割引率を考慮した小修理およびランダムな計画期間を伴うブロック取換え政策に関する一考察

海　生　直　人
（受付　2020 年 3 月 30 日）

あ　ら　ま　し

本稿では小修理を伴うブロック取換えモデルにおいて計画期間がある既知の確率分布，特に指数分布に従う場合を割引率を考慮して議論する。評価関数としては計画期間全体の総期待割引費用を適用し，その総期待割引費用を最小にする最適ブロック取換え政策を求める。求められた結果より従来の結果が特別な場合として得られることを示す。

キーワード　小修理，ランダムな計画期間，ブロック取換え政策，計画期間全体の総期待割引費用，最適政策

1.　は　じ　め　に

基本的な保全モデルの 1 つにブロック取換えモデルがある。最も基本的なモデルは 1 ユニットシステムに対するものである（Barlow and Proschan［1, p. 95］，海生［2, pp. 12–13］，Osaki［3, pp. 203–204］参照）。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ，かつある前もって定められた時刻において新しい同じユニットと交換される。以後同様な挙動を繰返す。計画期間は無限大である。

本稿では計画期間がある既知の確率分布，特に指数分布に従う場合を小修理を仮定することにより議論する。小修理によってはシステムの故障率は変化しない（Barlow and Proschan［1, p. 96］，Osaki［3, p. 206］，海生［4, p. 22］参照）。計画期間が無限大の場合には交換の際に新しい同じユニットで交換し続けることになるが，計画期間が確率変数の場合には有限期間内での計画打切りが可能となる。これは製品の在庫切れや技術革新を考慮することと同じ意味を持つ（Khatab et al.［5］参照）。評価関数としては計画期間全体の総期待割引費用を適用し，その総期待割引費用を最小にする最適ブロック取換え政策を求める。さらに，求められた結果より既存の結果が特別な場合として得られることを示す。

2.　モデルと仮定

本稿では以下のモデルを取扱う。システムとしては1ユニットシステムを考える。ユニットは故障時点において小修理が施され，かつある前もって定められた時刻において新しい同じユニットと交換される。小修理によってはシステムの故障率は変化しない（Barlow and Proschan［1, p. 96］，Osaki［3, p. 206］，海生［4, p. 22］参照）。ユニットの交換から次のユニットの交換までの期間を1サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。小修理／交換は瞬時になされ，小修理が施されたユニット／交換された新しいユニットはただちに動作を引継ぐ。各故障は発生と同時に発見され，故障ユニットは小修理が施される。計画期間はある既知の確率分布，特に指数分布に従い，ユニットは時刻0で動作を始める。評価関数としては計画期間全体の総期待割引費用を適用し，その総期待割引費用を最小にする最適ブロック取換え政策を求める。

以下の諸量を導入する。

1）　c_m　故障ユニットの各小修理に対する費用

　　c_e　非故障ユニットの各交換に対する費用

2）　α　連続形（指数形）の割引率（$\alpha > 0$）。t 時間経過後1単位の費用は $exp(-\alpha t)$ となる。

3）　$\bar{\psi}(\cdot)$　$1-\psi(\cdot)$，$\psi(\cdot)$ は任意の関数である。

　　$\psi^*(\alpha)$　$\int_0^\infty e^{-\alpha t} d\psi(t)$

4）　H　計画期間（確率変数，$H \geq 0$）

　　$g(h)$　計画期間の確率密度関数（$h \geq 0$）

　　$G(h)$　同累積分布関数

　　$1/\mu$　同平均

5）　$f(t)$　ユニットの故障時間の確率密度関数（$t \geq 0$）

　　$F(t)$　同累積分布関数

　　$\bar{F}(t)$　同信頼度関数

　　$r(t)$　$f(t)/\bar{F}(t)$，同（瞬間）故障率

　　$R(t)$　$\int_0^t r(x)dx$，同平均値関数

　　$1/\lambda$　同平均

6）　T　予防保全周期。ユニットは故障時点において小修理が施され（事後保全），かつある

前もって定められた時刻 T において新しい同じユニットと交換される（予防保全）。

7） $D(T)$ 計画期間全体の総期待割引費用

3. 解析と定理

計画期間 H が任意分布 $G(h)$ に従うときの計画期間全体の総期待割引費用は

$$D(T)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_m\int_0^T e^{-\alpha t}r(t)dt+c_e e^{-\alpha T}\right)\frac{1-e^{-\alpha kT}}{1-e^{-\alpha T}}(G((k+1)T)-G(kT))$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}c_m\int_0^{h-kT}e^{-\alpha t}r(t)dte^{-\alpha kT}g(h)dh \tag{3.1}$$

となる。

以下の議論においては計画期間 H が指数分布，

$$g(h)=\mu e^{-\mu h} \tag{3.2}$$

に従う場合を議論する。この場合，計画期間全体の総期待割引費用は

$$D(T)=\left[\left(c_m\int_0^T e^{-\alpha t}r(t)dt+c_e e^{-\alpha T}\right)e^{-\mu T}+c_m\int_0^T\int_0^x e^{-\alpha t}r(t)dt\mu e^{-\mu x}dx\right]$$
$$/\left[1-e^{-(\alpha+\mu)T}\right] \tag{3.3}$$

となる。ここで，

$$D(0)=\infty, \tag{3.4}$$

および

$$D(\infty)=c_m\int_0^{\infty}e^{-(\alpha+\mu)x}r(x)dx \tag{3.5}$$

である。従って $T=0$ では $D(T)$ は最小とならない，すなわち $0<T$ となる。

次式を定義する。

$$H(T)=\int_0^T(r(T)-r(x))e^{-(\alpha+\mu)x}dx. \tag{3.6}$$

このとき以下の補題を得る。

［**補題3.1**］

（1）もし $r(t)$ が狭義単調増加であるならば（$t>0$），$H(t)$ も狭義単調増加となる。そのとき，$H(0)=0$，$H(\infty)>0$である。

（2）もし $r(t)$ が広義単調減少であるならば（$t > 0$），$H(t)$ も広義単調減少となる。そのとき，$H(0) = 0$，$H(\infty) \le 0$ である。□

以上の結果より，計画期間全体の総期待割引費用 $D(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T^* に対して以下の定理を得る。

[定理3.2]

（1）$r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t > 0$）次のことが成立する。

（i）もし $H(\infty) > c_e/c_m$ ならば，そのとき $H(T^*) = c_e/c_m$ を満足する，総期待割引費用 $D(T)$ を最小にする有限でただ 1 つの最適予防保全周期 T^*（$0 < T^* < \infty$）が存在し，そのときの期待費用は

$$D(T^*) = [c_m r(T^*) - (\alpha + \mu)c_e] / (\alpha + \mu) \tag{3.7}$$

となる。

（ii）もし $H(\infty) \le c_e/c_m$ ならば，そのとき最適予防保全周期は $T^* \to \infty$ となる。すなわち予防保全（ユニットの交換）はせず事後保全（小修理）のみを行う。そのときの総期待割引費用は

$$D(\infty) = c_m \int_0^\infty e^{-(\alpha+\mu)x} r(x)dx \tag{3.8}$$

となる。

（2）$r(t)$ が広義単調減少であるとき（$t > 0$）最適予防保全周期は $T^* \to \infty$ となる。□

4. む　す　び

本稿では小修理を伴うブロック取換え政策において計画期間がある既知の確率分布，特に指数分布に従う場合を割引率を考慮して考察した。評価関数としては計画期間全体の総期待割引費用を適用し，その総期待割引費用を最小にする最適ブロック取換え政策を求めた。

最後に計画期間が無限大の場合に言及する。これは本稿で議論した，計画期間が従う指数分布のパラメータ μ を 0 とすることと同様である。この場合，当然のことであるが総期待割引費用式（3.3）は

$$D(T)|_{\mu=0} = \frac{c_m \int_0^T e^{-\alpha t} r(t)dt + c_e e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} = SD_0(T) \tag{4.1}$$

となる。これは海生［6］のベーシックモデル（無償保証期間 $w = 0$）の総期待割引費用 $SD_0(T)$ と一致する。簡単に式（4.1）の総期待割引費用を評価関数とした場合の結果を以下に示す

（海生［6］参照）。

以下の式を定義する。

$$Q(T)=\frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha}r(T)-\int_0^T e^{-\alpha t}r(t)dt. \tag{4.2}$$

そのとき，総期待割引費用 $SD_0(T)$ を最小にする最適予防保全周期 T_0^* に対して以下の定理を得る。

［定理**4.1**］

（1）$r(t)$ が狭義単調増加であるとき（$t>0$）次のことが成立する。

（i）もし $Q(\infty)>c_e/c_m$ ならば，そのとき $Q(T_0^*)=c_e/c_m$ を満足する，総期待割引費用 $SD_0(T)$ を最小にする有限でただ 1 つの最適予防保全周期 $T_0^*(0<T_0^*<\infty)$ が存在し，そのときの総期待割引費用は

$$SD_0(T_0^*)=\frac{c_m}{\alpha}r(T_0^*)-c_e \tag{4.3}$$

となる。

（ii）もし $Q(\infty)\le c_e/c_m$ ならば，そのとき $T_0^*\to\infty$ となり，総期待割引費用は

$$SD_0(\infty)=c_m R^*(\alpha) \tag{4.4}$$

となる。

（2）$r(t)$ が広義単調減少であるとき（$t>0$），$T_0^*\to\infty$ となる。□

本稿で取扱ったモデルにおいて割引率 $\alpha\to 0$ とすると Khatab et al.［5］に一致する。

文　献

［1］R. E. Barlow and F. Proschan, “Mathematical Theory of Reliability,” John Wiley, New York, 1965.

［2］海生直人，“確率的保全問題に関する研究，”広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第52号），1989.

［3］S. Osaki, “Applied Stochastic System Modeling,” Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1992.

［4］海生直人，“単一ユニットシステムの予防保全問題に関する解析的研究，”広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第22号），1983.

［5］A. Khatab, N. Rezg and D. Ait-Kadi, “Optimal Replacement with Minimal Repair Policy for a System Operating over a Random Time Horizon,” *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 415–423（2011）.

［6］海生直人，“割引率を考慮した小修理および無償保証期間を伴うブロック取換え政策に関する一考察，”経済科学研究，Vol. 23, No. 1, pp. 1– 8 （2019）.

Abstract

A Note on Block Replacement Policy Taking Account of Minimal Repair and Random Planning Horizon with Discounting

Naoto Kaio

In this paper, we treat the extended block replacement policy, taking account of minimal repair and random planning horizon with discounting, where the planning horizon obeys an exponential distribution, especially. We apply the expected total discounted cost with a continuous discount rate over a planning horizon as a criterion of optimality and obtain the optimal block replacement policy minimizing that expected total discounted cost. Finally, we illustrate the relationship between the result obtained in this paper and the existing one.

Keywords: Minimal repair, Random planning horizon, Block replacement policy, Expected total discounted cost over a planning horizon, Optimal policy