割引率を考慮した小修理および無償保証期間を伴うブロック取換え政策に関する一考察

海　生　直　人

（受付　2019 年 4 月 8 日）

あ　ら　ま　し

本稿では小修理を伴うブロック取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した保全モデルを議論する。評価関数として総期待割引費用を採用し，それを最小にする最適ブロック取換え政策を求める。無償保証を製品に与えることは総期待割引費用を減少させるだけでなく，最適予防保全周期を無償保証期間に近づける。

キーワード　小修理，無償保証期間，ブロック取換え政策，総期待割引費用，最適政策

1. は　じ　め　に

本稿ではブロック取換え政策について議論する。ブロック取換えモデルとは以下のものである（Barlow and Proschan［1, p. 95］，海生［3, pp. 12－13］，Osaki［4, pp. 203－204］参照）。最も基本的なモデルは 1 ユニットシステムに対するものである。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ（大修理），かつある前もって定められた時刻において新しい同じユニットと交換される。ユニットの交換から次のユニットの交換までの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。

本稿では製品（ユニット）の無償保証期間［5, 6］を考慮したブロック取換え政策をユニットの故障時に大修理に換えて，小修理を仮定することにより議論する。小修理によってはシステムの故障率は変化しない（Barlow and Proschan［1, p. 96］，海生［2, p. 22］，Osaki［4, p. 206］参照）。最初に基本的なブロック取換え政策を議論する。次に無償保証期間を付加してブロック取換え政策を議論する。無償保証期間と予防保全周期の大小関係においてそれぞれの状況下での政策を考察し，総合的なブロック取換え政策を議論する。最後に基本的なブロック取換え政策との比較を行う。評価関数としては総期待割引費用を適用し，その総期待割引費用を最小にする最適政策を求める。

以下の諸量を導入する。

1）　C_d　1 回当りの製品（ユニット）故障に対するダウンタイム費用

C_m　1 回当りの製品（ユニット）故障に対する小修理費用

C_r　1 回当りの製品（ユニット）購入に対する購入費用

2）w　無償保証期間，すなわち［0, w］における故障に対しては無償でユニットが小修理される。但し，ダウンタイム費用 C_d は発生する。

T　ブロック取換え政策における予防保全周期。ユニットは故障時点において小修理がなされ（事後保全），かつある前もって定められた時刻 T において新しい同じユニットと交換される（予防保全）。

3）$f(t)$　製品（ユニット）の寿命時間の確率密度関数（$t \geq 0$）

$F(t)$　同累積分布関数

$\bar{F}(t)$　同信頼度関数

$r(t)$　同（瞬間）故障率　（$r(t) = f(t)/\bar{F}(t)$）

$1/\lambda$　製品の期待寿命時間

4）α　指数形の割引率（$\alpha > 0$）。t 時間経過後 1 単位の費用は $\exp(-\alpha t)$ となる。

$\bar{\psi}$　$1-\psi$，ψ は任意の関数

$J(x)$　$\int_0^x e^{-\alpha t} r(t)dt$

5）$SD_i(T)$ $i = 0, 1, 2$　ユニットが時刻 0 で動作を始めたときの総期待割引費用

$i = 0$：$w = 0$ のとき

$i = 1$：$0 < w \leq T$ のとき

$i = 2$：$0 < T < w$ のとき

2.　基本的なブロック取換え政策

最初に無償保証期間を伴わない，すなわち $w = 0$ の場合の基本的なブロック取換え政策を議論する。

モデルは以下のものである。ユニットは故障時点において費用 $C_d + C_m$ を伴って小修理がなされ（事後保全），かつある前もって定められた時刻 T において費用 C_r を伴って新しい同じユニットと交換される（予防保全）。ユニットの交換（予防保全）から次のユニットの交換（予防保全）までの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。小修理／交換は瞬時になされ，小修理が施されたユニット／交換された新しいユニットはただちに動作を引継ぐ。各故障は発生と同時に発見され，故障ユニットは小修理が施される。ユニットは時刻 0 で動作を始め，計画期間は無限大である。計画期間全体の総期待割引費用を評価関数として適用し，その総期待割引費用を最小にする最適ブロック取換え政策を求める。

ユニットが時刻 0 で動作を始めたときの総期待割引費用は

$$SD_0(T)=\frac{(C_d+C_m)J(T)+C_r e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}} \tag{2.1}$$

となる。以下の式を定義する。

$$Q(T)=\frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha}r(T)-J(T)\,. \tag{2.2}$$

そのとき，総期待割引費用 $SD_0(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_0^* に対して以下の定理を得る。

［**定理2.1**］

（1） $r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

（i） もし $Q(\infty)>C_r/(C_d+C_m)$ ならば，そのとき $Q(T_0^*)=C_r/(C_d+C_m)$ を満足する，総期待割引費用 $SD_0(T)$ を最小にする有限でただ1つの最適予防保全周期 T_0^*（$0<T_0^*<\infty$）が存在し，そのときの総期待割引費用は

$$SD_0(T_0^*)=\frac{C_d+C_m}{\alpha}r(T_0^*)-C_r \tag{2.3}$$

となる。

（ii） もし $Q(\infty)\le C_r/(C_d+C_m)$ ならば，そのとき最適予防保全周期は $T_0^*\to\infty$ となる。すなわち予防保全は行わず事後保全のみを行う。そのときの総期待割引費用は

$$SD_0(\infty)=(C_d+C_m)J(\infty) \tag{2.4}$$

となる。

（2） $r(t)$ が広義単調減少であるとき（$t>0$）最適予防保全周期は $T_0^*\to\infty$ となる。□

3. 無償保証期間を伴うブロック取換え政策

前節では無償保証期間を伴わない（$w=0$）基本的ブロック取換え政策を取扱ったが，本節では無償保証期間を伴うブロック取換え政策を取扱う。無償保証期間内での製品（ユニット）の故障に対する小修理（事後保全）に関しては小修理費用 C_m は免除され，ダウンタイム費用 C_d のみが発生する。以下においては無償保証期間 w と予防保全周期 T の大小関係においてそれぞれの状況下での最適ブロック取換え政策を考察し，その結果に基づき総合的なブロック取換え政策を議論する。

3.1 無償保証期間が予防保全周期以下の場合

$0<w\le T$ の場合を取扱う。

ユニットが時刻 0 で動作を始めたときの総期待割引費用は

$$SD_1(T)=\frac{(C_d+C_m)J(T)+C_r e^{-\alpha T}-C_m J(w)}{1-e^{-\alpha T}} \tag{3.1}$$

となる。このとき総期待割引費用 $SD_1(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_1^* に対して以下の補題を得る。

［補題**3.1**］

0 < $w \le T$ において以下が成立する。

（1） $r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

（i） もし $Q(\infty)\le(C_r-C_mJ(w))/(C_d+C_m)$ ならば，そのとき総期待割引費用 $SD_1(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_1^* は $T_1^*\to\infty$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(\infty)=(C_d+C_m)J(\infty)-C_mJ(w) \tag{3.2}$$

となる。

（ii） もし $Q(w)<(C_r-C_mJ(w))/(C_d+C_m)<Q(\infty)$ ならば，そのとき $Q(T_1^*)=(C_r-C_mJ(w))/(C_d+C_m)$ を満足する有限でただ 1 つの最適予防保全周期 T_1^*（$w<T_1^*<\infty$）が存在し，そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(T_1^*)=\frac{C_d+C_m}{\alpha}r(T_1^*)-C_r \tag{3.3}$$

となる。

（iii） もし $Q(w)\ge(C_r-C_mJ(w))/(C_d+C_m)$ ならば，そのとき最適予防保全周期は $T_1^*=w$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(T_1^*)=SD_1(w)=\frac{C_dJ(w)+C_re^{-\alpha w}}{1-e^{-\alpha w}} \tag{3.4}$$

となる。

（2） $r(t)$ が広義単調減少であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

（i） もし

$$SD_1(w)\ge SD_1(\infty)\ , \tag{3.5}$$

すなわち

$$C_dJ(w)+C_re^{-\alpha w}\ge[(C_d+C_m)J(\infty)-C_mJ(w)](1-e^{-\alpha w}) \tag{3.6}$$

ならば，$T_1^*\to\infty$ となる。

（ii）　もし

$$SD_1(w) < SD_1(\infty)\ , \tag{3.7}$$

すなわち

$$C_d J(w) + C_r e^{-\alpha w} < [(C_d + C_m)J(\infty) - C_m J(w)](1 - e^{-\alpha w}) \tag{3.8}$$

ならば，$T_1^* = w$ となる。□

3.2　無償保証期間が予防保全周期より大きい場合

$0 < T < w$ の場合を取扱う。

ユニットが時刻 0 で動作を始めたときの総期待割引費用は

$$SD_2(T) = \frac{C_d J(T) + C_r e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} \tag{3.9}$$

となる。このとき総期待割引費用 $SD_2(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_2^* に対して以下の補題を得る。

［**補題3.2**］

$0 < T < w$ において以下が成立する。

（1）　$r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t > 0$）次のことが成立する。

（i）　もし $Q(w) \le C_r / C_d$ ならば，そのとき総期待割引費用 $SD_2(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_2^* は $T_2^* = w$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_2(T_2^*) = SD_2(w) = \frac{C_d J(w) + C_r e^{-\alpha w}}{1 - e^{-\alpha w}} \tag{3.10}$$

となる。

（ii）　もし $Q(w) > C_r / C_d$ ならば，そのとき $Q(T_2^*) = C_r / C_d$ を満足する有限でただ 1 つの最適予防保全周期 T_2^*（$0 < T_2^* < w$）が存在し，そのときの総期待割引費用は

$$SD_2(T_2^*) = \frac{C_d}{\alpha} r(T_2^*) - C_r \tag{3.11}$$

となる。

（2）　$r(t)$ が広義単調減少であるとき（$t > 0$）最適予防保全周期は $T_2^* = w$ となる。□

3.3　大域的最適予防保全周期

前もって無償保証期間と予防保全周期の大小関係を知ることはできない。本節では補題3.1および3.2から大域的最適予防保全周期 T_w^* についてまとめる。

[**定理3.3**]

無償保証期間を w としたとき以下が成立する。

（1）　$r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

（i）　もし $Q(w)<(C_r-C_mJ(w))/(C_d+C_m)$ ならば，$T_w^*=T_1^*>w$ となる。

（ii）　もし $(C_r-C_mJ(w))/(C_d+C_m)\le Q(w)\le C_r/C_d$ ならば，$T_w^*=w$ となる。

（iii）　もし $Q(w)>C_r/C_d$ ならば，$T_w^*=T_2^*$（$0<T_2^*<w$）となる。

（2）　$r(t)$ が広義単調減少であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

（i）　もし

$$SD_1(w)=SD_2(w)=\frac{C_dJ(w)+C_re^{-\alpha w}}{1-e^{-\alpha w}}\ge SD_1(\infty)=(C_d+C_m)J(\infty)-C_mJ(w)\,, \tag{3.12}$$

すなわち

$$C_dJ(w)+C_re^{-\alpha w}\ge[(C_d+C_m)J(\infty)-C_mJ(w)](1-e^{-\alpha w}) \tag{3.13}$$

ならば，$T_w^*=T_1^*\to\infty$となる。

（ii）　もし

$$SD_1(w)=SD_2(w)=\frac{C_dJ(w)+C_re^{-\alpha w}}{1-e^{-\alpha w}}<SD_1(\infty)=(C_d+C_m)J(\infty)-C_mJ(w)\,, \tag{3.14}$$

すなわち

$$C_dJ(w)+C_re^{-\alpha w}<[(C_d+C_m)J(\infty)-C_mJ(w)](1-e^{-\alpha w}) \tag{3.15}$$

ならば，$T_w^*=T_1^*=w$ となる。□

3.4　考　　察

無償保証期間を製品に付与することは総期待割引費用を減少させるだけでなく，最適予防保全周期を無償保証期間 w に近づける。換言すれば，T_0^* が w より大きいときには無償保証は最適予防保全周期を短くし w に近づける。逆に T_0^* が w より小さいときには無償保証は最適予防保全周期を長くし w に近づける。

4. む す び

本稿では小修理を伴うブロック取換えモデルに製品の故障に対する無償保証期間を考慮した保全モデルを議論した。総期待割引費用を評価関数として採用し，それを最小にする最適ブロック取換え政策を求めた。無償保証期間を考慮することは総期待割引費用を減少させるだけでなく，最適予防保全周期を無償保証期間に近づける。また，Yeh et al.［7］の結果は摂動法を適用することにより本稿における結果より導出される。

文 献

［1］R. E. Barlow and F. Proschan, “Mathematical Theory of Reliability,” John Wiley, New York, 1965.
［2］海生直人，“単一ユニットシステムの予防保全問題に関する解析的研究，”広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第22号），1983.
［3］海生直人，“確率的保全問題に関する研究，”広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第52号），1989.
［4］S. Osaki, “Applied Stochastic System Modeling,” Springer-Verlag, Berlin・Heidelberg, 1992.
［5］W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, “Warranty Cost Analysis,” Marcel Dekker, New York, 1994.
［6］W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, “Product Warranty Handbook,” Marcel Dekker, New York, 1996.
［7］R. H. Yeh, M.-Y. Chen and C.-Y. Lin, “Optimal Periodic Replacement Policy for Repairable Products Under Free-Repair Warranty,” *European Journal of Operational Research*, **176**, 2007, pp. 1678–1686.

Abstract

A Note on Block Replacement Policy Taking Account of Minimal Repair and Free Warranty Interval with Discounting

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the extended block replacement model, taking account of minimal repair and free warranty interval with discounting. We adopt the expected total discounted cost as a criterion of optimality and obtain the optimal block replacement policy minimizing that expected cost. When we apply the free warranty interval, the expected total discounted cost decreases and furthermore we have the result that the optimal preventive maintenance period goes closer to the free warranty interval.

Keywords: Minimal repair, Free warranty interval, Block replacement policy, Expected total discounted cost, Optimal policy