

最適経済成長とフローの環境汚染

前田 純一・浦瀬 康裕

(受付 2021 年 10 月 29 日)

1. はじめに

本稿においては、最適経済成長モデルにフローの環境汚染を導入したモデルについて詳細に検討をおこない、そのモデルをもちいて社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路についてそれぞれ分析をおこなう。そして、その分析をもとにして2つの経路の比較をおこない、環境問題へも言及する。

拙稿(2021)においては、環境保全と経済成長の両立という観点から経済成長と環境問題について分析をおこなうための基本モデルとして、最適経済成長モデルにストックの環境汚染問題、および、自然資源ストックを包括的に導入したモデルの基本的枠組みについて詳細に検討をおこなった。そして、そのモデルをもちいて社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路がそれぞれ満たす最適性の条件を導出し、それらの条件の比較をおこなうことで最適な環境税率についても言及した。

しかしながら、拙稿(2021)においてはモデルが包括的なため、それぞれの成長経路の定常状態における定常解の存在と一意性の問題、および、定常解への収束の問題などが取り扱われていなかった。

そこで、本稿では、たとえば、Forster (1973)、Gruver (1976)、van der Ploeg and Withagen (1991)、Gradus and Smulders (1993)、Xepapadeas (2005)などを参照しながら、環境問題をフローの環境汚染に限定し、モデルをシンプルな形に限定することにはなるが、位相図をもちいた分析が可能となる枠組みに修正して、2つの成長経路における定常解の存在と一意性の問題、および、定常解への収束の問題についてそれぞれ検討をおこなっている。また、2つの成長経路を比較することで、社会的に最適な状態と市場経済における状態の比較もおこなっている。

本稿は以下のように構成されている。第2節においては、Forster (1973)、Gruver (1976)、van der Ploeg and Withagen (1991)、Gradus and Smulders (1993)、Xepapadeas (2005)などを参照しながら、フローの環境汚染を導入した最適経済成長モデルの基本的な枠組みを

詳細に検討する。第3節においては、社会的最適成長経路の分析を、第4節においては、市場経済における成長経路の分析を、定常解の存在と一意性、および、安定性の問題を中心にそれぞれおこなう。第5節においては、第3節、第4節の分析を受けて、社会的最適成長経路と市場経済における成長経路の比較をおこない、環境問題についても言及する。第6節においては、今後の研究の方向性について言及する。

2. モデル

この節では、フローとしての環境問題を導入した最適経済成長モデルの基本構造を詳細に検討する。経済には、経済主体として家計と企業が存在している。人口は一定と仮定し、労働供給は非弾力的におこなわれると仮定する。そして、その規模も1に規準化する。以下、生産関数、汚染排出関数、効用関数、資本ストックについて詳細に検討していく。

2.1 生産関数

生産活動は、資本ストック K と労働 L によっておこなわれる。資本ストック K には物的資本の他に知識資本や人的資本も含まれているとする。労働 L は人口の一定割合であり、人口は成長しないものとする。すなわち、 L はある定数となる。生産関数を $Y = F(K, L)$ と表し、1次同次性を仮定すると、 λ を任意定数として $\lambda Y = F(\lambda K, \lambda L)$ と表されるが、 $\lambda = 1/L$ とおくと $Y/L = F(K/L, 1)$ と表される。ここで、 L がある定数であることから、さらに $L = 1$ とおくと $Y = F(K, 1)$ と表されるが、括弧内の1を省略すると、生産量 Y は以下の生産関数によって表されることになる。

$$Y = F(K) \quad (1)$$

生産関数 $F(K)$ は資本ストック K に関して増加関数であるが、さらに以下のような性質をもつものとする。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \quad (2)$$

2.2 汚染排出関数

生産関数 (1) による生産活動によって汚染が排出されると仮定するが、汚染排出量 E は生産に投入される資本ストック K が大きいほど多くなると仮定する。その一方で、汚染排出を抑制・削減するための活動がおこなわれれば汚染の排出量を少なくすることが可能であると考えられるので、資本ストック、および、汚染排出を抑制・削減するための活動と汚染排

出量との関係が以下の関係式で表されるとする。

$$E = E(K, A) \quad (3)$$

A は汚染排出を防止・削減するための支出水準を表している。この汚染排出関数 $E(K, A)$ については、K の増加関数、A の減少関数と仮定するが、さらに以下の性質をもつものとする。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial K^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial K \partial A} \leq 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial A^2} > 0, \quad \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\partial E}{\partial A} = -\infty, \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\partial E}{\partial A} = 0. \quad (4b)$$

$\frac{\partial^2 E}{\partial K^2} \geq 0$ は排出量の増加分は資本ストックの増加にともない逓増的あるいは比例的になっていることを表し、 $\frac{\partial^2 E}{\partial K \partial A} \leq 0$ は汚染防止支出の増加によって排出量の増加分が減少することを表している。さらに (4b) は汚染防止支出の限界生産性が逓減することを表している。

2.3 効用関数

代表的消費者の効用水準は、消費水準 C、および、環境の質（環境汚染のフロー E）に依存すると想定し、代表的消費者の効用関数は以下のように表されるものとする。

$$U = U(C, E) \quad (5)$$

(5) は凹関数であるとし、さらに以下の性質を満たすと仮定する。

$$\frac{\partial U}{\partial C} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} < 0, \quad \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial C} = \infty, \quad \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial C} = 0, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial E} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial E^2} < 0, \quad \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial E} = 0, \quad \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{\partial U}{\partial E} = -\infty, \quad (6b)$$

2.4 資本ストックの動き

生産関数 (1) によって生産され、消費されたものの残りは投資に回されて資本ストックを形成していくことになるが、その資本ストックの蓄積は以下の微分方程式で表されるとする。

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0. \quad (7)$$

$K_0 > 0$ は資本ストックの初期値を表し、 $\delta \geq 0$ は資本減耗率を表している。

3. 社会的に最適な成長経路

この節では、前節で紹介した基本モデルをもちいながら社会的に最適な経済成長経路について検討をおこなう。社会的に最適な経済成長経路とは、社会的厚生を (1), (3), (7) の制約のもとで最大化するような消費 C , 汚染防止支出 A , 資本ストック K の時間経路を求めることによって得られる経済成長経路である。

3.1 動学的最適化の条件

分析を進めるために社会的厚生を定義しなければならないので、ここでは各時点の効用の割引現在価値の合計として社会的厚生を定義することにする。よって社会的厚生は以下のように表される。

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} U(C(t), E(t)) dt \quad (8)$$

$\rho > 0$ は時間選好率を表しており、 ρ の値が大きくなるほど将来の効用は低く評価されることになる。(7), および, (8) によって社会的に最適な経済成長経路を求める問題は、以下のような動学的最適化問題となる。

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} U(C(t), E(K, A)(t)) dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0, \end{aligned} \quad (9)$$

この動学的最適化問題 (9) の制御変数は C , A であり、状態変数は K であるが、この問題はポントリアーギンの最大値原理をもちいて解くことができる。そのために経常価値ハミルトニアン \mathcal{H} を次のように定義する。

$$\mathcal{H} \equiv U(C(t), E(K, A)(t)) + \lambda [Y(t) - C(t) - A(t) - \delta K(t)]$$

λ は状態変数 K に対応する共状態変数であり、資本ストック変数のシャドープライスを表している。

社会的に最適な経済成長経路となるための必要条件は、最大値原理を適用することによって以下のように求められる。

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = \frac{\partial U}{\partial C} - \lambda = 0, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A} = \left(\frac{\partial U}{\partial E} \right) \cdot \frac{\partial E}{\partial A} - \lambda = 0, \quad (10b)$$

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \lambda \left(\rho + \delta - \frac{\partial Y}{\partial K} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial E} \right) \frac{\partial E}{\partial K}. \quad (10c)$$

(10a), (10b) の2本の式は、各制御変数がハミルトニアンを最大化するように選択されていることを表している。(10c) はオイラー方程式とよばれ、資本ストック変数の変化が効用に及ぼす影響を調整するようにシャドープライスが時間を通じて変化していくことを表している。

なお、 \mathcal{H} が制御変数と状態変数について凹関数であるならば、(10a) から (10c) までの各式、および、以下の横断性条件が最適化のための必要十分条件となる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \lambda(t) K(t) = 0, \quad (11)$$

横断性条件は、ストック変数の現在価値が最終時点、つまりは無限の将来においてゼロになることを表している。

3.2 社会的最適経路の性質

これらの条件式をもちいながら、社会的に最適な経済成長経路がもつ性質について検討を進めていく。はじめに、(10a), (10b) をもちいながら静学的な最適資源配分の条件について検討する。(10a), (10b) より以下の関係式を得る。

$$\frac{\partial U}{\partial C} = \left(\frac{\partial U}{\partial E} \right) \frac{\partial E}{\partial A} \quad (12)$$

(12) の右辺は、汚染排出量を削減させることで効用を増加させる効果を表しているが、この効果が汚染排出量の削減に使用した生産物を消費した場合の限界効用の大きさと等しくなるように資源配分がおこなわれるべきであることを(12)は表している。

次に、動学的な最適資源配分の条件について検討しよう。(10a) を時間で微分した式に(10c)を代入して整理すると、異時点間の消費配分に関する以下の式を得る。

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\sigma_c} \left[\frac{\partial Y}{\partial K} + \frac{\partial E / \partial K}{\partial E / \partial A} - \delta - \rho \right] \quad (13)$$

$\sigma_c \equiv -\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial C^2} \cdot C}{\frac{\partial U}{\partial C}}$ は消費の限界効用の弾力性を表している。

ここで、(13)によって示されていることについて考察しよう。まず、右辺の括弧内の $\frac{\partial Y}{\partial K} - \delta$ の部分については以下のことを表していると考えられる。すなわち、生産されたも

ののうち消費されなかった部分は貯蓄に回されるが、その貯蓄は全て資本蓄積に充てられる。

その結果、資本の純限界生産力 $\frac{\partial Y}{\partial K} - \delta$ で表される大きさだけ将来の生産量が増加することを表している。

次に、 $\frac{\partial E / \partial K}{\partial E / \partial A}$ の部分については以下のことを表している。消費されず貯蓄に回された部分は資本ストックを増加させるが、その増加は同時に汚染排出量も増加させるため、汚染防止活動への支出がおこなわれることになる。すなわち、 $\frac{\partial E / \partial K}{\partial E / \partial A}$ は汚染の限界削減率に対する汚染の限界発生率の割合を表しており、消費へのマイナス効果を表している。

これら2つの効果を合わせた大きさが時間選好率 ρ を上回るとき、(13)の左辺は正の値を取り、将来の消費が増加することになる。

3.3 経済成長経路の分析

3.3.1 定常解の存在と一意性

この節では、(7)と(13)をもちいて経済成長経路の定常解の存在と一意性について分析を進める。まず定常状態の存在性について分析を進めるが、(13)より消費の変化が止まる($\dot{C}=0$ となる)のは、以下の関係式が成立するときである。

$$\frac{1}{\sigma_c} \left[\frac{\partial Y}{\partial K} + \frac{\partial E / \partial K}{\partial E / \partial A} - \delta - \rho \right] C(t) = 0 \quad (14)$$

(14)より、 $C(t) \neq 0$ である限りは $C(t)$ の水準に関係なく、

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = -\frac{\partial E / \partial K}{\partial E / \partial A} + \delta + \rho \quad (15)$$

が成立すれば(13)より $\dot{C}(t)=0$ となる。以下、(15)をもとにして $\dot{C}=0$ の状態を表した $\dot{C}=0$ 線について考察を進めていく。

まず、 $\dot{C}(t)=0$ 線の傾きを求めるために(15)より、

$$F^C \equiv \frac{\partial Y}{\partial K} + \frac{\partial E / \partial K}{\partial E / \partial A} - \delta - \rho \quad (16)$$

と定義しよう。(16)より dC/dK を求めるために陰関数定理を適用すると、

$$\frac{dC}{dK} = -\frac{\partial F^C / \partial K}{\partial F^C / \partial C} \quad (17)$$

となる。ここで(16)の定義より $\partial F^C / \partial K = Y_{KK} + (E_{KK}E_A - E_K E_{AK}) / E_A^2$ となるが、仮定($Y_{KK} < 0, E_{KK} \geq 0, E_A < 0, E_K > 0, E_{AK} > 0$)より $\partial F^C / \partial K < 0$ となる。また、 $\partial F^C / \partial C =$

$-E_K E_{AC} / E_A^2$ となるが、(12) より $E_{AC} = \frac{U_{CC}U_E - U_C U_{EC}}{U_E^2}$ となる。ここで、分析を単純化するために効用関数の加法分離性を仮定として追加すると $U_{EC} = 0$ となり、仮定 ($U_{CC} < 0, U_E < 0, U_C > 0$) と併せて考えると $\partial F^C / \partial C < 0$ となる。

この2つの結果から (17) より $\left. \frac{dC}{dK} \right|_{\dot{C}=0} < 0$ となるので、 $\dot{C}(t) = 0$ 線は図1のように負の傾きをもつことになる。

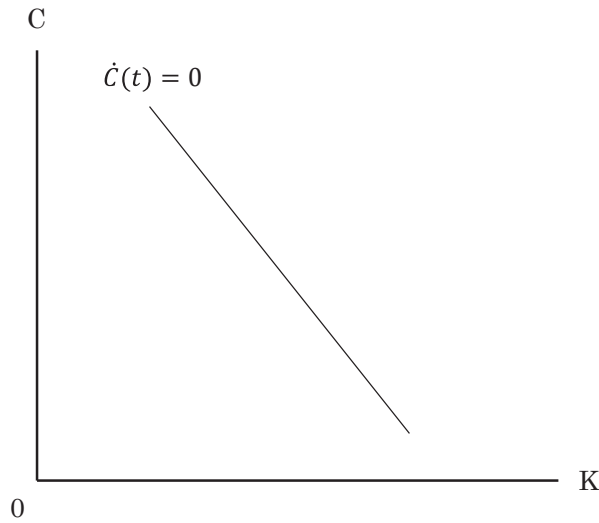


図1

次に、(7) をもちいて $\dot{K} = 0$ を表すグラフ ($\dot{K} = 0$ 線)についても、同様の考察を進めていく。(7) より資本ストックの変化が止まる ($\dot{K} = 0$ となる) のは、以下の関係式が成立するときである。

$$C(t) = Y(t) - \{A(t) + \delta K(t)\} \quad (18)$$

(18) の右辺第1項と中括弧でくくられた第2項を、それぞれ図をもちいて表すと図2のようになる。図2より、消費Cの大きさは、2つの曲線に囲まれた部分の縦方向の長さで表されるので、(18) を図をもちいて表すと図3のようになる。

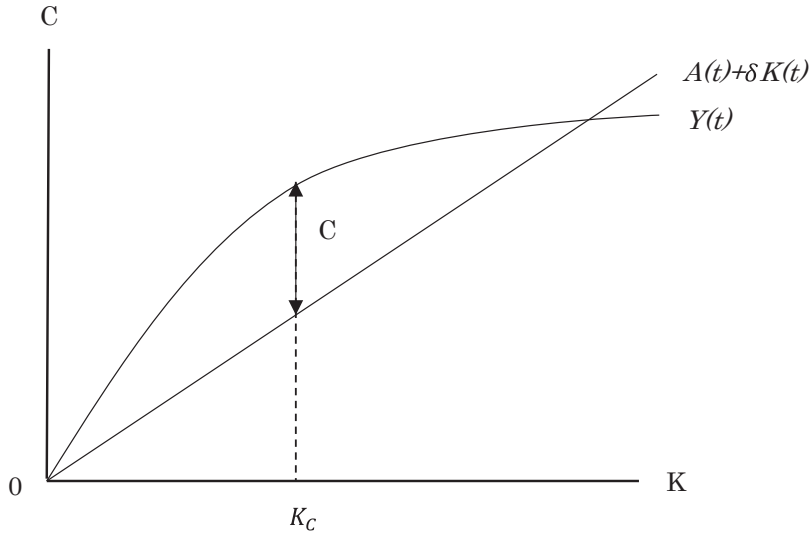


図 2

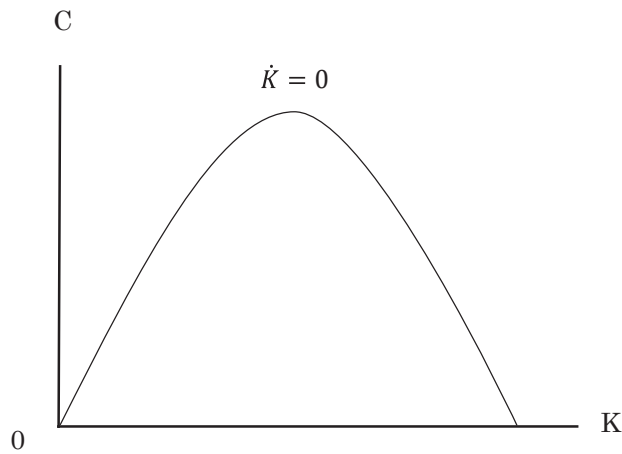


図 3

図 1 と図 3 を合わせると、2つの曲線が交差して定常解が存在する場合について、図 4_a、および、図 4_b に示されているような 2つのケースが可能性として考えられることになる。

図 4_a は定常解が一意に存在するケースが示されており、図 4_b は定常解が 2つ存在する複数均衡の状態になっているケースが示されている。

ここで、図 4_b のように複数均衡が存在するケースは排除されることを確認しておく。(14) において、資本のレンタル料として $r \equiv \partial Y / \partial K$ と定義し、さらに汚染排出関数 E が存在しない場合を想定すると (14) は以下のように表される。

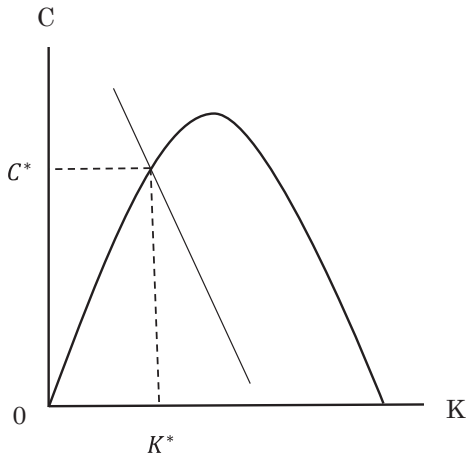


図 4_a

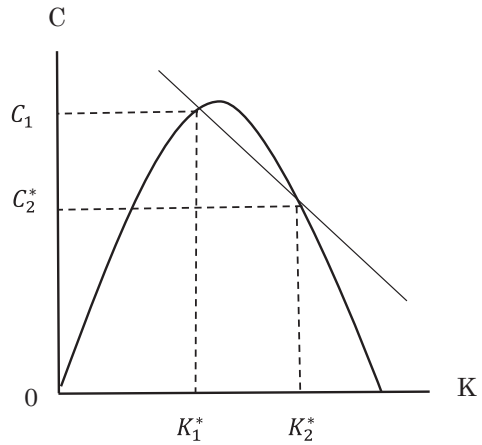


図 4_b

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\sigma_C} [r - (\delta + \rho)] \quad (19)$$

$\dot{C} = 0$ とすると $C \neq 0$ である限り, $r = \delta + \rho$ となるので, この関係を満たす資本ストックを資本レンタル料の定義より K_0 とすると, (19) より $\dot{C} = 0$ 線を図 5 における右側の直線のように表すことができる。

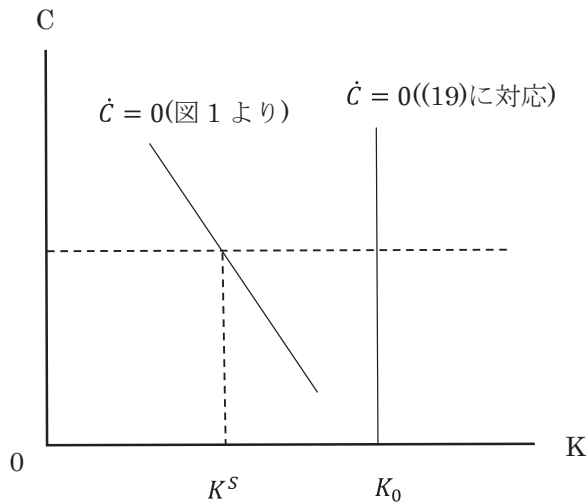


図 5

一方, 図 1 において描かれていた $\dot{C} = 0$ 線は図 5 における左側の直線であるが, 図 5 に示されているように, (19) に対応する $\dot{C} = 0$ 線の左側に必ず位置することを確認する。

$r = \delta + \rho$ に対応する K_0 と (14) における $Y_K = \delta + \rho - E_K / E_A$ を満たす資本ストック K^S を、図 5 のように同じ消費の値 C_0 のところで比較すると、 $E_K > 0, E_A < 0$ より $\delta + \rho < \delta + \rho - E_K / E_A$ となるので、生産関数に関する仮定より $K^S < K_0$ となるが、このことが任意の消費の値に対して成り立つので、図 5 に描かれているように図 1 における $\dot{C} = 0$ 線 (図 5 の左側) は、(19) から得られる $\dot{C} = 0$ 線 (図 5 の右側) の左側に必ず位置することになる。

よって、(19) から得られる $\dot{C} = 0$ 線 (図 5 の右側) が図 3 の $\dot{K} = 0$ 線と交点をもつかぎり、図 4_a に表されているように $\dot{C} = 0$ 線と $\dot{K} = 0$ 線は 1 つの交点をもち、定常解は一意に存在することになる。

3.3.2 定常解の安定性

前項において、定常解の存在性、および、一意性について確認することができたので、次に定常解の安定性について位相図をもちいた分析を進める。そのために、 $\dot{C}(t) = 0$ 線、 $\dot{K}(t) = 0$ 線によって分けられる領域での消費や資本ストックの動きについて分析をおこなう。

まず、図 6 をもちいながら $\dot{C}(t) = 0$ 線によって分けられる左右の 2 つの領域における消費の動きについて検討する。

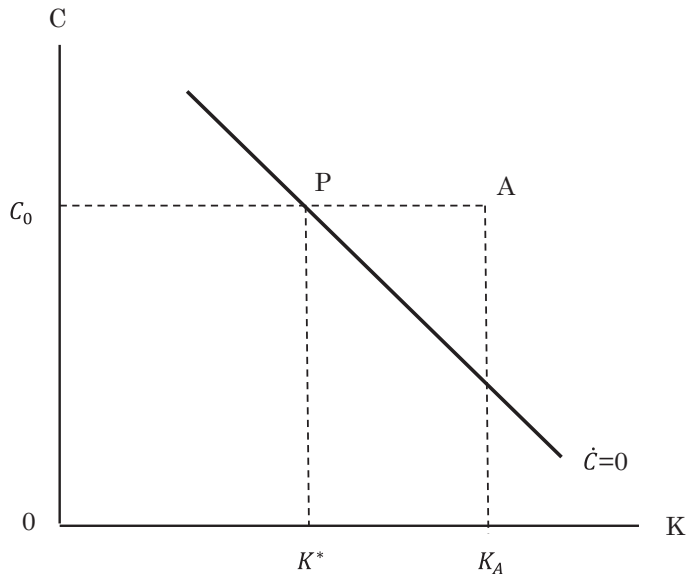


図 6

図 6 において、点 $P(K^*, C_0)$ は $\dot{C}(t) = 0$ 線上にあるので、(13) より

$$\frac{1}{\sigma_c} \left[\frac{\partial Y(K^*)}{\partial K} + \frac{\partial E(K^*, A^*) / \partial K}{\partial E(K^*, A^*) / \partial A} - \delta - \rho \right] C(t) = 0 \quad (20)$$

が成立している。一方、点 A(K_A, C_0) においては、資本ストックは点 P より多い ($K^* < K_A$) ので、 $\partial Y(K_A) / \partial K < \partial Y(K^*) / \partial K$ の関係が成立している。したがって、次の不等式が成立する。

$$\frac{1}{\sigma_c} \left[\frac{\partial Y(K_A)}{\partial K} + \frac{\partial E(K_A, A) / \partial K}{\partial E(K_A, A) / \partial A} - \delta - \rho \right] C(t) < \frac{1}{\sigma_c} \left[\frac{\partial Y(K^*)}{\partial K} + \frac{\partial E(K^*, A^*) / \partial K}{\partial E(K^*, A^*) / \partial A} - \delta - \rho \right] C(t) \quad (21)$$

(20) より (21) の右辺はゼロとなるので、 $K^* < K_A$ の領域では $\dot{C}(t) < 0$ となる。また、逆は逆になるので 2つの領域における C(t) の動きには図 7 のように表される。

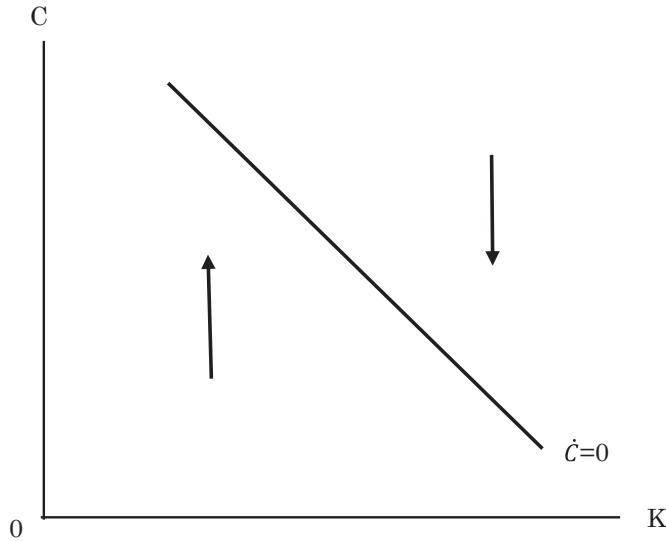


図 7

次に、 $\dot{K}(t) = 0$ 線によって分けられる 2つの領域における資本ストックの動きについて調べよう。

図 8 において、点 $Q^*(K_C, C^*)$ は $\dot{K} = 0$ 線上にあるので、(7) より

$$Y(K_C) - C^* - A - \delta K_C = 0 \quad (22)$$

が成立している。一方、点 B(K_C, C_B) においては、消費は点 Q より少ない ($C_B < C^*$) ので、

$$Y(K_C) - C^* - A - \delta K_C < Y(K_C) - C_B - A - \delta K_C \quad (23)$$

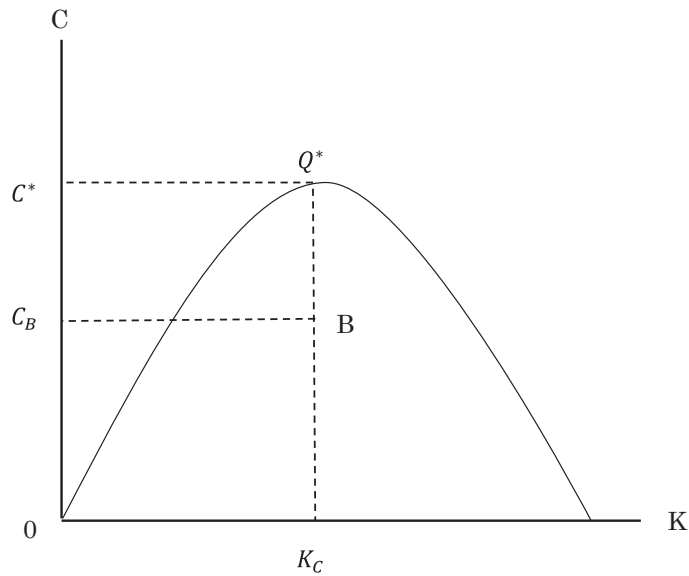


図 8

の関係が成立している。(22) より (23) の左辺はゼロとなるので、 $C(t) < C^*$ の領域では $0 < \dot{K}(t)$ となる。また、逆は逆になるので $K(t)$ の動きについては図9のように示されることになる。

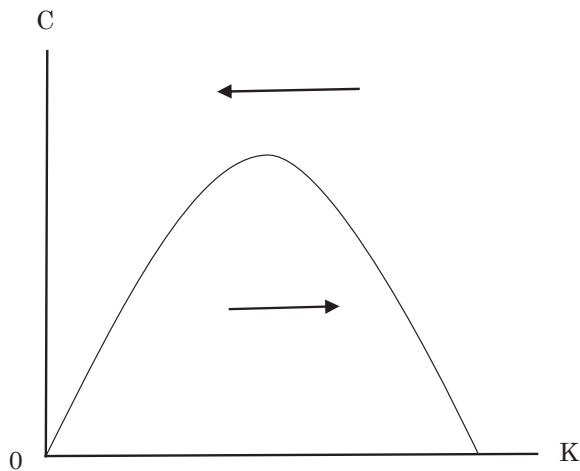


図 9

以上の分析から得られた2つの位相図(図7および図9)を1つに合わせ、消費Cの動き、および、資本ストックKの動きを鑑みながら経済成長経路について図示すると、図10のよう

に定常解に収束するサドル・パスが存在することが確認できる。したがって、定常解はサドル・パスの意味で安定的であると考えられる。

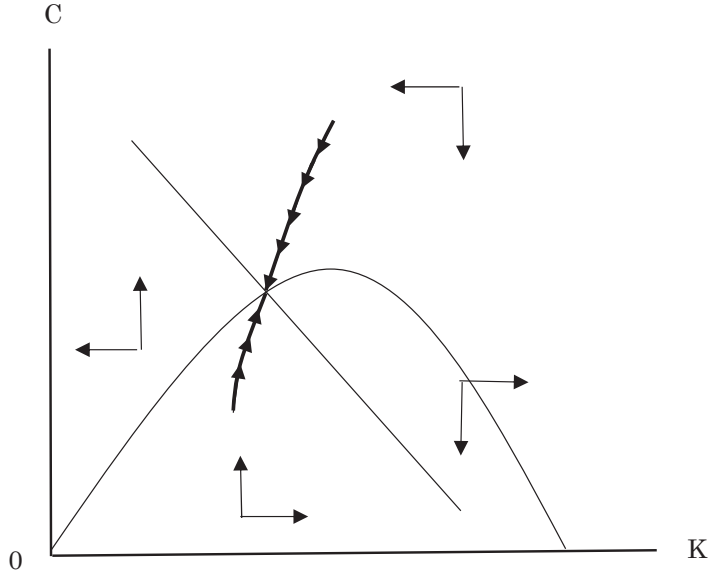


図10

位相図をもちいた分析では定常解はサドルパスの意味で安定的であることが確認できたが、この定常解の安定性について、消費 C と資本ストック K の微分方程式体系である (7) および (13) をそれぞれ線形近似して、固有値を検討する方法で再度確認してみることにする。

(7) および (13) を定常解 (K^*, C^*) の近傍で線形近似すると以下ようになる。

$$\dot{K} = [Y_K(K^*) - \delta]K - C + B; \quad B \equiv Y(K^*) - Y_K(K^*)K^* - A \quad (24)$$

$$\dot{C} = \frac{1}{\sigma_C} \left[Y_{KK}(K^*) + \frac{E_{KK}E_A - E_KE_{AK}}{E_A^2} \right] C^*K + D; \quad (25)$$

$$D \equiv \frac{1}{\sigma_C} \left[Y_{KK}(K^*) + \frac{E_{KK}E_A - E_KE_{AK}}{E_A^2} \right] C^*K^*$$

(24), (25) よりヤコビ行列 J が以下のように表される。

$$J = \begin{bmatrix} Y_K(K^*) - \delta & -1 \\ \frac{1}{\sigma_C} \left[Y_{KK}(K^*) + \frac{E_{KK}E_A - E_K E_{AK}}{E_A^2} \right] C^* & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

(26) より $|J| = \frac{1}{\sigma_C} \left[Y_{KK}(K^*) + \frac{E_{KK}E_A - E_K E_{AK}}{E_A^2} \right] C^* < 0$ となるが、これは2つの固有値が異符号をもつことを意味するので、図10で示されているように定常解は鞍点になっていることが確認できる。

4. 市場経済における成長経路

前節では、社会的に最適な経済成長経路について分析を進めるために、経済の構造を知っている社会計画者の存在を前提として、この社会計画者がすべての資源配分を決定することを想定して分析をおこなった。この節では、家計、企業、および、政府から構成される分権化された市場経済を想定しながら、市場経済における経済成長経路について分析を進める。

そこで、まず家計、企業のそれぞれの主体的均衡条件を導出し、市場均衡条件について考察をおこなった後、市場経済における経済成長経路について分析を進めることにする。

企業は、家計が供給する資本ストックを生産要素としてもちいながら生産活動をおこなうが、その生産過程においてフローとしての環境汚染物質が排出されるため、政府によって環境税が課されるとする。

政府は、環境税による税収を一括補助金として家計に給付する。家計は、利子収入、利潤配当、および、政府からの補助金によって消費をおこない、消費しなかった部分を資本蓄積に充てる。ここでは、企業は家計によって所有され、企業の利潤は家計に還元されるものとする。

4.1 家計の主体的均衡条件

まず、家計の主体的均衡条件について考察しよう。資本のレンタル料を $r(t)$ 、企業の利潤を $\Pi(t)$ 、政府からの補助金を $T(t)$ の記号をもちいてそれぞれ表すと、家計の予算制約式は以下ようになる。

$$\dot{K}(t) = \Pi(t) + [r(t) - \delta]K(t) + T(t) - C(t) \quad (27)$$

家計は、(27) の制約のもとで効用の割引現在価値 (8) を最大にするように消費の時間経路を決定する。この動的的最適化問題を (13) を求めたときと同様の方法で解くと、消費の変化率に関する以下の関係式を得る。

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\sigma_c} [r - (\delta + \rho)] \quad (28)$$

4.2 企業の主体的均衡条件

次に、企業の主体的均衡条件について検討する。企業は、各期において利潤を最大化するように、資本 K 、汚染防止活動の水準 A をそれぞれ決定する。環境税率を τ_E で表すと、企業の利潤は以下のように表される。

$$\Pi = Y(K) - rK - \tau_E E(K, A) - A \quad (29)$$

(29) を最大にするように K 、 A の水準をそれぞれ選択すると、利潤最大条件は以下のように求められる。

$$Y_K = r + \tau_E E_K, \quad (30a)$$

$$-\tau_E E_A = 1 \quad (30b)$$

(30a) は資本の限界生産力がそのレンタル料と税負担の合計と等しいことを、(30b) は汚染防止活動の限界収入はその限界費用に等しいことを、それぞれ表している。

4.3 市場均衡条件

以上の準備をもとにして市場均衡について考察を進める。そのために、生産された財の市場、および、資本市場におけるそれぞれの市場需要関数と市場供給関数について検討をおこなわなければならないが、ここでワルラス法則について確認しよう。家計の予算制約 (27) に (29)、および、政府の予算制約 $T = \tau_E E$ を代入して整理すると以下ようになる。

$$[(C + \dot{K} + \delta K + A) - Y] + r[K^d - K^s] = 0 \quad (31)$$

K^d は資本への需要、 K^s は資本の供給をそれぞれ表している。(31) は各市場における超過需要の合計が恒等的にゼロになることを示しているため、たとえば資本市場が均衡していれば財市場も均衡していることになる。

そこで、資本市場の均衡について検討することにする。利潤最大化条件 (30a)、(30b) より、企業は r 、 τ_E を所与として資本 K への需要関数 $K^d(r, \tau_E)$ 、および、汚染防止支出 $A(r, \tau_E)$ をそれぞれ決定する。

以上のことから、資本市場の均衡条件は以下ようになる。

$$K^d(r, \tau_E) = K^S \quad (32)$$

(32) より明らかなように、資本市場の均衡によって資本のレンタル率 r は、ストック変数 (K)、および、政策変数 (τ_E) によって決定される。さらに、(27) よりストック変数 (K) も政策変数 (τ_E) に依存しているので、市場経済の均衡成長経路は政策変数に依存していることになる。

4.4 市場経済における成長経路の定常解の存在と一意性

(27) と (28) をもちいて、まず定常状態について考察をおこなう。(28) より消費の変化が止まる ($\dot{C} = 0$ となる) のは、以下の関係式が成立するときである。

$$\frac{1}{\sigma_C} [r - (\delta + \rho)] C(t) = 0 \quad (33)$$

$C(t) \neq 0$ である限りは $C(t)$ の水準に関係なく、

$$r = \delta + \rho \quad (34)$$

が成立すれば $\dot{C}(t) = 0$ となる。 $r = \partial Y / \partial K$ なので、(34) を満たす K_0 は図 5 の右側に描かれた $\dot{C}(t) = 0$ 線の横軸上の切片であり、 $\dot{C}(t) = 0$ 線は図 5 の右側に描かれているものと同じになる。

次に $\dot{K} = 0$ 線について検討しよう。(27) より資本ストックの変化が止まる ($\dot{K} = 0$ となる) のは、以下の関係式が成立するときである。

$$C(t) = \Pi(t) + [r(t) - \delta] K(t) + T(t) \quad (34)$$

(34) をもとにして図 9 を描いたときと同様の分析をおこなうと図 9 と同様の図が得られることになる。図 5 の右側の $\dot{C}(t) = 0$ 線と図 9 と同様の図を組み合わせることによって、図 11 のような位相図が得られる。

また、図 10 によって存在性が示されている定常解の安定性をヤコビ行列によって検討した方法と同様の方法によって、図 11 における定常解が鞍点であることも確認することができる。

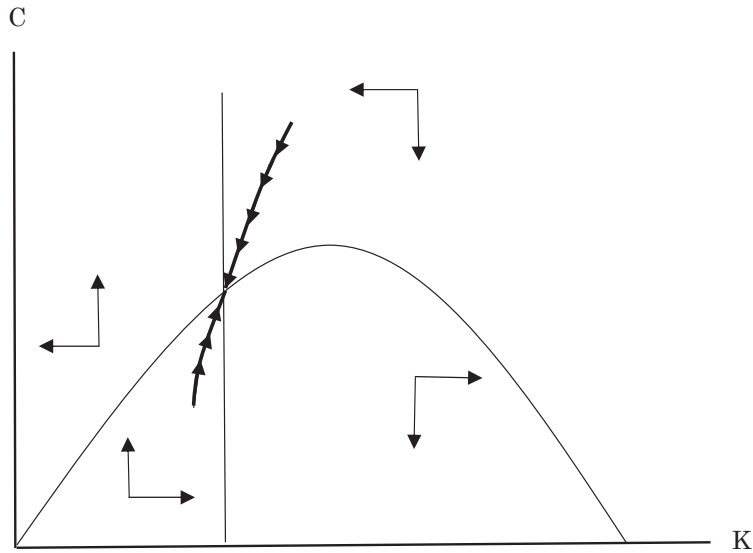


図11

5. 成長経路の比較

この節では、図10と図11を比較することで、社会的に最適な経済成長経路と市場経済における成長経路を比較し、併せて環境への影響についても比較することにする。

図5による分析から社会的な最適経路を考察する場合、および、市場経済を考察する場合の $\dot{C}(t) = 0$ 線の位置関係については確認できているので、2つの場合の $\dot{K} = 0$ 線の位置関係がどのようになっているかについて考察を進める。

(18)より、社会的な最適経路を検討する場合に $\dot{K} = 0$ とおくと $C = Y - A - \delta K$ となるが、(27)より市場経済を検討する場合に $\dot{K} = 0$ とおくと $C = \Pi(t) + [r(t) - \delta]K(t) + T(t)$ となる。両者を比較すると、任意の資本ストックの値に対して市場経済における C の方が大きいことが確認できるので、2つの $\dot{K} = 0$ 線の位置関係は図12のように表される。

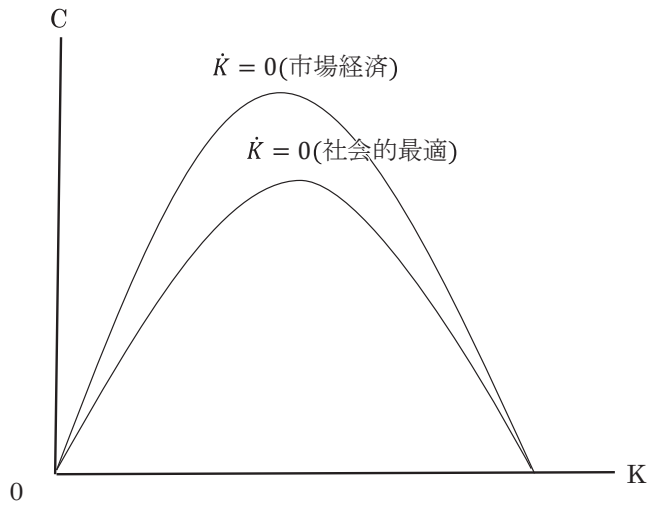


図12

図12に図5の2つの $\dot{C}(t) = 0$ 線を書き込むと、それぞれの場合の定常解の位置関係が図13のように表される。

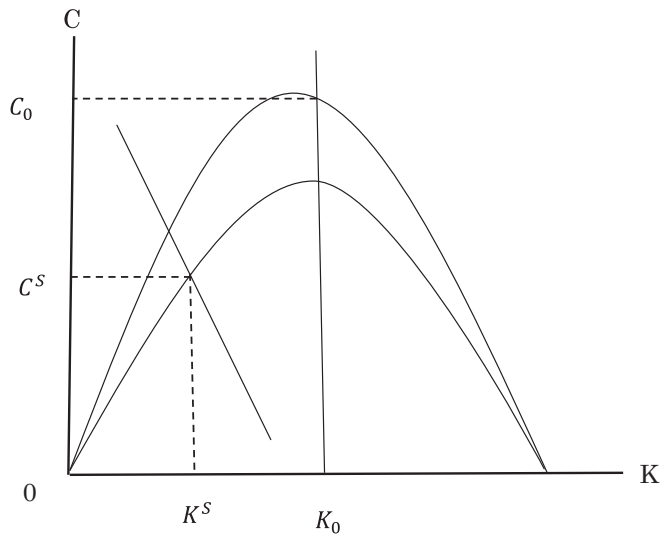


図13

図13より明らかなように、社会的に最適な成長経路における定常解 $((K^S, C^S))$ と市場経済における成長経路の定常解 $((K_0, C_0))$ を比較すると、定常状態での市場経済における資本ストック、および、消費の方が社会的に最適な成長経路における資本ストック、および、消

費よりも大きくなっている。これは、社会的に最適な状態と比較した場合、市場経済では大量生産と大量消費がおこなわれていることになり、その結果、フローの環境汚染も社会的に最適な状態と比較すると市場経済においてより多く発生していることになる。図13には、環境汚染が正しく内部化されていない市場経済の弊害が表されているのである。

6. お わ り に

本稿においては、Forster (1973), Gruver (1976), van der Ploeg and Withagen (1991), Gradus and Smulders (1993), Xepapadeas (2005)などを参照しながら、最適経済成長モデルにフローの環境汚染を導入したモデルについて詳細に検討をおこない、そのモデルをもちいて社会的に最適な成長経路、および、市場経済における成長経路についてそれぞれ分析をおこなった。そして、それぞれの成長経路における定常解の存在と一意性、および、安定性について確認し、成長経路はサドルパスになっており、定常解は鞍点になっていることを確認した。さらに、2つの定常解を比較することで、市場経済では社会的に最適な成長経路と比較して大量生産、および、大量消費がおこなわれており、フローの環境汚染が正しく内部化されていないことも確認した。

しかしながら、本稿におけるモデルは、位相図をもちいた分析をおこなうために、環境汚染をフローの環境汚染に限定して分析をおこなっているが、ストックの環境汚染をモデルに導入して分析をおこなうことは早急な課題である。ストックの環境汚染を導入した場合、成長経路の挙動を表す微分方程式が3本になり、位相図をもちいた分析が難しくなるため連立微分方程式に関する分析が必要となる。

また、最適経済成長モデルでは、無限時間視野をもった家計が想定されているが、たとえば、John and Pecchenino (1994)や Marini and Scaramozzino (1995)において分析にもちいられているような、家計の有限性を想定した世代重複モデルによって同様の分析をおこなうことも必要である。さらに、たとえば、Smulders (1999)や Jones and Manuelli (2001)において分析にもちいられているような、いわゆる内生的経済成長モデルによって同様の分析を試みることも課題である。

参 考 文 献

- [1] Blanchard, O. and S. Fisher (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.
- [2] Cass, D. (1965), Optimal Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies* **32**, 233-240.
- [3] Forster, B. A. (1973), Optimal Capital Accumulation in a Polluted Environment, *Southern Economic*

- Journal* **39**, 544-547.
- [4] Gradus, R. and S. Smulders (1993), The Trade-off between Environmental Care and Long-term Growth – Pollution in Three Prototype Growth Models, *Journal of Economics* **58**, 25-51.
 - [5] Gruver, G. W. (1976), Optimal Investment in Pollution Control in a Neoclassical Growth Context, *Journal of Environmental Economics and Management* **3**, 165-177.
 - [6] 林山泰久・武藤慎一・佐藤徹治 (2005). 「環境資源経済学における最適成長論」『土木学会論文集』 **799**, IV66, 25-44.
 - [7] John, A. A. and R. A. Pecchenino (1994), An Overlapping Generations Model of Growth and the Environment, *Economic Journal* **104**, 1393-1410.
 - [8] Johns, L. E. and R. E. Manuelli (2001), Endogenous Policy Choice: The Case of Pollution and Growth, *Review of Economic Dynamics* **4**, 369-405.
 - [9] Koopmans, T. C. (1965), On the Concept of Optimal Economic Growth, in *The Econometric Approach to Development Planning*, North-Holland.
 - [10] 前田純一・浦瀬康裕 (2021). 「最適経済成長モデルによる環境問題分析の基礎」『経済科学研究』 25巻 1号.
 - [11] Marini, G. and P. Scaramozzino (1995), Overlapping Generations and Environment Control, *Journal of Environmental Economics and Management* **29**, 64-77.
 - [12] Mohtadi, H. (1996), Environment, Growth, and Optimal Policy Design, *Journal of Public Economics* **63**, 119-140.
 - [13] Rosendahl, K. E. (1996), Does Improved Environment Policy Enhance Economic Growth? *Environmental and Resource Economics* **9**, 341-364.
 - [14] Schou, P. (2000), Polluting Non-Renewable Resources and Growth, *Environmental and Resource Economics* **16**, 211-227.
 - [15] Smulders, S. (1999), Endogenous Growth Theory and the Environment, in *Handbook of Environmental and Resource Economics*, Edward Elgar, Cheltenham.
 - [16] van der Ploeg, F. and C. Withagen (1991), Pollution Control and Ramsey Problem, *Environmental and Resource Economics* **1**, 215-236.
 - [17] Xepapadeas, A. (2005), Economic Growth and the Environment, *Handbook of Environmental Economics*, Edward Elgar, Cheltenham.