割引率を考慮した無償保証期間を伴う 年令取換え政策に関する一考察

海　生　直　人

（受付　2018 年 9 月 10 日）

あ　ら　ま　し

本稿では年令取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した拡張モデルを議論する。評価関数としては総期待割引費用を採用し，それを最小にする最適政策を求める。無償保証期間を考えることは総期待割引費用を減少させるだけでなく，最適予防保全年令を無償保証期間に近づける。さらに，本稿で得られた結果と既存の結果との関係を示す。

キーワード　無償保証期間，年令取換え政策，総期待割引費用，連続形割引率，最適政策

1. は　じ　め　に

本稿では基本的な保全政策の 1 つとして知られる年令取換え政策について考察する。年令取換えモデルとは以下のものである（Barlow and Proschan［1, p. 85］参照)。最も基本的なモデルは 1 ユニットシステムに対するものであり，ユニットはある前もって定められた時刻までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ，その時刻までに故障しなければその時刻で新しい同じユニットと交換される。ユニットの動作開始からそのユニットの取換え／交換までの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。

本稿ではユニットの無償保証期間［2, 3］を考慮した年令取換え政策を考察する。最初に基本的な年令取換え政策を既存の結果よりまとめる［4, 5, 6]。次に無償保証期間を付加して年令取換え政策を議論する。無償保証期間と予防保全年令の大小関係においてそれぞれの状況下での政策を考察し，総合的な年令取換え政策を議論する。最後に基本的な年令取換え政策との比較を行う。評価関数としては総期待割引費用を適用し，その総期待割引費用を最小にする最適政策を求める。

以下の諸量を導入する。

1）　C_d　1 回当りの製品（ユニット）故障に対するダウンタイム費用

　　C_r　1 回当りの製品（ユニット）購入に対する購入費用

2）　w　無償保証期間，すなわち［$0, w$］における故障に対しては無償でユニットが供給さ

れる。但し，ダウンタイム費用 C_d は発生する。

t_0　年令取換え政策における予防保全年令。ユニットはある前もって定められた時刻 t_0 までに故障したならばその故障時点で新しい同じユニットと取換えられ，時刻 t_0 までに故障しなければ時刻 t_0 で新しい同じユニットと交換される。

3） $f(t)$　製品の寿命時間の確率密度関数（$t \geq 0$）

$F(t)$　同累積分布関数

$\bar{F}(t)$　同信頼度関数

$r(t)$　（瞬間）故障率

$1/\lambda$　製品の期待寿命時間

4） α　連続形（指数形）の割引率（$\alpha > 0$）。t 時間経過後 1 単位の費用は $exp(-\alpha t)$ となる。

5） $\bar{\psi}(\cdot)$ $1-\psi(\cdot)$，$\psi(\cdot)$ は任意の関数である。

$\psi^*(\alpha)$　$\int_0^\infty e^{-\alpha t} d\psi(t)$

6） $SD_i(t_0)$ $i = 0, 1, 2$　総期待割引費用

$i = 0$：$w = 0$ のとき

$i = 1$：$0 < w \leq t_0$ のとき

$i = 2$：$0 \leq t_0 < w$ のとき

2.　基本的な年令取換え政策

最初に無償保証期間を伴わない，すなわち $w = 0$ の場合の基本的な年令取換え政策を既存の結果よりまとめる［4, 5, 6］。

モデルは以下のものである。ユニットがある前もって定められた時刻 t_0（$0 \leq t_0$）まで故障しないならば，ユニットは時刻 t_0 で，費用 C_r を伴って新しい同じユニットと交換されるが，時刻 t_0 までに故障するならば，その故障時点で，費用 $C_d + C_r$ を伴って故障ユニットは新しい同じユニットと取換えられる。ユニットの動作開始からそのユニットの交換／取換えまでの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。

総期待割引費用は

$$SD_0(t_0) = \frac{(C_d + C_r)\int_0^{t_0} e^{-\alpha t} dF(t) + C_r e^{-\alpha t_0} \bar{F}(t_0)}{\alpha \int_0^{t_0} e^{-\alpha t} \bar{F}(t) dt} \tag{2.1}$$

となる。以下の式を定義する。

$$Q(t_0) = r(t_0)\int_0^{t_0} e^{-\alpha t} \bar{F}(t) dt - \int_0^{t_0} e^{-\alpha t} dF(t). \tag{2.2}$$

そのとき，総期待割引費用 $SD_0(t_0)$ を最小にする最適予防保全年令 t_0^* に対して以下の定理を得る。

［定理**2.1**］

（1） $r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t > 0$）次のことが成立する。

（i） もし $Q(\infty) > C_r / C_d$，すなわち $r(\infty) > (C_r + C_d F^*(\alpha)) / (C_d \overline{F}^*(\alpha) / \alpha)$ ならば，そのとき

$$Q(t_0^*) = C_r / C_d \tag{2.3}$$

を満足する，総期待割引費用 $SD_0(t_0)$ を最小にする有限でただ 1 つの最適予防保全年令 t_0^*（$0 < t_0^* < \infty$）が存在し，そのときの総期待割引費用は

$$SD_0(t_0^*) = \frac{C_d}{\alpha} r(t_0^*) - C_r \tag{2.4}$$

となる。

（ii） もし $Q(\infty) \le C_r / C_d$，すなわち $r(\infty) \le (C_r + C_d F^*(\alpha)) / (C_d \overline{F}^*(\alpha) / \alpha)$ ならば，そのとき最適予防保全年令は $t_0^* \to \infty$ となる。すなわち，ユニットは故障するまで動作を続ける。そのときの総期待割引費用は

$$SD_0(\infty) = (C_d + C_r) \frac{F^*(\alpha)}{\overline{F}^*(\alpha)} \tag{2.5}$$

となる。

（2） $r(t)$ が単調減少であるとき（$t > 0$）最適予防保全年令は $t_0^* \to \infty$ となる。□

3. 無償保証期間を伴う年令取換え政策

前節では無償保証期間を伴わない（$w = 0$）基本的な年令取換え政策を取扱ったが，本節では無償保証期間を伴う場合を取扱う。無償保証期間内でのユニットの故障に対する取換えに関しては購入費用 C_r は免除され，ダウンタイム費用 C_d のみが発生する。以下においては無償保証期間と予防保全年令の大小関係においてそれぞれの状況下での最適政策を考察し，その結果に基づき総合的な年令取換え政策を議論する。

3.1 無償保証期間が予防保全年令以下の場合

$0 < w \le t_0$ の場合を取扱う。

総期待割引費用は

$$SD_1(t_0)=\frac{(C_d+C_r)\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}dF(t)+C_re^{-\alpha t_0}\bar{F}(t_0)-C_r\int_0^{w}e^{-\alpha t}dF(t)}{\alpha\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt} \tag{3.1}$$

となる。このとき総期待割引費用 $SD_1(t_0)$ を最小にする最適予防保全年令 t_1^* に対して以下の補題を得る。

[**補題3.1**]

$0<w\le t_0$ において以下が成立する。

(1) $r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

(i) もし $Q(\infty)\le(C_r-C_r\int_0^{w}e^{-\alpha t}dF(t))/C_d$ ならば，そのとき総期待割引費用 $SD_1(t_0)$ を最小にする最適予防保全年令 t_1^* は $t_1^*\to\infty$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(\infty)=\frac{(C_d+C_r)F^*(\alpha)-C_r\int_0^{w}e^{-\alpha t}dF(t)}{\bar{F}^*(\alpha)} \tag{3.2}$$

となる。

(ii) もし $Q(w)<(C_r-C_r\int_0^{w}e^{-\alpha t}dF(t))/C_d<Q(\infty)$ ならば，そのとき

$$Q(t_1^*)=(C_r-C_r\int_0^{w}e^{-\alpha t}dF(t))/C_d \tag{3.3}$$

を満足する有限でただ 1 つの最適予防保全年令 t_1^*（$\mathrm{w}<t_1^*<\infty$）が存在し，そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(t_1^*)=\frac{C_d}{\alpha}r(t_1^*)-C_r \tag{3.4}$$

となる。

(iii) もし $Q(w)\ge(C_r-C_r\int_0^{w}e^{-\alpha t}dF(t))/C_d$ ならば，そのとき最適予防保全年令は $t_1^*=w$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(t_1^*)=SD_1(w)=\frac{C_d\int_0^{w}e^{-\alpha t}dF(t)+C_re^{-\alpha w}\bar{F}(w)}{\alpha\int_0^{w}e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt} \tag{3.5}$$

となる。

（2） $r(t)$ が単調減少であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

（i） もし

$$SD_1(w) \geq SD_1(\infty), \tag{3.6}$$

すなわち

$$\begin{aligned}(C_d\int_0^w e^{-\alpha t}dF(t)+C_r e^{-\alpha w}\bar{F}(w))\bar{F}^*(\alpha) \\ \geq ((C_d+C_r)F^*(\alpha)-C_r\int_0^w e^{-\alpha t}dF(t))\alpha\int_0^w e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt\end{aligned} \tag{3.7}$$

ならば，$t_1^* \to \infty$ となる。

（ii） もし

$$SD_1(w) < SD_1(\infty), \tag{3.8}$$

すなわち

$$\begin{aligned}(C_d\int_0^w e^{-\alpha t}dF(t)+C_r e^{-\alpha w}\bar{F}(w))\bar{F}^*(\alpha) \\ < ((C_d+C_r)F^*(\alpha)-C_r\int_0^w e^{-\alpha t}dF(t))\alpha\int_0^w e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt\end{aligned} \tag{3.9}$$

ならば，$t_1^* = w$ となる。□

3.2 無償保証期間が予防保全年令を超える場合

$0 \leq t_0 < w$ の場合を取扱う。

総期待割引費用は

$$SD_2(t_0) = \frac{C_d\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}dF(t)+C_r e^{-\alpha t_0}\bar{F}(t_0)}{\alpha\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt} \tag{3.10}$$

となる。以下の式を定義する。

$$W(t_0) = (C_d-C_r)Q(t_0)-C_r. \tag{3.11}$$

このとき総期待割引費用 $SD_2(t_0)$ を最小にする最適予防保全年令 t_2^* に対して以下の補題を得る。

［**補題3.2**］

$0 < t_0 < w$ において以下が成立する。

（a） $C_d - C_r > 0$ のとき次のことが成立する。

（1） $r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t > 0$）次のことが成立する。

（i） もし $Q(w) \le C_r/(C_d - C_r)$ ならば，そのとき総期待割引費用 $SD_2(t_0)$ を最小にする最適予防保全年令 t_2^* は $t_2^* = w$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_2(t_2^*) = SD_2(w) = \frac{C_d \int_0^w e^{-\alpha t} dF(t) + C_r e^{-\alpha w} \bar{F}(w)}{\alpha \int_0^w e^{-\alpha t} \bar{F}(t) dt} \tag{3.12}$$

となる。

（ii） もし $Q(w) > C_r/(C_d - C_r)$ ならば，そのとき

$$Q(t_2^*) = C_r/(C_d - C_r) \tag{3.13}$$

を満足する有限でただ 1 つの最適予防保全年令 t_2^*（$0 < t_2^* < w$）が存在し，そのときの総期待割引費用は

$$SD_2(t_2^*) = \frac{C_d - C_r}{\alpha} r(t_2^*) - C_r \tag{3.14}$$

となる。

（2） $r(t)$ が単調減少であるとき（$t > 0$）最適予防保全年令は $t_2^* = w$ となる。

（b） $C_d - C_r \le 0$ のとき次のことが成立する。

（1） $r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t > 0$）最適予防保全年令は $t_2^* = w$ となる。

（2） $r(t)$ が単調減少であるとき（$t > 0$）次のことが成立する。

（i） もし $W(w) \le 0$ ならば，そのとき最適予防保全年令は $t_2^* = w$ となる。

（ii） もし $W(w) > 0$ ならば，そのとき

$$W(t_2^*) = 0 \tag{3.15}$$

を満足する有限な最適予防保全年令 t_2^*（$0 < t_2^* < w$）が存在し，そのときの総期待割引費用は式（3.14）となる。□

3.3 大域的最適予防保全年令

前もって無償保証期間と予防保全年令の大小関係を知ることはできない。本節では補題3.1および3.2から大域的最適予防保全年令 t_w^* についてまとめる。

［**定理3.3**］

無償保証期間を w としたとき以下が成立する。

（1） $r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

（a） $C_d - C_r \le 0$ のとき次のことが成立する。

（i） もし $Q(w) < (C_r - C_r\int_0^w e^{-\alpha t}dF(t))/C_d$ ならば，$t_w^* = t_1^* > w$ となる。

（ii） もし $Q(w) \ge (C_r - C_r\int_0^w e^{-\alpha t}dF(t))/C_d$ ならば，$t_w^* = t_1^* = w$ となる。

（b） $C_d - C_r > 0$ のとき次のことが成立する。

（i） もし $Q(w) < (C_r - C_r\int_0^w e^{-\alpha t}dF(t))/C_d$ ならば，$t_w^* = t_1^* > w$ となる。

（ii） もし $(C_r - C_r\int_0^w e^{-\alpha t}dF(t))/C_d \le Q(w) \le C_r/(C_d - C_r)$ ならば，$t_w^* = w$ となる。

（iii） もし $Q(w) > C_r/(C_d - C_r)$ ならば，$t_w^* = t_2^* < w$ となる。

（2） $r(t)$ が単調減少であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

（a） $C_d - C_r \le 0$ のとき次のことが成立する。

（i） もし $W(w) \le 0$ ならば，$t_w^* = t_1^*$ となる。

（ii） もし $W(w) > 0$ ならば次のことが成立する。式（3.15）を満足する t_2^*（$0 < t_2^* < w$）において，もし $SD_2(t_2^*) \ge SD_1(\infty)$ ならば，$t_w^* = t_1^* \to \infty$ となり，もし $SD_2(t_2^*) < SD_1(\infty)$ ならば，$t_w^* = t_2^* < w$ となる。

（b） $C_d - C_r > 0$ のとき，$t_w^* = t_1^*$ となる。□

3.4 考　　察

無償保証期間を製品に付与することは総期待割引費用を減少させるのみでなく，最適予防保全年令を無償保証期間に近づける。換言すれば，t_0^* が w より大きいときには無償保証は最適予防保全年令を短くし w に近づける。逆に t_0^* が w より小さいときには無償保証は最適予防保全年令を長くし w に近づける。

4. む　す　び

本稿では年令取換えモデルに製品の故障に対する無償保証期間を考慮した拡張モデルを取扱った。評価関数として総期待割引費用を採用し，それを最小にする最適政策を求めた。無償保証期間を考慮することは総期待割引費用を減少させるだけでなく，最適予防保全年令を無償保証期間に近づける。ここでは評価関数として総期待割引費用を取扱ったが，定常状態における単位時間当りの期待費用を評価関数に採用している場合に関しては Yeh et al.［7］を参照するとよい。但し，故障率が単調減少する場合は取扱われていない。本稿の結果に摂

動法を適用することにより Yeh et al.［7］の結果を得ることができる。

文　献

［1］R. E. Barlow and F. Proschan, "Mathematical Theory of Reliability," John Wiley, New York, 1965.
［2］W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, "Warranty Cost Analysis," Marcel Dekker, New York, 1994.
［3］W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, "Product Warranty Handbook," Marcel Dekker, New York, 1996.
［4］B. Fox, "Age Replacement with Discounting," *Operations Research*, **14**, 1966, pp. 533–537.
［5］S. Osaki and T. Nakagawa, "A Note on Age Replacement," *IEEE Transactions on Reliability*, **R-24**(1), 1975, Apr., pp. 92–94.
［6］海生直人，"確率的保全問題に関する研究，" 広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第52号），1989.
［7］R. H. Yeh, G.-C. Chen and M.-Y. Chen, "Optimal Age—Replacement Policy for Nonrepairable Products Under Renewing Free—Replacement Warranty," *IEEE Transactions on Reliability*, **54**(1), 2005, Mar., pp. 92–97.

Abstract

A Note on Age Replacement Policy Taking Account of Free Warranty Interval with Discounting

Naoto Kaio

In this paper, we consider the extended age replacement model taking account of free warranty interval with discounting. We adopt the expected total discounted cost with a continuous discount rate as a criterion of optimality and seek the optimal policy minimizing that expected cost. When we apply the free warranty interval, the expected cost decreases and furthermore the optimal preventive maintenance age goes closer to the free warranty interval. Relationship with earlier contribution is presented.

Keywords: Free warranty interval, Age replacement policy, Expected total discounted cost, Continuous discount rate, Optimal policy