

割引率を伴う故障が定周期保全時点でのみ発見され 無償保証期間を考慮したブロック取換え政策に関する一考察

海 生 直 人

(受付 2020 年 10 月 30 日)

あ ら ま し

本稿では割引率を伴う故障が定周期保全時点でのみ発見されるブロック取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した保全モデルを議論する。総期待割引費用を評価関数として適用し、それを最小にする最適ブロック取換え政策を求める。無償・割引保証を製品に与えることは総期待割引費用を当然のことであるが減少させる。

キーワード 1 回の再生, 無償保証期間, 割引保証, ブロック取換え政策, 総期待割引費用, 最適政策

1. は じ め に

本稿では割引率を伴う故障が定周期保全時点でのみ発見されるブロック取換えモデルを考察する。当モデルは以下のものである (Osaki [1, p. 205] 参照)。1 ユニットシステムを対象とする。故障が発生した場合定周期保全時点でのみ発見され、故障発生から発見までの間はシステムダウンとなる。定周期保全時点では新しい同じユニットによって保全 (交換・取換え) が実施される。ユニットの保全から次のユニットの保全までの期間を 1 サイクルとし、同様なサイクルを繰り返す。

本稿では前述の故障が定周期保全時点でのみ発見されるブロック取換えモデルに製品 (ユニット) の無償保証期間 [2, 3] を考慮した割引率を伴うブロック取換え政策を議論する。最初に故障が定周期保全時点でのみ発見されるブロック取換え政策を議論する。次に無償保証期間を付加して当ブロック取換え政策を議論する。無償保証期間と定周期保全期間の大小関係においてそれぞれの状況下での政策を考察し、総合的なブロック取換え政策を議論する。最後に基となったブロック取換え政策との比較を行う。評価関数としては総期待割引費用を適用し、その期待費用を最小にする最適政策を求める。

以下の諸量を導入する。

- 1) C_d 単位時間当りの製品（ユニット）故障に対するダウンタイム費用
 C_r 1 回当りの製品（ユニット）購入に対する購入費用（保全費用）
- 2) w 無償保証期間，すなわち時間間隔 $[0, w]$ における故障に対しては無償・割引保証でユニットが供給される。但し，ダウンタイム費用 C_d は発生する。
 T ブロック取換え政策における定周期保全期間。故障が発生した場合定周期保全時点でのみ発見され，故障発生から発見までの間はシステムダウンとなる。定周期保全時点では新しい同じユニットによって保全（交換・取換え）が実施される。
- 3) $f(t)$ 製品（ユニット）の寿命時間の確率密度関数 ($t \geq 0$)
 $F(t)$ 同累積分布関数
 $\bar{F}(t)$ 同信頼度関数
 $1/\lambda$ 製品の期待寿命時間
- 4) α 連続形（指数形）の割引率 ($\alpha > 0$)。 t 時間経過後 1 単位の費用は $\exp(-\alpha t)$ となる。
- 5) $\bar{\psi}(\cdot)$ $1 - \psi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ は任意の関数である。

$$\psi^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} d\psi(t)$$
- 6) $SD_i(T)$ $i=0, 1, 2$ 総期待割引費用
 $i=0$: $w=0$ のとき
 $i=1$: $0 < w \leq T$ のとき
 $i=2$: $0 < T < w$ のとき

2. 基本ブロック取換え政策

最初に無償保証期間を伴わない，すなわち $w=0$ の場合の故障が定周期保全時点でのみ発見される，基本ブロック取換え政策を考察する。

モデルは以下のものである。定周期保全期間 T 内において故障が発生した場合，すぐには発見されず定周期保全時点でのみ発見される，故障発生から発見までの間はシステムダウンとなり単位時間当りのダウンタイム費用 C_d が発生する。定周期保全時点では新しい同じユニットによって 1 回当りの保全費用 C_r を伴い保全（交換・取換え）が実施される。ユニットの保全から次のユニットの保全までの期間を 1 サイクルとし，以後同様なサイクルを繰返す。

総期待割引費用は

割引率を伴う故障が定周期保全時点でのみ発見され無償保証期間を考慮したブロック取換え政策に関する一考察

$$SD_0(T) = \frac{C_d \int_0^T e^{-\alpha t} F(t) dt + C_r e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} \quad (2.1)$$

となる。ここで

$$SD_0(0) = \infty \quad (2.2)$$

となる。以下の式を定義する。

$$Q(T) = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} F(T) - \int_0^T e^{-\alpha t} F(t) dt. \quad (2.3)$$

そのとき、総期待割引費用 $SD_0(T)$ を最小にする最適保全周期 T_0^* に対して以下の定理を得る。

[定理2.1]

(i) もし $Q(\infty) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \bar{F}(t) dt > C_r/C_d$ ならば、そのとき $Q(T_0^*) = C_r/C_d$ を満足する、総期待割引費用 $SD_0(T)$ を最小にする有限でただ1つの最適保全周期 T_0^* ($0 < T_0^* < \infty$) が存在し、そのときの総期待割引費用は

$$SD_0(T_0^*) = \frac{C_d}{\alpha} F(T_0^*) - C_r \quad (2.4)$$

となる。

(ii) もし $Q(\infty) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \bar{F}(t) dt \leq C_r/C_d$ ならば、そのとき最適保全周期は $T_0^* \rightarrow \infty$ となる。すなわち保全は実施されない。そのときの総期待割引費用は

$$SD_0(\infty) = C_d \int_0^\infty e^{-\alpha t} F(t) dt \quad (2.5)$$

となる。□

3. 無償保証期間を伴う基本ブロック取換え政策

前節では無償保証期間を伴わない ($w=0$) 基本ブロック取換え政策を取扱ったが、本節では無償保証期間を伴う基本ブロック取換え政策を取扱う。無償保証期間内での製品 (ユニット) の故障に対する取換えに関しては原則購入費用 C_r は免除され、ダウンタイム費用 C_d のみが発生する。以下においては無償保証期間 w と保全周期 T の大小関係においてそれぞれの状況下での最適ブロック取換え政策を考察し、その結果に基づき総合的なブロック取換え政策を議論する。

3.1 無償保証期間が保全周期以下の場合

$0 < w \leq T$ の場合を取扱う。

総期待割引費用は

$$SD_1(T) = \frac{C_d \int_0^T e^{-\alpha t} F(t) dt + C_r \bar{F}(w) e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} \quad (3.1)$$

となる。このとき総期待割引費用 $SD_1(T)$ を最小にする最適保全周期 T_1^* に対して以下の補題を得る。

[補題3.1]

$0 < w \leq T$ において以下が成立する。

(i) もし $Q(\infty) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \bar{F}(t) dt \leq C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば、そのとき総期待割引費用 $SD_1(T)$ を最小にする最適保全周期 T_1^* は $T_1^* \rightarrow \infty$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(\infty) = C_d \int_0^\infty e^{-\alpha t} F(t) dt \quad (3.2)$$

となる。

(ii) もし $Q(w) < C_r \bar{F}(w) / C_d < Q(\infty) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \bar{F}(t) dt$ ならば、そのとき $Q(T_1^*) = C_r \bar{F}(w) / C_d$ を満足する有限でただ1つの最適保全周期 T_1^* ($w < T_1^* < \infty$) が存在し、そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(T_1^*) = \frac{C_d}{\alpha} F(T_1^*) - C_r \bar{F}(w) \quad (3.3)$$

となる。

(iii) もし $Q(w) \geq C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば、そのとき最適保全周期は $T_1^* = w$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(w) = \frac{C_d \int_0^w e^{-\alpha t} F(t) dt + C_r \bar{F}(w) e^{-\alpha w}}{1 - e^{-\alpha w}} \quad (3.4)$$

となる。□

3.2 無償保証期間が保全周期より大きい場合

$0 < T < w$ の場合を取扱う。

この場合、時刻 T で故障していないとき、その後 w 以前に故障するか w を超えて故障するかわからないので時刻 T で実際支払う予防・事後保全費用は期待値である割引保証費用 $C_r \bar{F}(w)$ とする。従って、総期待割引費用は

割引率を伴う故障が定周期保全時点でのみ発見され無償保証期間を考慮したブロック取換え政策に関する一考察

$$SD_2(T) = \frac{C_d \int_0^T e^{-\alpha t} F(t) dt + C_r \bar{F}(w) e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} \quad (3.5)$$

となる。このとき総期待割引費用 $SD_2(T)$ を最小にする最適保全周期 T_2^* に対して以下の補題を得る。

[補題3.2]

$0 < T < w$ において以下が成立する。

(i) もし $Q(w) \leq C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば、そのとき総期待割引費用 $SD_2(T)$ を最小にする最適保全周期 T_2^* は $T_2^* = w$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_2(T_2^*) = SD_2(w) = \frac{C_d \int_0^w e^{-\alpha t} F(t) dt + C_r \bar{F}(w) e^{-\alpha w}}{1 - e^{-\alpha w}} \quad (3.6)$$

となる。

(ii) もし $Q(w) > C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば、そのとき $Q(T_2^*) = C_r \bar{F}(w) / C_d$ を満足する有限でただ1つの最適保全周期 T_2^* ($0 < T_2^* < w$) が存在し、そのときの総期待割引費用は

$$SD_2(T_2^*) = \frac{C_d}{\alpha} F(T_2^*) - C_r \bar{F}(w) \quad (3.7)$$

となる。□

3.3 大域的最適保全周期

前もって無償保証期間と保全周期の大小関係を知ることはできない。本節では補題3.1および3.2から大域的最適保全周期 T_w^* についてまとめる。

[定理3.3]

無償・割引保証期間を w としたとき以下が成立する。

- (i) もし $Q(w) < C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば、 $T_w^* = T_1^* > w$ となる。
- (ii) もし $Q(w) = C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば、 $T_w^* = w$ となる。
- (iii) もし $Q(w) > C_r \bar{F}(w) / C_d$ ならば、 $T_w^* = T_2^* < w$ となる。□

3.4 考 察

[定理3.3] の (i) において、 C_d が相対的に C_r より小さいときには、無償保証の利益を得るために最適保全周期は無償保証期間より長くなる。また同定理 (iii) より C_d が相対的に C_r より大きいときには、製品故障を避けるために製品は割引保証が終了する前に保全される。また、当然のことであるが無償・割引保証を製品に与えることは総期待割引費用を減少させる。

4. む す び

本稿では製品（ユニット）の故障が定周期保全時点でのみ発見されるブロック取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した割引率を伴う保全モデルを考察した。総期待割引費用を評価関数として採用し、それを最小にする最適ブロック取換え政策を求めた。

本稿で得られた結果に摂動法を適用すると海生 [4] の結果が得られる。

文 献

- [1] S. Osaki, “Applied Stochastic System Modeling,” Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg, 1992.
- [2] W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, “Warranty Cost Analysis,” Marcel Dekker, New York, 1994.
- [3] W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, “Product Warranty Handbook,” Marcel Dekker, New York, 1996.
- [4] 海生直人, “故障が定周期保全時点でのみ発見され無償保証期間を伴うブロック取換え政策に関する一考察,” 経済科学研究, Vol. 17, No. 1, pp. 1–6 (2013).

Abstract

A Note on Block Replacement Policy Taking Account of Single Renewal and Free Warranty Interval with Discounting

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the extended block replacement policy taking account of single renewal and free warranty interval with discounting. We apply the expected total discounted cost with a continuous discount rate over a planning horizon as a criterion of optimality and obtain the optimal block replacement policy minimizing that expected total discounted cost. The expected cost decreases, when we adopt the free warranty interval. Finally, we illustrate the relationship between the result obtained in this paper and the existing one.

Keywords: Single renewal, Free warranty interval, Block replacement policy, Optimal policy, Expected total discounted cost over a planning horizon