= \frac{c_r F(N)+c_e\bar{F}(N)}{\sum_{d=1}^{N}\bar{F}(d-1)} \\ &= \frac{c_r F(N)+c_e\bar{F}(N)}{\zeta(N)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

となり，既存の結果と一致する（Nakagawa and Osaki［2］，Nakagawa［3］，海生［4, pp. 16–17］参照)。

本稿で取扱ったモデルはランダムな計画期間を伴う離散形分布年令取換え政策の概念によるものであるが，連続形分布年令取換え政策に関しては海生［7］を参照するとよい。

文　献

［1］R. E. Barlow and F. Proschan, “Mathematical Theory of Reliability,” John Wiley, New York, 1965.

［2］T. Nakagawa and S. Osaki, “Discrete Time Age Replacement Policies,” *Operational Research Quarterly*, Vol. 28, No. 4i, pp. 881–885（1977）.

［3］T. Nakagawa, “A Summary of Discrete Replacement Policies,” *European Journal of Operational Research*, Vol. 17, No. 3, pp. 382–392（1984）.

［4］海生直人，“確率的保全問題に関する研究，”広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第52号），1989.

［5］S. Osaki, “Applied Stochastic System Modeling,” Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1992.

［6］A. Khatab, N. Rezg and D. Ait-Kadi, “Optimal Replacement with Minimal Repair Policy for a System Operating over a Random Time Horizon,” *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 415–423（2011）.

［7］海生直人，“ランダムな計画期間を伴う年令取換え政策に関する一考察，”経済科学研究，Vol. 20, No. 1, pp. 1– 6（2016 9月）.

Abstract

A Note on Discrete Distribution Age Replacement Policy
Taking Account of
Random Planning Horizon

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the extended discrete distribution age replacement policy, taking account of random planning horizon, where the planning horizon obeys a geometric distribution, especially. We adopt the total expected cost over a planning horizon as a criterion of optimality and obtain the optimal discrete distribution age replacement policy minimizing that expected cost. Finally, we illustrate the relationship between the result obtained in this paper and the existing one.

Keywords: Random planning horizon, Discrete distribution, Age replacement policy, Total expected cost over a planning horizon, Optimal policy, Expected cost per unit time in the steady state