割引率を伴う無償保証期間を考慮した離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察

海　生　直　人*
（受付　2022 年 4 月 15 日）

あ　ら　ま　し

本稿では離散形分布ブロック取換えモデルに故障に対する無償保証期間を考慮した割引率を伴う拡張保全モデルを議論する。評価関数としては総期待割引費用を採用し，それを最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求める。無償保証期間を製品に考えることは総期待割引費用を減少させるだけでなく，最適予防保全周期を無償保証期間に近づける傾向を生じさせる。求められた結果より従来の結果が特別な場合として得られることに言及する。

キーワード　割引率，無償保証期間，離散形分布，ブロック取換え政策，総期待割引費用，最適政策

1.　は　じ　め　に

本稿では基本的な保全政策の 1 つであるブロック取換え政策について割引率を導入し離散形分布を仮定することによって議論する。ブロック取換えモデルとは以下のものである（Barlow and Proschan［1, p. 95］，海生［2, pp. 12–14］参照）。最も基本的なモデルは 1 ユニットシステムに対するものである。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ，かつある前もって定められた時刻において新しい同じユニットと交換される。ユニットの交換から次のユニットの交換までの期間を 1 サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。

本稿では製品（ユニット）の無償保証期間［3, 4］を考慮した離散形分布ブロック取換え政策を割引率を導入し議論する。最初に基本的な離散形分布ブロック取換え政策を議論する。次に無償保証期間を付加して離散形分布ブロック取換え政策を議論する。無償保証期間と予防保全周期の大小関係においてそれぞれの状況下での政策を考察し，総合的な離散形分布ブロック取換え政策を議論する。最後に基本的な離散形分布ブロック取換え政策との比較を行う。評価関数としては総期待割引費用を適用し，その総期待割引費用を最小にする最適離散

* 広島修道大学

形分布ブロック取換え政策を求める。さらに，求められた結果より既存の結果が特別な場合として得られることに言及する。

以下の諸量を導入する。

1）　C_d　1回当りの製品（ユニット）故障に対するダウンタイム費用
　　C_r　1回当りの製品（ユニット）購入に対する購入費用

2）　w　無償保証期間，すなわち［0, w］における故障に対しては無償でユニットが供給される。但し，ダウンタイム費用 C_d は発生する。
　　N　ブロック取換え政策における予防保全周期。ユニットは故障時点において新しい同じユニットと取換えられ（事後保全），かつある前もって定められた時刻 N において新しい同じユニットと交換される（予防保全）。

3）　$f(d)$　製品（ユニット）の寿命時間の確率関数（$d=0, 1, 2, \dots; f(0)=0$）
　　$F(d)$　同累積分布関数
　　$m(d)$　同再生確率関数（$m(0)=0$）
　　$M(d)$　同再生関数（$M(0)=0$）
　　$1/\lambda$　製品の期待寿命時間

4）　β　離散形の割引率（$0<\beta<1$）。d 時間経過後1単位の費用は β^d となる。

5）　$SD_i(N)$　$i=0, 1, 2$　総期待割引費用
　　$i=0$：$w=0$ のとき
　　$i=1$：$0<w\le N$ のとき
　　$i=2$：$0<N\le w$ のとき

2.　離散形分布ブロック取換え政策

最初に無償保証期間を伴わない，すなわち $w=0$ の場合の基本的な離散形分布ブロック取換え政策を考察する。

モデルは以下のものである。ユニットは故障時点において費用 C_d+C_r を伴って新しい同じユニットと取換えられ（事後保全），かつある前もって定められた時刻 N において費用 C_r を伴って新しい同じユニットと交換される（予防保全）。ユニットの交換（予防保全）から次のユニットの交換（予防保全）までの期間を1サイクルとし，同様なサイクルを繰返す。

総期待割引費用は

$$SD_0(N)=\frac{(C_d+C_r)\sum_{d=0}^{N}\beta^d m(d)+C_r\beta^N}{1-\beta^N} \tag{2.1}$$

となる。以下の式を定義する。

$$Q(N)=\frac{\beta\left(1-\beta^{N}\right)}{1-\beta}m(N+1)-\sum_{d=0}^{N}\beta^{d}m(d). \tag{2.2}$$

そのとき，総期待割引費用 $SD_0(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_0^* に対して以下の定理を得る。

［定理**2.1**］

（1） $m(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \geq 0$）次のことが成立する。

（i） もし $Q(\infty) > C_r/(C_d + C_r)$ ならば，そのとき

$$Q\left(N_0^*-1\right)<C_r/\left(C_d+C_r\right)\ \text{かつ}\ Q\left(N_0^*\right)\geq C_r/\left(C_d+C_r\right) \tag{2.3}$$

を満足する，総期待割引費用 $SD_0(N)$ を最小にする有限でただ 1 つの最適予防保全周期 N_0^*（$0< N_0^* < \infty$）が存在し，総期待割引費用に関して以下の関係が成立する。

$$\frac{\beta}{1-\beta}(C_d+C_r)m\left(N_0^*\right)-C_r<SD_0\left(N_0^*\right)\leq\frac{\beta}{1-\beta}(C_d+C_r)m\left(N_0^*+1\right)-C_r. \tag{2.4}$$

（ii） もし $Q(\infty) \leq C_r/(C_d + C_r)$ ならば，そのとき最適予防保全周期は $N_0^* \to \infty$ となる。すなわち予防保全は行わず事後保全のみを行う。そのときの総期待割引費用は

$$SD_0(\infty)=\left(C_d+C_r\right)\sum_{d=0}^{\infty}\beta^{d}m(d) \tag{2.5}$$

となる。

（2） $m(n)$ が単調減少であるとき（$n \geq 0$）最適予防保全周期は $N_0^* \to \infty$ となる。□

3. 無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策

前節では無償保証期間を伴わない（$w = 0$）基本的離散形分布ブロック取換え政策を取扱ったが，本節では無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策を取扱う。無償保証期間内での製品（ユニット）の故障に対する取換えに関しては購入費用 C_r は免除され，ダウンタイム費用 C_d のみが発生する。以下においては無償保証期間 w と予防保全周期 N の大小関係においてそれぞれの状況下での最適離散形分布ブロック取換え政策を考察し，その結果に基づき総合的な離散形分布ブロック取換え政策を議論する。

3.1 無償保証期間が予防保全周期以下の場合

$0 < w \leq N$ の場合を取扱う。

総期待割引費用は

$$SD_1(N)=\frac{(C_d+C_r)\sum_{d=0}^{N}\beta^d m(d)+C_r\beta^N-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d)}{1-\beta^N} \tag{3.1}$$

となる。このとき総期待割引費用 $SD_1(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_1^* に対して以下の補題を得る。

［**補題3.1**］

$0<w\le N$ において以下が成立する。

（1） $m(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n\ge 0$）次のことが成立する。

（i） もし $Q(\infty)\le(C_r-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d))/(C_d+C_r)$ ならば，そのとき総期待割引費用 $SD_1(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_1^* は $N_1^*\to\infty$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(\infty)=(C_d+C_r)\sum_{d=0}^{\infty}\beta^d m(d)-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d) \tag{3.2}$$

となる。

（ii） もし $Q(w)<(C_r-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d))/(C_d+C_r)<Q(\infty)$ ならば，そのとき

$$Q(N_1^*-1)<\left(C_r-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d)\right)/(C_d+C_r)$$

$$\text{かつ } Q(N_1^*)\ge\left(C_r-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d)\right)/(C_d+C_r) \tag{3.3}$$

を満足する有限でただ 1 つの最適予防保全周期 N_1^*（$w<N_1^*<\infty$）が存在し，総期待割引費用に関して以下の関係が成立する。

$$\frac{\beta}{1-\beta}(C_d+C_r)m(N_1^*)-C_r<SD_1(N_1^*)\le\frac{\beta}{1-\beta}(C_d+C_r)m(N_1^*+1)-C_r. \tag{3.4}$$

（iii） もし $Q(w)\ge(C_r-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d))/(C_d+C_r)$ ならば，そのとき最適予防保全周期は $N_1^*=w$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_1(N_1^*)=SD_1(w)=\frac{C_d\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d)+C_r\beta^w}{1-\beta^w} \tag{3.5}$$

となる。

（2） $m(n)$ が単調減少であるとき（$n\ge 0$）次のことが成立する。

（i） もし

$$SD_1(w)\ge SD_1(\infty), \tag{3.6}$$

すなわち

$$C_d\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d)+C_r\beta^w \geq \left[\left(C_d+C_r\right)\sum_{d=0}^{\infty}\beta^d m(d)-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d)\right]\left(1-\beta^w\right) \tag{3.7}$$

ならば，$N_1^* \to \infty$ となる。

（ii） もし

$$SD_1(w) < SD_1(\infty), \tag{3.8}$$

すなわち

$$C_d\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d)+C_r\beta^w < \left[\left(C_d+C_r\right)\sum_{d=0}^{\infty}\beta^d m(d)-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d)\right]\left(1-\beta^w\right) \tag{3.9}$$

ならば，$N_1^* = w$ となる。□

3.2 無償保証期間が予防保全周期以上の場合

$0 < N \leq w$ の場合を取扱う。

総期待割引費用は

$$SD_2(N)=\frac{C_d\sum_{d=0}^{N}\beta^d m(d)+C_r\beta^N}{1-\beta^N} \tag{3.10}$$

となる。このとき総期待割引費用 $SD_2(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_2^* に対して以下の補題を得る。

［**補題3.2**］

$0 < N \leq w$ において以下が成立する。

（1） $m(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \geq 0$）次のことが成立する。

（i） もし $Q(w) \leq C_r/C_d$ ならば，そのとき総期待割引費用 $SD_2(N)$ を最小にする最適予防保全周期 N_2^* は $N_2^* = w$ となる。そのときの総期待割引費用は

$$SD_2\left(N_2^*\right)=SD_2(w)=\frac{C_d\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d)+C_r\beta^w}{1-\beta^w} \tag{3.11}$$

となる。

（ii） もし $Q(w) > C_r/C_d$ ならば，そのとき

$$Q\left(N_2^*-1\right) < C_r/C_d \text{ かつ } Q\left(N_2^*\right) \geq C_r/C_d \tag{3.12}$$

を満足する有限でただ 1 つの最適予防保全周期 N_2^*（$0 < N_2^* \leq w$）が存在し，総期待割引費用に関して以下の関係が成立する。

$$\frac{\beta}{1-\beta}C_d m\left(N_2^*\right)-C_r < SD_2\left(N_2^*\right) \le \frac{\beta}{1-\beta}C_d m\left(N_2^*+1\right)-C_r\,. \tag{3.13}$$

（2）　$m(n)$ が単調減少であるとき（$n \ge 0$）最適予防保全周期は $N_2^* = w$ となる。□

3.3　大域的最適予防保全周期

前もって無償保証期間と予防保全周期の大小関係を知ることはできない。本節では補題3.1および3.2から大域的最適予防保全周期 N_w^* についてまとめる。

［定理**3.3**］

無償保証期間を w としたとき以下が成立する。

（1）　$m(n)$ が狭義単調増加であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

（i）　もし $Q(w) < (C_r - C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d))/(C_d + C_r)$ ならば，$N_w^* = N_1^* > w$ となる。

（ii）　もし $(C_r - C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m(d))/(C_d + C_r) \le Q(w) \le C_r/C_d$ ならば，$N_w^* = w$ となる。

（iii）　もし $Q(w) > C_r/C_d$ ならば，$N_w^* = N_2^*$（$0 < N_2^* \le w$）となる。

（2）　$m(n)$ が単調減少であるとき（$n \ge 0$）次のことが成立する。

（i）　もし

$$SD_1\left(w\right)=SD_2\left(w\right)=\frac{C_d\sum_{d=0}^{w}\beta^d m\left(d\right)+C_r\beta^w}{1-\beta^w}\ge SD_1\left(\infty\right), \tag{3.14}$$

すなわち

$$C_d\sum_{d=0}^{w}\beta^d m\left(d\right)+C_r\beta^w \ge \left[\left(C_d+C_r\right)\sum_{d=0}^{\infty}\beta^d m\left(d\right)-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m\left(d\right)\right]\left(1-\beta^w\right) \tag{3.15}$$

ならば，$N_w^* = N_1^* \to \infty$ となる。

（ii）　もし

$$SD_1\left(w\right)=SD_2\left(w\right)=\frac{C_d\sum_{d=0}^{w}\beta^d m\left(d\right)+C_r\beta^w}{1-\beta^w}< SD_1\left(\infty\right), \tag{3.16}$$

すなわち

$$C_d\sum_{d=0}^{w}\beta^d m\left(d\right)+C_r\beta^w < \left[\left(C_d+C_r\right)\sum_{d=0}^{\infty}\beta^d m\left(d\right)-C_r\sum_{d=0}^{w}\beta^d m\left(d\right)\right]\left(1-\beta^w\right) \tag{3.17}$$

ならば，$N_w^* = N_1^* = w$ となる。□

3.4 考　　察

無償保証期間を製品に付与することは総期待割引費用を減少させるだけでなく，最適予防保全周期を無償保証期間に近づける傾向を生じさせる。換言すれば，N_0^* が w より大きいときには無償保証は最適予防保全周期を短くし w に近づける傾向がある。逆に N_0^* が w より小さいときには無償保証は最適予防保全周期を長くし w に近づける傾向がある。

4. む　す　び

本稿では離散形分布ブロック取換えモデルに製品の故障に対する無償保証期間を考慮した割引率を伴う拡張保全モデルを議論した。評価関数として総期待割引費用を採用し，それを最小にする最適離散形分布ブロック取換え政策を求めた。無償保証期間を考慮することは総期待割引費用を減少させるだけでなく，最適予防保全周期を無償保証期間に近づける傾向を生じさせる。本稿において得られた結果に摂動法を適用することにより定常状態における単位時間当りの期待費用を評価関数とした場合の結果が得られる（海生［5］参照）。

文　献

［1］R. E. Barlow and F. Proschan, “Mathematical Theory of Reliability,” John Wiley, New York, 1965.
［2］海生直人，“確率的保全問題に関する研究，” 広島修道大学総合研究所（広島修道大学研究叢書第52号），1989.
［3］W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, “Warranty Cost Analysis,” Marcel Dekker, New York, 1994.
［4］W. R. Blischke and D. N. P. Murthy, “Product Warranty Handbook,” Marcel Dekker, New York, 1996.
［5］海生直人，“無償保証期間を伴う離散形分布ブロック取換え政策に関する一考察，” 経済科学研究，Vol. 18, No. 1, pp. 1 – 8（2014 9月）.

Abstract

A Note on Discrete Block Replacement Policy Taking Account of Free Warranty Interval with Discounting

Naoto Kaio

In this paper, we discuss the extended discrete block replacement model, taking account of free warranty interval with discounting. We adopt the expected total discounted cost with a discrete discount rate as a criterion of optimality and obtain the optimal discrete block replacement policy minimizing that expected total discounted cost. When we apply the free warranty interval, the expected total discounted cost decreases and furthermore we have the tendency that the optimal preventive maintenance period goes closer to the free warranty interval. Finally, we illustrate the relationship between the result obtained in this paper and the existing one.

Keywords: Discrete discount rate, Free warranty interval, Discrete distribution, Block replacement policy, Expected total discounted cost, Optimal policy