積立金運用による年金システムの理論的分析

前　田　純　一*
（受付　2022 年 5 月 31 日）

1　は　じ　め　に

少子高齢化の進行にともなって，賦課方式による年金システムも存続の危機にさらされている。労働期にある世代からの保険料拠出によって当該期の引退世代への年金給付を賄っている賦課方式の年金システムにおいては，少子高齢化により年金の財源を負担する世代の規模が相対的に縮小し，年金の給付を受ける世代の規模が相対的に拡大することは財源の逼迫を意味し，年金システムそのものの存続が問われることになってくるのである。このため，たとえば，Homburg（1990），Sinn（2000），Miles（2000），Gyárfás and Marquardt（2001）などにおいて賦課方式から積立方式への移行についての議論が行われているが，その一方で，システムそのものの変更について議論を行う前に年金積立金を運用し，その収益によってこの危機を乗り越えていけないかという議論も存在している。

しかしながら，年金積立金をたとえば株式などに運用することは，大きな収益率をもたらす可能性がある一方で，大きなリスクもともなうことになる。このため，このリスクをヘッジすることができるかどうかという問題が出てくるが，年金積立金の運用と並行して賦課方式の年金システムを運営すれば，リスクをヘッジする効果が出てくることになる。

賦課方式システムを，積立金による資産運用収益をもとにした年金給付と並行して運営することを想定した場合，給付される年金総額のうち運用収益をもとにした部分には収益率のリスクが含まれることになるが，賦課方式システムをもとにした部分には収益率のリスクは含まれない。すなわち，株式などの危険資産の収益率は，たとえばインフレーションや生産性の変動によって変化するが，その運用収益を再び年金として給付することを想定すると，運用収益にもとづく給付額にはこれらのリスクが含まれることになる。しかし，給付額には賦課方式によって給付される部分も含まれているので，この賦課方式による給付部分によってこれらのリスクをヘッジできる可能性があるのである。

* 広島修道大学

したがって，積立金運用を含んだ賦課方式による年金システムにおいて，年金積立金を株式等の危険資産に対して運用した場合，賦課方式システムが本来備えている世代間リスク・シェアリング効果に加えて，資産運用に含まれるリスクをヘッジする効果も出てくることになるのである。このリスクヘッジ効果に依拠すれば，年金積立金を積極的に運用することを検討し，その資産構成を再検討することができるかもしれない。

このような問題意識にもとづいて，本稿においては，年金保険料による財源をどのように運用して年金システムを運営していけばよいかという問題について，理論的な考察を進めていくことにする。具体的には，年金システムそのものの規模の決定の問題，年金保険料による財源をどのように賦課方式による年金給付のための財源と積立金運用のための財源に分割して配分していくかという問題，さらに，積立金運用のための財源に配分された年金保険料を危険資産と安全資産にどのように配分していくかという問題について，それぞれ理論的に考察を行っていくということである。なお，積立金運用に配分された財源は，その運用収益と共に再び年金給付のために用いられる。

このような方向性で分析が行われているものには，たとえば Shiller（1998），Miles（2000），Matsen and Thøgersen（2004）などがある。Shiller（1998）においては，社会保障システムによる世代間リスク・シェアリング，世代内リスク・シェアリング，そして，国家間でのリスク・シェアリングについて検討が行われている。Miles（2000）においては，所得や資産収益率に不確実性を含んだモデルを用いたシミュレーションを行うことによって，積立方式による年金給付システムと賦課方式による年金給付システムの最適なバランスについて分析が行われている。Matsen and Thøgersen（2004）においては，所得，人口および資産の収益率に関する不確実性を含んだモデルを用いながら，年金保険料収入を賦課方式システムの運営と積立金の運用にどのように配分していくかという問題に関して理論的な分析が行われている。

本稿では，Matsen and Thøgersen（2004）による分析に焦点を当てながら分析を進めていくので，彼らの分析についてもう少し詳しく言及しておこう。Matsen and Thøgersen（2004）においても，政府の決定変数は，年金保険料率，年金保険料による収入の年金給付と年金積立金への配分比率，積立金運用における危険資産と安全資産の資産構成比の 3 つである。また，個人の決定変数は，貯蓄運用における危険資産と安全資産の資産構成比である。

このように，政府も個人も金融市場へ参入するのであるが，彼らの分析においては，以下の 2 つのケースを想定して分析が進められている[1)]。1 つは，個人が金融市場へ完全に参入

1） この 2 つのケース以外にも，個人と政府が同時に金融市場へ参入するケースも考えられるが，本稿での分析においては，政府の目的関数は個人の期待効用となっているので，政府の目的は個人の期待効用の最大化である。個人が金融市場へ自由に参入できる場合は，個人レベルで，期待効用を最 ↗

し，政府は年金給付のみを行うと想定したケースである。すなわち，個人レベルで危険資産と安全資産の運用が自由に行われる場合は，政府は，年金積立金による資産運用は行わず（すなわち，年金保険料の積立は行わず），年金給付のみを行うと想定したケースである。そして，このケースでの，個人レベルの最適な資産選択比率，および，最適な年金保険料率が導出されている。

彼らの分析における貢献は，個人が自由に金融市場に参入すると想定した場合の最適な年金保険料率（すなわち，公的年金システムの最適規模）が，後述する 2 つのリスク・シェアリングの概念（事後的リスク・シェアリング，および，事前的リスク・シェアリング）のもとで，それぞれ異なる大きさになることを導出したことである。第 3 節，および，第 4 節における分析によって明らかになることだが，事後的リスク・シェアリングを想定した場合の方が，公的年金システムの規模は大きくなる。

もう 1 つは，金融市場に関する情報が不十分であるとか，危険資産の市場へ参入するためのコストが高いなどの理由によって，個人が危険資産の市場に参入せず，安全資産の運用のみを行うと想定したケースである。この場合は，政府は，年金給付を行うとともに，年金積立金によって危険資産と安全資産の運用を，個人の資産運用の代行として行う。ただし，Matsen and Thøgersen（2004）においては，政府による年金積立金の運用において，危険資産のみが運用されると想定したケースのみしか分析が行われておらず，その場合における年金保険料率，年金給付と積立金への配分比率について分析が行われている。

個人が危険資産の市場へ参入しない場合においては，安全資産の運用しかできないので，自由に参入できる場合の最適資産比率を超えて，安全資産が過剰に購入されている。Matsen and Thøgersen（2004）においては，政府は，個人の資産運用を（年金保険料収入を通じて）代行すると仮定しているので，これ以上安全資産を運用することはせず，危険資産のみを運用するのである。

このように，Matsen and Thøgersen（2004）の分析においては，安全資産と危険資産の両方が運用されると想定したケースの分析が行われていないので，本稿においては，この未検討の部分の検討を行うことで，彼らの分析の拡張が試みられている[2)]。

Matsen and Thøgersen（2004）による分析は，2 つのリスク・シェアリングの概念にもと

↘ 大にするための最適なポートフォリオ選択が行われるので，政府は，個人のポートフォリオ選択を攪乱しないために金融市場へは参入しない。逆に，個人が危険資産の市場に参入できない場合は，個人レベルでの最適なポートフォリオ選択を行うことができないので，政府は，年金保険料収入による財源をもとにして金融市場へ参入し，個人の代わりにポートフォリオ選択を行うのである。以上のことから，分析されるケースは以下の 2 つとなる。

2） 3.2.2節，4.2.2節において分析が行われるが，個人が安全資産の運用しか行わない場合も，政府が代表的個人の期待効用最大化を行うことを前提として，政府による年金積立金の最適運用比率について考察を行っている。

づいて行われているが，この2つの概念についても，それぞれ言及しておこう。1つの概念は，現存する個人の，まだ実現していない将来におけるリスクを，何らかのシステムによってシェアすることで，この個人の生涯効用の水準を高めようというものである。このようなリスク・シェアリングの概念は，たとえば，Sinn（1996），Hassler and Lindbeck（1997），Ball and Mankiw（2001）などによって紹介されている概念で，事後的リスク・シェアリングとよばれるものである。この概念においては，個人の生涯効用は，すでに実現している現在の経済状況と，まだ実現していない将来の経済状況によって決定される。

この概念を想定して分析を行う場合は，政府は，次のようにして年金システムの運営に関する意思決定を行う。すばわち，現存する個人が将来に直面する不確実性を伴った経済状況（貯蓄によって購入する各資産の運用収益率，年金給付額，次の世代の人口など）を期待値として考慮しながら，個人の生涯効用を最大にするように，年金保険料率の決定，保険料収入の年金給付と積立金運用への配分比率の決定，積立金運用へ配分された保険料収入によって購入される資産の構成比の決定を行うのである。

次に，もう1つのリスク・シェアリングの概念について言及しよう。個人は生まれた瞬間に自身の生涯におけるさまざまなリスクに直面することになるが，個人が生まれる前に，これらのリスクを何らかのシステムによってシェアすることを想定し，事前的に，まだ生まれていない個人の生涯効用の期待値を高めようというのが，もう1つのリスク・シェアリングの概念である。このようなリスク・シェアリングの概念も，たとえば，Sinn（1996），Hassler and Lindbeck（1997），Ball and Mankiw（2001）などによって紹介されている概念で，事前的リスク・シェアリングとよばれるものである。

この概念においては，たとえば，t 期に誕生する個人の生涯効用の期待値を t 期以前の s 期（$s \leq t$）において計算し，この s 期において評価された生涯効用の期待値を，何らかのシステムによって高めることを考えているのである。

この概念を想定して分析を行う場合は，政府は，次のようにして年金システムの運営に関する意思決定を行う。すなわち，まだ誕生していない個人が誕生後に直面する不確実性を伴った経済状況（賃金水準，貯蓄によって購入する各資産の運用収益率，年金給付額，次の世代の人口など）を考慮しながら，個人の生涯効用の期待値を最大にするように，年金保険料率の決定，保険料収入の年金給付と積立金運用への配分比率の決定，積立金運用へ配分された保険料によって購入される資産の構成比の決定を，事前的に行うのである。

本稿においては，先に言及された Matsen and Thøgersen（2004）において分析が行われていなかったケース（個人が危険資産の市場に参入できず，安全資産のみを運用すると想定した場合に，政府が，年金積立金を危険資産と安全資産の両方に運用すると想定するケース）について分析が行われ，次のような結果が得られている。

まず，事後的リスク・シェアリングのケースにおいては，危険資産の収益率と所得の成長率の共分散がゼロ以下である場合は，年金システムは賦課方式による年金給付のみが行われることになり，積立金運用には年金保険料による財源は配分されず，年金積立金の運用は行われない。一方，共分散が正の値をとる場合においては，ある条件の下で 2 つのケースが存在する。1 つのケースでは，年金給付と年金積立金運用の両方が行われ，さらに，年金積立金の運用においては，危険資産と安全資産の両方が運用される。もう 1 つのケースでは，年金給付は行われず，年金積立金の運用のみが行われる。さらに，年金積立金の運用においては，安全資産の運用のみが行われる。

次に，事前的リスク・シェアリングのケースにおいては，年金保険料率や，年金保険料による財源の配分比率を決定する方程式が煩雑なため，危険資産の収益率と所得の成長率の共分散がゼロとなる特定のケースにおいてのみ分析が行われる。そして，そのケースにおいては，年金システムは年金積立金運用のみが行われ，賦課方式による年金給付は行われないという結果が得られる。さらに，年金積立金運用においては，安全資産のみが運用され，危険資産は運用されない。

本稿は以下のように構成される。第 2 節においては，本稿での分析に用いられるモデルが紹介される。第 3 節においては，事後的リスク・シェアリングを想定した場合における年金システムの運営について考察が行われる。第 4 節においては，事前的リスク・シェアリングを想定した場合における年金システムの運営について考察が行われる。なお，第 3 節，第 4 節においては，まず Matsen and Thøgersen（2004）による分析の再検討が詳細に行われ，その後，彼らによって分析が行われなかった部分についての検討が行われている。第 5 節においては，分析結果がまとめられるとともに，今後の課題について言及する。

2　モ　デ　ル

本稿での分析に用いられるモデルは，Matsen and Thøgersen（2004）において用いられている 2 期間生存型の世代重複モデルである。この節においては，本稿における分析に用いられるモデルを詳細に紹介する。

2.1　個　　人

各世代は労働期と引退期の 2 期間生存し，労働期には 1 単位の労働を非弾力的に供給して W_t の賃金を受けとる。この賃金は，たとえば生産性ショック等によって毎期変動するものとする。賃金の成長率を Λ_{t+1} で表すと，$W_{t+1}=(1+\Lambda_{t+1})W_t$ と表される。後述されるが，Λ_{t+1} は確率変数である。

分析をできるだけ簡単なものにするために，Gordon and Varian（1988），Ball and Mankiw（2001）にしたがって，各世代の構成員は，労働期には消費を行わず，引退期にのみ消費を行うものとする。すなわち，労働期には貯蓄のみを行うことになるが，各個人は，この貯蓄を安全資産と危険資産にそれぞれ振り分けて資産運用を行う。安全資産の収益率は定数 R^f で表し，危険資産の収益率は毎期変動する確率変数 R_{t+1} で表すことにする。各世代の代表的個人は，労働期の所得（すなわち貯蓄）のうち，ω^P（$0 \le \omega^P \le 1$）の割合に相当する部分を危険資産への運用に配分し，残りの $1-\omega^P$ の割合に相当する部分を安全資産への運用に配分する。

任意の t 期の人口は X_t で表され，人口成長率は確率変数であるとする。t 期から $t+1$ 期への人口成長率を N_{t+1} で表すと，$t+1$ 期の人口は $X_{t+1}=(1+N_{t+1})X_t$ と表される。

賃金の成長率 Λ_{t+1}，危険資産の収益率 R_{t+1}，人口成長率 N_{t+1} はそれぞれ確率変数であるが，Campbell and Viceira（2002）にしたがって，これらの変数は対数正規分布をしており，かつ，時間を通じて独立同一分布をしているものとする。

任意の $t+$ 1 期の総賃金所得 $W_{t+1}X_{t+1}$ は W_{t+1}，X_{t+1} の成長式より $(1+\Lambda_{t+1})(1+N_{t+1})W_tX_t$ と表されるが，この式を使って総賃金所得の成長率 $G_{t+1} \equiv \dfrac{W_{t+1}X_{t+1}-W_tX_t}{W_tX_t}$ を表すと，$G_{t+1}=N_{t+1}+\Lambda_{t+1}+\Lambda_{t+1}N_{t+1}$ となる。対数正規分布をする確率変数の積もまた対数正規分布をすることを考慮すると，G_{t+1} も対数正規分布をする確率変数となる。

t 世代の代表的個人の期待効用は，以下のように表されるとする。

$$U_t = E_t\left[\delta \frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] \tag{1}$$

γ は相対的危険回避を表した係数であり，各世代で共通であるとする。δ は効用の割引率であり，C_{t+1} は t 世代の代表的個人の引退期（$t+1$ 期）における消費水準である。

代表的個人の予算制約（消費 C_{t+1} の決定式）は以下のようになる。

$$C_{t+1} = (1-\tau)W_t\left(\omega^P(1+R_{t+1}) + (1-\omega^P)(1+R^f)\right) + \Pi_{t+1} \tag{2}$$

τ（$0 \le \tau \le 1$）は年金保険料率であり，Π_{t+1} は年金給付額を表している。労働期において，年金保険料を差し引いた所得 $((1-\tau)W_t)$ の ω^P の割合が危険資産に運用され，残りの $1-\omega^P$ の割合が安全資産に運用される。そして，その運用収益と年金給付によって引退期の消費が行われているのであるが，(2) はこのことを表している。

2.2　公的年金システム

第 1 節においても紹介されたが，政府は，次のような年金システムを運営しているとする。

システムは，賦課方式による年金給付部門と積立金運用部門の 2 つに分かれており，たとえば任意の t 期においては，年金保険料収入（$\tau W_t X_t$）をこの 2 つの部門に分割して配分する。分割の際には，β $(0 \leq \beta \leq 1)$ の割合に相当する部分を積立金運用部門へ配分し，その残りの $1-\beta$ の割合に相当する部分を賦課方式による年金給付部門へ配分する。

賦課方式による年金給付部門へ配分された年金保険料収入は，そのまま t 期に引退期にある世代への年金給付に用いられるが，積立金運用部門へ配分された年金保険料収入は，さらに 2 つに分割されて政府による年金積立金運用に用いられる。運用先の 1 つは株式などの危険資産であり，積立金運用部門に配分された財源の $\omega^g (0 \leq \omega^g \leq 1)$ の割合に相当する部分が危険資産に対して運用される。もう 1 つの運用先は収益率の確定している安全資産であり，残りの $1-\omega^g$ の割合に相当する部分が安全資産に対して運用される。

したがって，政府は，年金保険料率 τ，年金システムにおける 2 つの部門への年金保険料収入の分割割合 β，積立金運用部門に配分された年金保険料収入の危険資産と安全資産への分割割合 ω^g という 3 つの変数を選択することで，年金システムの運営を行うことになる。

このような年金システムを想定すると，任意の $t+1$ 期において，賦課方式による年金給付部門へ配分される財源は，$t+1$ 世代の労働期の人々からの年金保険料収入の（$1-\beta$）の割合となるので，$(1-\beta)\tau W_{t+1} X_{t+1}$ と表されるが，2.1節において想定された $W_{t+1} = (1+\Lambda_{t+1})W_t$, $X_{t+1} = (1+N_{t+1})X_t$ という関係式を代入すると，$(1-\beta)\tau(1+\Lambda_{t+1})(1+N_{t+1})W_t X_t = (1-\beta)\tau(1+G_{t+1})W_t X_t$ と表される。したがって，$t+1$ 期に引退期にある世代への 1 人あたり年金給付額は $(1-\beta)\tau(1+G_{t+1})W_t$ と表すことができる。

また，その 1 期前の t 期において，積立金運用部門へ配分される年金保険料収入は $\beta\tau W_t X_t$ であるが，これが分割されて危険資産と安全資産に対してそれぞれ運用されるので，危険資産への運用によって $t+1$ 期にもたらされる収益は $\omega^g \beta\tau W_t X_t (1+R_{t+1})$，安全資産への運用によってもたらされる収益は $(1-\omega^g)\beta\tau W_t X_t (1+R^f)$ と表される。したがって，積立金運用部門における運用収益の総額は $\omega^g \beta\tau W_t X_t (1+R_{t+1}) + (1-\omega^g)\beta\tau W_t X_t (1+R^f) = \beta\tau(1+R^f+\omega^g(R_{t+1}-R^f))W_t X_t$ と表されるので，政府による年金積立金運用による 1 人あたり総収益は $\beta\tau(1+R^f+\omega^g(R_{t+1}-R^f))W_t$ となる。

以上のことから，任意の t 世代が引退期にある $t+1$ 期において給付される 1 人あたりの年金給付額 Π_{t+1} は以下のように表される。

$$\Pi_{t+1} = \beta\tau\left(1+R^f+\omega^g\left(R_{t+1}-R^f\right)\right)W_t + \left(1-\beta\right)\tau\left(1+G_{t+1}\right)W_t \tag{3}$$

（3）の右辺第 1 項は，政府による年金積立金運用によって得られた収益が年金として還元された部分であり，右辺第 2 項は，賦課方式システムによって，次の世代の所得から年金として移転された部分である。

（2）と（3）より，任意の t 世代の引退期における 1 人あたり消費 C_{t+1} は以下のように表される。

$$C_{t+1}=\left(1+R_{t+1}^{T}\right)W_t\,;R_{t+1}^{T}\equiv R^f+a\left(R_{t+1}-R^f\right)+b\left(G_{t+1}-R^f\right),$$
$$a\equiv\omega^P\left(1-\tau\right)+\tau\beta\omega^g,b\equiv\tau\left(1-\beta\right)\qquad(4)$$

2.3　2 つのリスク・シェアリングの概念

以上の準備をもとに，次節以降において，政府による年金保険料率 τ，2 つの部門への年金保険料収入の分割割合 β，年金積立金の危険資産運用と安全資産運用への分割割合 ω^g の決定について考察を進めていこう。各個人および政府は，賃金所得の成長率，人口成長率，危険資産の収益率という 3 つの不確実性に直面しながら意思決定を行うが，政府が，これらの不確実性から生じるリスクをシェアすることを想定する場合，第 1 節において言及された 2 つのリスク・シェアリングの概念によって場合分けが行われる。

第 1 のケースは，政府が，現存の世代が将来直面する不確実性から生じるリスクをシェアすることで，現存の世代の生涯効用を高めることを考慮しながら，年金システムの運営について意思決定を行うケースである。このシステムを，事後的リスク・シェアリングを想定した年金システムとよぼう。本稿での分析に用いられるモデルに則してこの状況を述べると，各個人の生涯の第 1 期目（労働期）における賃金所得 W_t は既知のものであるが，$t+1$ 期に実現値をとる危険資産の収益率 R_{t+1} および人口成長率 N_{t+1} は確率変数となる。

第 2 のケースは，政府が，まだ誕生していない世代が誕生直後に直面する不確実性から生じるリスクをシェアすることで，事前的に，まだ誕生していない世代の生涯所得の期待値を高めることを考慮しながら，年金システムの運営について意思決定を行うケースである。すなわち，このケースでは，政府によって事前的な決定が行われているのである。この年金システムを，事前的リスク・シェアリングを想定した年金システムとよぼう。本稿での分析に用いられるモデルに則してこの状況を述べると，まだ誕生していない個人が誕生直後に直面する不確実性を考慮しているので，個人の生涯の第 1 期目（労働期）における賃金所得も確率変数となり，すべての変数が確率変数として捉えられることになる。

次節以降の展開においては，事後的リスク・シェアリングを想定して，政府が年金システムに関する意思決定を行う場合と，事前的リスク・シェアリングを想定して，政府が年金システムに関する意思決定を行う場合とを，それぞれ分けて分析が行われる。政府が実際に年金システムに関する意思決定を行う場合は，現存する世代とまだ誕生していない世代の両方を考慮しながら意思決定が行われるが，本稿におけるモデル分析において両方の世代を同時に考慮することが難しいため，ここでは，2 つのケースに分けてそれぞれ分析が行われる。

2.4　分析に用いられる記号

この項では，以後の分析に用いられる記号を紹介しておく。t 期における危険資産の価格をたとえば P_t とすると，t 期から $t+1$ 期までの間に危険資産から得られる純収益率 R_{t+1} は $R_{t+1}=\dfrac{P_{t+1}-P_t}{P_t}=\dfrac{P_{t+1}}{P_t}-1$ と表される。このことから，粗収益率 $1+R_{t+1}$ は $1+R_{t+1}=\dfrac{P_{t+1}}{P_t}$ と表されるが，この粗収益率の自然対数をとったものを，危険資産の収益率として再定義する。

$$r_{t+1}\equiv log\left(1+R_{t+1}\right)\left(=log\frac{P_{t+1}}{P_t}=p_{t+1}-p_t;\,p_t\equiv log\;P_t\right)$$

この r_{t+1} が独立同一分布で正規分布に従うと仮定すると，上の定義より，粗収益率が独立同一分布で対数正規分布に従う変数となる。

同様に，各変数について，以下のように定義する。$r^T_{t+1}\equiv log(1+R^T_{t+1})$, $r^f\equiv log(1+R^f)$, $n_{t+1}\equiv log(1+N_{t+1})$, $\lambda_{t+1}\equiv log(1+\Lambda_{t+1})$, $g_{t+1}\equiv log(1+G_{t+1})$。以後の展開において，これらの記号が用いられる。

また，各確率変数の期待超過収益として，以下のような記号を定義する。$\mu^r\equiv E[r_{t+1}-r^f]$, $\mu^g\equiv E[g_{t+1}-r^f]$, $\mu^\lambda\equiv E[\lambda_{t+1}-r^f]$。

また，Campbell and Viceira（2002）にしたがって，（4）における R^T_{t+1} の定義を用いながら $r^T_{t+1}(=1+log\left(1+R^T_{t+1}\right)$ の近似式を Taylor 展開によって求めておく[3]。次節における分析において，（4）を用いながら（1）を対数を用いて表し，期待効用について考察するとき，この近似式が必要となる。

$$r^T_{t+1}-r^f=a\left(r_{t+1}-r^f\right)+b\left(g_{t+1}-r^f\right)+\frac{1}{2}\left(a\sigma^2_r+b\sigma^2_g\right)-\frac{1}{2}\left(a^2\sigma^2_r+b^2\sigma^2_g+2ab\sigma_{rg}\right)\qquad(5)$$

付録の A.1節においても触れられているが，σ^2_r，σ^2_gはそれぞれ r_{t+1}，g_{t+1} の分散を，σ_{rg} は r_{t+1} と g_{t+1} の共分散を表している。

3　事後的リスク・シェアリングを想定した年金システム

この節では，政府が事後的リスク・シェアリングを想定して年金システムの運営について意思決定を行うケースについて考察を進めていく。まず，3.1節，3.2節において Matsen and Thøgersen（2004）における分析が詳細に紹介された後，3.3節において，彼らの分析におい

3）　付録の A.1節を参照。

て扱われていなかった部分の展開が試みられる。

まず，分析のための準備を行う。(1) の対数をとり，$\delta/(1-\gamma)$ の項を消去する[4)]。

$$\log E_t C_{t+1}^{1-\gamma} = (1-\gamma) E_t c_{t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2 \sigma_c^2 \tag{6}$$

$c_{t+1} \equiv \log C_{t+1}$ であり，σ_c^2 は c_{t+1} の分散を表している。ここで，c_{t+1} を表した式を得るために (4) の対数をとる。

$$c_{t+1} = w_t + r_{t+1}^T \tag{7}$$

$w_t \equiv \log W_t$ である。(6)，(7)，および，(7) から得られる $\sigma_c^2 = \sigma_T^2$ （σ_T^2 は r_{t+1}^T の分散を表している）という関係式[5)] から，t 世代の代表的個人の期待効用を以下のように表すことにする[6)]。

$$E_t(u_t) = E_t\left(r_{t+1}^T - r^f\right) + \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_T^2 \tag{8}$$

次節以降の分析において，この期待効用を最大にするような，政府による年金保険料率の決定，年金保険料収入の年金給付と年金積立金への配分比率の決定，年金積立金の危険資産と安全資産への運用比率の決定について考察を進めていく。

3.1　年金システムが運営されないケース

はじめにベンチマーク・ケースとして，年金システムが運営されないケースを想定しよう。年金システムが運営されないので，(5) において $\tau = 0$ とおき，その期待値をとる。

$$E_t\left(r_{t+1}^T - r^f\right) = \omega^P \mu^r + \frac{1}{2}\omega^P\left(1-\omega^P\right)\sigma_r^2 \tag{9}$$

---

4) 付録の A.2節を参照。

5) この関係式は，以下のようにして導出される。(7) より，$Var[c_{t+1}] = Var[w_t + r_{t+1}^T]$ と表されるが，w_t は実現値であり定数となるので，分散の性質（$Var[x+c] = Var[x]$; x は確率変数，c は定数）より，$Var[w_t + r_{t+1}^T] = Var[r_{t+1}^T]$ となる。したがって，$Var[c_{t+1}] = Var[r_{t+1}^T]$ となる。

6) (6) の両辺を $(1-\gamma)$ で除する。

$$\frac{1}{1-\gamma}\log E_t C_{t+1}^{1-\gamma} = E_t c_{t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_T^2$$

u_t が t 期の代表的個人の効用水準を表すとしよう。上式の右辺は，その期待値を表しているので左辺を $E(u_t)$ と表し，さらに，(7) を代入すると以下のようになる。

$$E_t(u_t) = E_t\left(r_{t+1}^T + w_t\right) + \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_T^2$$

ここで，w_t は実現値であり定数となるので，$w_t = -r^f$ と置き換えても，期待効用の最大化問題には影響が出ない。また，このように置き換えることで，(5) がそのまま使えることになる。

また，（5）において $\tau = 0$ とおいた式より $\sigma_T^2 = (\omega^P)^2 \sigma_r^2$ という関係式を得るので[7)]，（9）とともに（8）に代入すると，t 世代の代表的個人の期待効用が以下のように表される。

$$E_t(u_t) = \omega^P \mu^r + \frac{1}{2}\omega^P \left(1-\omega^P\right)\sigma_r^2 + \frac{1}{2}\left(1-\gamma\right)\left(\omega^P\right)^2 \sigma_r^2 \tag{10}$$

（10）の期待効用を最大にするように，個人レベルにおける危険資産と安全資産への運用比率 ω^P を決定すると，最適な運用比率は以下のように求められる。

$$\omega^P = \frac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\gamma \sigma_r^2} \tag{11}$$

（11）から明らかなように，相対的危険回避の係数 γ，r_{t+1} の分散 σ_r^2 が大きくなると運用比率 ω^P は小さくなる。また，対数正規分布の性質より $\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 = log\, E_t\left[\frac{1+R_{t+1}}{1+R^f}\right]$ と表されるので[8)]，$\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2$ は安全資産に対する危険資産の期待超過収益率を表している。したがって，$\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2$ が大きくなると，ω^P も大きくなる。

3.2　最適な年金システム

ここでは，個人が金融市場に自由に参入すると想定したケース，および，参入しないと想定したケースに分けて，それぞれのケースにおいて，年金システムがどのように運営されるか考察を進めていく。

3.2.1　個人が金融市場に完全参入すると想定したケース

代表的個人が危険資産，および，安全資産の市場へ完全に参入すると想定したケースについて考察を進めよう。個人が金融市場へ完全に参入すると想定した場合は，政府は，年金システムを通じた金融市場への参入は行わない[9)]。すなわち，年金システムにおける積立金運用は行われないので，$\beta = 0$ となり，年金システムは賦課方式による年金給付部門のみが運営されることになる。したがって，このケースでは，政府が決定する変数は，年金保険料率 τ（すなわち，年金システムの規模）のみである。

（5）において $\beta = 0$ とおき，その期待値をとる。

7）　付録の A.3節を参照。
8）　付録の A.4節を参照。
9）　第 1 節においても言及したように，このケースでは，個人は最適なポートフォリオ選択を行うことができる。したがって，個人の期待効用の最大化を目的としている政府は，金融市場へは参入しないのである。

$$E_t\left(r_{t+1}^T - r^f\right) = \omega^P\left(1-\tau\right)\left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left((\omega^P)^2\left(1-\tau\right)^2\sigma_r^2 + \tau^2\sigma_g^2 + 2\omega^P\tau\left(1-\tau\right)\sigma_{rg}\right) \tag{12}$$

また，（5）において $\beta = 0$ とおいた式から σ_T^2 が以下のように求められる[10)]。

$$\sigma_T^2 = \left(\omega^P\right)^2\left(1-\tau\right)^2\sigma_r^2 + \tau^2\sigma_g^2 + 2\omega^P\tau\left(1-\tau\right)\sigma_{rg} \tag{13}$$

（12），（13）を（8）に代入すると，t 世代の代表的個人の期待効用が以下のように表される。

$$E_t(u_t) = \omega^P\left(1-\tau\right)\left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left((\omega^P)^2\left(1-\tau\right)^2\sigma_r^2 + \tau^2\sigma_g^2 + 2\omega^P\tau\left(1-\tau\right)\sigma_{rg}\right) \tag{14}$$

（14）より，年金保険料率 τ を所与として，個人レベルで資産運用比率 ω^P の最適値（ω^P）* を決定すると，以下のようになる。

$$\left(\omega^P\right)^* = \frac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\left(1-\tau\right)\gamma\sigma_r^2} - \frac{\tau}{1-\tau}\frac{\sigma_{rg}}{\sigma_r^2} \tag{15}$$

（15）より，年金保険料率と個人レベルの最適資産運用比率との関係について，以下のことが確認できる。r_{t+1} と g_{t+1} の共分散 σ_{rg} が負であれば，$\dfrac{\tau}{1-\tau}$ は τ の増加関数なので，保険料率 τ が大きくなると最適資産運用比率 ω^P も大きくなる。すなわち，年金システムの規模が大きくなると，個人レベルでの危険資産の運用も活発になるのである。逆に，σ_{rg} が正であれば，保険料率が大きくなると最適資産運用比率は小さくなる。

τ を所与として代表的個人が選択する（ω^P）* をもとにして，年金保険料率の決定（年金システムの最適規模の決定）について考察を進めよう。政府は，（12），（13）を制約条件とし，かつ，代表的個人が τ を所与として決定する ω^P をもとに，個人の期待効用関数（8）を最大にするように年金保険料率 τ を決定する。すなわち，最適な年金保険料率 τ^* が以下のように決定される。

$$\tau^* = \frac{\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) - \left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right)\sigma_{rg} / \sigma_r^2}{\gamma\sigma_g^2\left(1-\rho_{rg}^2\right)} \tag{16}$$

ρ_{rg} は r_{t+1} と g_{t+1} の相関係数である。

10）付録の A.5節を参照。

（16）をもとにして，最適年金保険料率，すなわち，年金システムの最適規模について考察しよう。$|\rho_{rg}| < 1$である[11] ことから（16）の分母は正である。また，$\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2 = log\, E_t\left[\frac{1+G_{t+1}}{1+R^f}\right]$と表されるので，安全な資産の収益率に対して総賃金所得の成長率が大きくなれば，年金システムの最適規模は大きくなる。さらに，$\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 = log\, E_t\left[\frac{1+R_{t+1}}{1+R^f}\right]$と表されるが，$\sigma_{rg} < 0$であれば，年金システムの最適規模は安全資産の収益率に対する危険資産の期待収益率の増加関数となる。

3.2.2　個人が危険資産の市場に参入できないと想定したケース

この項では，Matsen and Thøgersen（2004）において扱われていなかったケースについて分析を進めていこう。代表的個人が安全資産の市場には参入できるが，危険資産の市場には参入できないと想定したケースについて，彼らは，政府が危険資産の運用のみを行うと想定したケースを取り扱っていたが，ここでは，危険資産と安産資産の両方の運用を行うと想定したケースについて考察を進めていく。

安全資産の市場への参入のみしか行えないと想定しているので，個人レベルでの資産運用比率はゼロ（$\omega^P = 0$）となる。一方，政府は積立金運用部門を運営して（$0 < \beta \leq 1$），配分された年金保険料収入を危険資産と安全資産に対してそれぞれ運用すると想定する。したがって，政府の選択変数はτ，β，ω^g の 3 つである。

（5）において $\omega^P = 0$ とおいて，その期待値をとる。

$$E_t\left(r_{t+1}^T - r^f\right) = \tau\beta\omega^g\left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(1-\beta\right)\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) - \frac{1}{2}\left(\tau^2\beta^2(\omega^g)^2\sigma_r^2 + \tau^2\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2 + 2\tau\beta\omega^g\tau\left(1-\beta\right)\sigma_{rg}\right) \qquad (17)$$

また，（5）において $\omega^P = 0$ とおいた式から σ_T^2 が以下のように求められる。

$$\sigma_T^2 = (\omega^g)^2\tau^2\beta^2\sigma_r^2 + \tau^2\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2 + 2\omega^g\tau^2\beta\left(1-\beta\right)\sigma_{rg} \qquad (18)$$

（17），（18）を（8）に代入すると，t 世代の代表的個人の期待効用が以下のように表される。

$$E_t(u_t) = \tau\beta\omega^g\left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(1-\beta\right)\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) - \frac{1}{2}\gamma\left((\omega^g)^2\tau^2\beta^2\sigma_r^2 + \tau^2\left(1-\beta\right)\sigma_g^2 + 2\omega^g\tau^2\beta\left(1-\beta\right)\sigma_{rg}\right) \qquad (19)$$

11）付録の A.6節を参照。

代表的個人の期待効用を表した（19）をもとにして，政府が選択する 3 つの変数のそれぞれの最適値を求めよう。（19）より， 3 つの変数に関する F.O.C が，それぞれ以下のようになる。

$$\omega^g=\frac{\left(\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2\right)-\gamma\left(1-\beta\right)\sigma_{rg}\tau}{\gamma\beta\tau\sigma_r^2} \tag{20}$$

$$\beta=\frac{\omega^g\left(\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2\right)-\left(\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2\right)+\gamma\left(\sigma_g^2+\omega^g\sigma_{rg}\right)\tau}{\gamma\left((\omega^g)^2\sigma_r^2-2\omega^g\sigma_{rg}+\sigma_g^2\right)\tau} \tag{21}$$

$$\tau=\frac{\beta\omega^g\left(\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2\right)+\left(1-\beta\right)\left(\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2\right)}{\gamma\beta^2(\omega^g)^2\sigma_r^2+\gamma\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2+2\gamma\omega^g\beta\left(1-\beta\right)\sigma_{rg}} \tag{22}$$

この 3 本の方程式から ω^g，β を求めると（煩雑な手続きを要するが）以下のようになる。

$$\beta=2\sigma_{rg}\frac{\sigma_g^2\left(\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2\right)-\sigma_{rg}\left(\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2\right)}{\sigma_r^2\left(\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2\right)-\sigma_{rg}\left(\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2\right)} \tag{23}$$

$$\omega^g=\frac{1}{2\sigma_{rg}}-\frac{\sigma_g^2\left(\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2\right)-\sigma_{rg}\left(\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2\right)}{\sigma_r^2\left(\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2\right)-\sigma_{rg}\left(\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2\right)} \tag{24}$$

（23），（24）を（22）へ代入すれば τ を表す式も求めることができるが，まず（23）にもとづいて，σ_{rg} の符号に依存して積立金運用部門が運営される場合と運営されない場合があることを確認していこう。

最初に，$\sigma_{rg}<0$ のケースについて考察しよう。（23）において $\sigma_{rg}<0$ とおくと，（$\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2>0$，$\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2>0$ であれば）$\beta<0$となるが，$0\leq\beta\leq 1$なので$\beta=0$ の端点解となり，積立金運用部門は運営されず，年金システムは賦課方式による年金給付部門のみが運営されることになる。

次に，$\sigma_{rg}=0$ のケースについて考察する。（23）において $\sigma_{rg}=0$ とおくと $\beta=0$ となり，$\sigma_{rg}<0$ のケースと同様に，年金システムは賦課方式による年金給付部門のみが運営されることになる。

最後に，$\sigma_{rg} > 0$ のケースについて考察しよう。このケースにおいては，（23）より，

$$\begin{cases} \sigma_g^2\left(\mu^r + \dfrac{1}{2}\sigma_r^2\right) > \sigma_{rg}\left(\mu^g + \dfrac{1}{2}\sigma_g^2\right) \\ \sigma_r^2\left(\mu^g + \dfrac{1}{2}\sigma_g^2\right) > \sigma_{rg}\left(\mu^r + \dfrac{1}{2}\sigma_r^2\right) \end{cases} \tag{25}$$

という十分条件が成立しているとき $\beta > 0$ となり，積立金運用部門はこの条件が成立するとき，はじめて運営されることになる。以下，（25）の条件を整理しながら考察を進めていこう。（25）は以下のように再整理される[12)]。

$$\frac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2} < \frac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2} < \frac{\sigma_r^2}{\sigma_{rg}} \tag{26}$$

次に，$\beta \le 1$ となるための十分条件について考察を進める。（23）より $\beta \le 1$ となるためには，以下の不等式が成立していればよい。

$$\frac{\sigma_g^2\left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) - \sigma_{rg}\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)}{\sigma_r^2\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) - \sigma_{rg}\left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right)} \le \frac{1}{2\sigma_{rg}} \tag{27}$$

（27）を再整理すると，以下のようになる。

$$\frac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2} \le \frac{\sigma_r^2 + 2(\sigma_{rg})^2}{2\sigma_{rg}\sigma_g^2 + \sigma_{rg}} \tag{28}$$

12）ここで，r_{t+1} と g_{t+1} の相関係数 $\rho_{rg} \equiv \dfrac{\sigma_{rg}}{\sigma_r \sigma_g}$（$\sigma_r$，$\sigma_g$ はそれぞれ r_{t+1}，g_{t+1} の標準偏差を表している）について考察する。$-1 \le \rho_{rg} \le 1$ なので，ρ_{rg} の定義より $-\sigma_r\sigma_g \le \sigma_{rg} \le \sigma_r\sigma_g$ となるが，ここでは $\sigma_{rg} > 0$ のケースを想定しているので，$0 < \sigma_{rg} \le \sigma_r\sigma_g$ となる。このことから，$0 < \dfrac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2} < \dfrac{\sigma_r}{\sigma_g}$，$\dfrac{\sigma_r}{\sigma_g} < \dfrac{\sigma_r^2}{\sigma_{rg}} < \infty$ となるので，共分散 σ_{rg} がその最大値 $\sigma_r\sigma_g$ の近似値をとる場合，（26）の $\dfrac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2}$ は $\dfrac{\sigma_r}{\sigma_g}$ の近似値をとり，逆に，σ_{rg} がゼロの近似値をとる場合は $\dfrac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2}$ となる。したがって，σ_{rg} の値がゼロに近づくほど（（26）によって示される範囲が広くなっていくので），$\beta > 0$ となり積立金運用部門が運営される可能性が大きくなっていく。逆に，σ_{rg} の値がその最大値に近づくほど（（26）によって示される範囲が狭くなっていくので），積立金運用部門が運営される可能性が小さくなっていく。

$\dfrac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2} < \dfrac{\sigma_r^2 + 2(\sigma_{rg})^2}{2\sigma_{rg}\sigma_g^2 + \sigma_{rg}} < \dfrac{\sigma_r^2}{\sigma_{rg}}$ となることが容易に確かめられるので，β の値に関して以下のことが確認できる。

$$\begin{cases} \dfrac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2} < \dfrac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2} & \Rightarrow \beta < 0 \text{（端点解 } \beta = 0\text{）} \\ \dfrac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2} < \dfrac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2} < \dfrac{\sigma_r^2 + 2(\sigma_{rg})^2}{2\sigma_{rg}\sigma_g^2 + \sigma_{rg}} & \Rightarrow 0 < \beta < 1 \\ \dfrac{\sigma_r^2 + 2(\sigma_{rg})^2}{2\sigma_{rg}\sigma_g^2 + \sigma_{rg}} < \dfrac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2} < \dfrac{\sigma_r^2}{\sigma_{rg}} & \Rightarrow \beta > 1 \text{（端点解 } \beta = 1\text{）} \end{cases} \tag{29}$$

2.4節において紹介された定義より，$\mu^r = E[r_{t+1} - r^f]$, $\mu^g = E[g_{t+1} - r^f]$なので，（29）より，以下のことが確認できる。すなわち，総所得の期待超過成長率に対して危険資産の期待超過収益率が大きくなるほど，年金給付から年金積立金運用へと，年金保険料収入の配分先のウェイトが変化している。これは，危険資産の期待超過収益率が大きくなるほど，同じ年金保険料率に対して，賦課方式による年金給付の期待値よりも年金積立金運用による年金給付の期待値の方が大きくなるためである。

ω^g については，（24），（27）より，（28）の条件が満たされるとき，$\omega^g > 0$ となる。また，（24）より $\omega^g \leq 1$となる条件を求めると以下のようになる。

$$\frac{2(\sigma_{rg})^2 + \sigma_r^2\left(1 - 2\sigma_{rg}\right)}{\sigma_{rg}\left\{2\sigma_g^2 + \left(1 - 2\sigma_{rg}\right)\right\}} \leq \frac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2} \tag{30}$$

（30）の左辺の符号を確定させて分析を進めるために，これ以降の分析において，$\sigma_{rg} < \dfrac{1}{2}$ の範囲に限定して考察を進めていく。この範囲では，（30）の左辺は正となる。

$\dfrac{2(\sigma_{rg})^2\sigma_r^2\left(1 - 2\sigma_{rg}\right)}{\sigma_{rg}\left\{2\sigma_g^2 + \left(1 - 2\sigma_{rg}\right)\right\}} < \dfrac{\sigma_r^2 + 2(\sigma_{rg})^2}{2\sigma_g^2\sigma_{rg} + \sigma_{rg}}$ であることが容易に確かめられるので，ω^g の値に関して，以下のことが確かめられる。

$$
\begin{cases}
 & \dfrac{\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2} < \dfrac{2(\sigma_{rg})^2\sigma_r^2\left(1-2\sigma_{rg}\right)}{\sigma_{rg}\left\{2\sigma_g^2+\left(1-2\sigma_{rg}\right)\right\}} \Rightarrow \omega^g>1\ （端点解\ \omega^g=1） \\
\dfrac{2(\sigma_{rg})^2+\sigma_r^2\left(1-2\sigma_{rg}\right)}{\sigma_{rg}\left\{2\sigma_g^2+\left(1-2\sigma_{rg}\right)\right\}} < & \dfrac{\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2} < \dfrac{\sigma_r^2+2(\sigma_{rg})^2}{2\sigma_g^2\sigma_{rg}+\sigma_{rg}} \Rightarrow 0<\omega^g<1 \\
 & \dfrac{\sigma_r^2+2(\sigma_{rg})^2}{2\sigma_g^2\sigma_{rg}+\sigma_{rg}} < \dfrac{\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2} \Rightarrow \omega^g<0\ （端点解\ \omega^g=0）
\end{cases}
\tag{31}
$$

（29）と（31）を合わせれば，それぞれの範囲における β と ω^g の値について確認することができるが，そのために，$\dfrac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2}$ と $\dfrac{2(\sigma_{rg})^2+\sigma_r^2\left(1-2\sigma_{rg}\right)}{\sigma_{rg}\left\{2\sigma_g^2+\left(1-2\sigma_{rg}\right)\right\}}$ の大小関係を確認しなければならない。この大小関係は，次のようにして確認できる。

$$
\frac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2}-\frac{2(\sigma_{rg})^2+\sigma_r^2\left(1-2\sigma_{rg}\right)}{\sigma_{rg}\left\{2\sigma_g^2+\left(1-2\sigma_{rg}\right)\right\}}=\frac{\left(\sigma_r\sigma_g+\sigma_{rg}\right)\left(\sigma_r\sigma_g-\sigma_{rg}\right)\left(2\sigma_{rg}-1\right)}{\sigma_g^2\left\{\sigma_{rg}+2\sigma_{rg}\left(\sigma_g^2-\sigma_{rg}\right)\right\}}
\tag{32}
$$

$\sigma_r\sigma_g-\sigma_{rg}>0$ なので，（32）の符号は $2\sigma_{rg}-1$ の符号によって決定される。ここでは，$\sigma_{rg}<\dfrac{1}{2}$ のケースに限定して考察を進めているので，$\dfrac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2}<\dfrac{2(\sigma_{rg})^2+\sigma_r^2\left(1-2\sigma_{rg}\right)}{\sigma_{rg}\left\{2\sigma_g^2+\left(1-2\sigma_{rg}\right)\right\}}$ となり，$\dfrac{\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2}$ の大きさと β，ω^g の関係は以下のようになる。

$$
\begin{cases}
 & \dfrac{\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2} < \dfrac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2} \Rightarrow \beta<0\ （端点解\ \beta=0） \\
\dfrac{\sigma_{rg}}{\sigma_g^2} < & \dfrac{\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2} < \dfrac{2(\sigma_{rg})^2+\sigma_r^2\left(1-2\sigma_{rg}\right)}{\sigma_{rg}\left\{2\sigma_g^2+\left(1-2\sigma_{rg}\right)\right\}} \Rightarrow 0<\beta<1,\ \omega^g>1\ （端点解\ \omega^g=1） \\
\dfrac{2(\sigma_{rg})^2+\sigma_r^2\left(1-2\sigma_{rg}\right)}{\sigma_{rg}\left\{2\sigma_g^2+\left(1-2\sigma_{rg}\right)\right\}} < & \dfrac{\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2} < \dfrac{\sigma_r^2+2(\sigma_{rg})^2}{2\sigma_{rg}\sigma_g^2+\sigma_{rg}} \Rightarrow 0<\beta<1,\ 0<\omega^g<1 \\
\dfrac{\sigma_r^2+2(\sigma_{rg})^2}{2\sigma_{rg}\sigma_g^2+\sigma_{rg}} < & \dfrac{\mu^r+\frac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^g+\frac{1}{2}\sigma_g^2} < \dfrac{\sigma_r^2}{\sigma_{rg}} \Rightarrow \beta>1,\ \omega^g<0\ （端点解\ \beta=1,\ \omega^g=0）
\end{cases}
\tag{33}
$$

総所得の期待超過成長率に対して，危険資産の期待超過収益率が相対的に大きくなってくる

と，年金保険料収入による財源の年金給付と積立金への配分比率 β は端点解 $\beta=0$（財源はすべて年金給付に用いられる）から端点解 $\beta=1$（財源はすべて積立金に配分され，その運用のみが行われる）へと変化していく。その変化に並行して，年金積立金による資産運用比率も端点解 $\omega^g=1$（年金積立金はすべて危険資産に対して運用）から端点解 $\omega^g=0$（年金積立金はすべて安全資産に対して運用）へと変化していく。この資産運用比率の変改については，危険資産の期待超過収益率が相対的に小さいときは危険資産に重点がおかれているが，相対的に大きくなってくると重点は安全資産へ移っていっている。これは，安全資産の期待収益率との差が大きくなるほど，リスクも大きくなってくるので，リスクを避けるために比率が小さくなっていくと考えられる。

4　事前的リスク・シェアリングを想定した年金システム

この節では，政府が事前的リスク・シェアリングを想定して年金システムの運営について，事前的な意思決定を行っていくケースについて考察を進めていく。前節と同様に，まず，4.1節，4.2節において Matsen and Thøgersen（2004）における分析が詳細に再検討された後，4.3節において，彼らの分析において扱われていなかった部分の展開が試みられる。

このケースにおいては，将来誕生する任意の t 世代の意思決定を，政府がどのように考慮するかという問題が出てくるが，ここでは，1期前の $t-1$ 期に，t 世代の代表的個人の期待効用について政府が考慮すると想定することによって，分析を進めていくことにする。すなわち，政府は，次の期に生まれてくる世代が直面する経済状況を予測しながら，その世代の期待効用を最大化するように，年金システム運営に関する事前的な意思決定を行うのである。

t 世代の代表的個人の期待効用は以下のように与えられるとする。

$$U_{t-1}=E_{t-1}\left[\delta\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] \tag{34}$$

前節においては，（1）を用いて，t 期に t 世代の期待効用最大化を考えていたが，（34）においては，$t-1$ 期に，t 期に誕生する t 世代の期待効用を考えている。

1人あたりの消費水準 C_{t+1} は，前節では，（2）のように表されていたが，ここでは $t-1$ 期に t 期の最大化問題を考えることになるので，t 期の賃金 W_t は確率変数として $(1+\Lambda_t)W_{t-1}$（W_{t-1} は $t-1$ 期の賃金の実現値）と表される。

$$C_{t+1}=\left(1-\tau\right)\left(1+\Lambda_t\right)W_{t-1}\left(\omega^P\left(1+R_{t+1}\right)+\left(1-\omega^P\right)\left(1+R^f\right)\right)+\Pi_{t+1} \tag{35}$$

また，1人あたりの年金給付額 Π_{t+1} は，（3）より以下のように表される。

$$\Pi_{t+1} = \beta\tau\left(1 + R^f + \omega^g\left(R_{t+1} - R^f\right)\right)\left(1 + \Lambda_t\right)W_{t-1} + \left(1 - \beta\right)\tau\left(1 + G_{t+1}\right)\left(1 + \Lambda_t\right)W_{t-1} \quad (36)$$

（35），（36）より，1 人あたり消費水準 C_{t+1} を表す式が求められる。

$$C_{t+1} = \left(1 + R_{t+1}^T\right)\left(1 + \Lambda_t\right)W_{t-1} \quad (37)$$

R_{t+1}^T，a，b の定義は（4）におけるものと同じである。以下，第 3 節における分析と同様の展開を行っていく。

（34）の対数をとり，$\delta/(1-\gamma)$ の項を消去する。

$$log\, E_{t-1}C_{t+1}^{1-\gamma} = \left(1-\gamma\right)E_{t-1}c_{t+1} + \frac{1}{2}\left(1-\gamma\right)^2\sigma_c^2 \quad (38)$$

（38）が（6）と異なる点は，t 期ではなく $t-1$ 期において，$t+1$ 期に実現する変数による効用の期待値を考えていることである。

c_{t+1} を表した式を得るために（37）の対数をとる。

$$c_{t+1} = w_{t-1} + \lambda_t + r_{t+1}^T \quad (39)$$

（8）の導出と同様に，（38），（39）より t 世代の代表的個人の $t-1$ 期における期待効用が以下のように表される。

$$E_{t-1}(u_t) = E_{t-1}\left(\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f\right) + \frac{1}{2}\left(1-\gamma\right)\sigma_c^2 \quad (40)$$

事後的リスク・シェアリングを想定したケースでの分析と異なり，本節での分析においては，賃金の成長率 Λ_t という新しい確率変数が以後の展開に登場してくる。そのため，分析を簡単化するために，前節では確率変数であった人口成長率 N_t をここでは定数 N とおくことにする。このことから $n \equiv log(1+N)$ とおくと，G_{t+1} の定義から $g_{t+1} = n + \lambda_{t+1}$ となる。さらに，この関係式から $\sigma_g^2 = \sigma_\lambda^2$，$\sigma_{rg} = \sigma_{r\lambda}$ という関係も求められる。以後の展開において，これらの関係式が用いられる。

4.1　年金システムが運営されないケース

事後的リスク・シェアリングを想定したケースでの分析と同様に，まず，ベンチマーク・ケースとして，年金システムが存在しないケースの分析を行う。（5）において $\tau = 0$ とおいた式を $\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f$ に代入する。

$$\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f = \lambda_t + \omega^P\left(r_{t+1} - r^f\right) + \frac{1}{2}\omega^P\left(1 - \omega^P\right)\sigma_r^2 \quad (41)$$

（41）の期待値をとる。

$$E_{t-1}\left(\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f\right) = \mu^\lambda + r^f + \omega^P \mu^r + \frac{1}{2}\omega^P\left(1-\omega^P\right)\sigma_r^2 \tag{42}$$

（39），（41）より $\sigma_c^2 = \sigma_\lambda^2 + (\omega^P)^2\sigma_r^2 + 2\omega^P\sigma_{r\lambda}$ という関係式が求められるので，（42）とともに（40）に代入すると，$t-1$ 期に政府が考慮する t 世代の代表的個人の期待効用は以下のように表される。

$$E_{t-1}(u_t) = \mu^\lambda + r^f + \omega^P\mu^r + \frac{1}{2}\omega^P\left(1-\omega^P\right)\sigma_r^2 + \frac{1}{2}(1-\gamma)\left(\sigma_\lambda^2 + (\omega^P)^2\sigma_r^2 + 2\omega^P\sigma_{r\lambda}\right) \tag{43}$$

（43）より，政府が事前的に予想する，個人レベルの最適な資産運用比率は以下のようになる。

$$\omega^P = \frac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 + (1-\gamma)\sigma_{r\lambda}}{\gamma\sigma_r^2} \tag{44}$$

事後的リスク・シェアリングを想定したケースと同様に，γ，および，σ_r^2 が大きくなると，ω^P は小さくなる。また，$\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 = log\, E_t\left[\frac{1+R_{t+1}}{1+R^f}\right]$ が大きくなると，ω^P も大きくなる。事後的リスク・シェアリングを想定したケースと異なるのは分子第 2 項であるが，$\sigma_{r\lambda} > 0$ であれば，γ が大きくなると ω^P は小さくなるが，$\sigma_{r\lambda} < 0$ であれば逆になる。

ここで注意しなければならないことは，（44）で表される最適資産運用比率は，政府によって予想される値であり，任意の t 世代が実際に t 期において選択する値と一致するとは限らないということである。なぜなら，t 期においては，賃金 W_t は実現値として既知のものとなるからである。

4.2　最適な年金システム

ここでも，個人が金融市場に自由に参入すると想定したケース，および，参入しないと想定したケースに分けて，それぞれのケースにおいて，年金システムがどのように運営されるか考察を進めていく。

4.2.1　個人が金融市場に完全参入すると想定したケース

事後的リスク・シェアリングを想定したケースでの分析と同様に，代表的個人が危険資産，および，安全資産の市場へ完全に参入すると想定したケースについて考察を進めよう。3.2.1 節と同様に，この場合は $\beta = 0$ であり，政府が決定するのは年金保険料率 τ のみである。

（5）において $\beta = 0$ とおいた式を $\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f$ に代入する。

$$\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f = \lambda_t \omega^P (1-\tau)\left(\left(r_{t+1} - r^f\right) + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(\left(g_{t+1} - r^f\right) + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left(\omega^P\right)^2 (1-\tau)^2 \sigma_r^2 + \tau^2 \sigma_g^2 + 2\omega^P \tau (1-\tau)\sigma_{rg}\right) \tag{45}$$

(45) の期待値をとる。

$$E_t\left(\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f\right) = \left(\mu^\lambda + r^f\right) + \omega^P (1-\tau)\left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left(\omega^P\right)^2 (1-\tau)^2 \sigma_r^2 + \tau^2 \sigma_g^2 + 2\omega^P \tau (1-\tau)\sigma_{rg}\right) \tag{46}$$

また，(45) より σ_T^2 が以下のように求められる。

$$\sigma_T^2 = \left(\omega^P\right)^2 (1-\tau)^2 \sigma_r^2 + \tau^2 \sigma_g^2 + 2\omega^P \tau (1-\tau)\sigma_{rg} \tag{47}$$

さらに，(39)，(45) から σ_c^2 を求める。

$$\sigma_c^2 = \sigma_T^2 + \sigma_\lambda^2 + 2\omega^P (1-\tau)\sigma_{r\lambda} \tag{48}$$

(47)，(48) より，σ_c^2 は最終的に以下のようになる。

$$\sigma_c^2 = \sigma_\lambda^2 + \left(\omega^P\right)^2 (1-\tau)^2 \sigma_\lambda^2 + \tau^2 \sigma_g^2 + 2\omega^P (1-\tau)(1+\tau)\sigma_{r\lambda} \tag{49}$$

(46)，(49) を (40) に代入すると，t 世代の代表的個人の期待効用は以下のように表される。

$$E_{t-1}(u_t) = \left(\mu^\lambda + r^f\right) + \omega^P (1-\tau)\left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left(\omega^P\right)^2 (1-\tau)^2 \sigma_r^2 + \tau^2 \sigma_g^2 + 2\omega^P \tau (1-\tau)\sigma_{rg}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(1-\gamma)\left(\sigma_\lambda^2 + \left(\omega^P\right)^2 (1-\tau)^2 \sigma_r^2 + \tau^2 \sigma_g^2 + 2\omega^P (1-\tau)(1+\tau)\sigma_{rg}\right) \tag{50}$$

(50) より，政府が予想する個人レベルでの最適な資産運用比率 $(\omega^P)^*$ は以下のようになる。

$$\left(\omega^P\right)^* = \frac{\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2}{(1-\tau)\gamma\sigma_r^2} - \frac{\tau}{1-\tau}\frac{\sigma_{rg}}{\sigma_r^2} + \frac{(1-\gamma)\sigma_{r\lambda}}{(1-\tau)\gamma\sigma_r^2} \tag{51}$$

(51) と (15) を比較すると，異なる部分は右辺の第 3 項である。$\sigma_{r\lambda}(=\sigma_{rg}) > 0$であれば ω^P は現在の世代を規準としたケースより大きくなり，逆のケースでは小さくなる。

(51) をもとにして，政府が想定する年金システムの最適規模を求めよう。政府は，(46)，

（49），（51）を制約条件としながら，（40）を最大にするように年金保険料率 τ^* を決定する。

$$\tau^* = \frac{\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) - \left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right)\sigma_{rg} / \sigma_r^2 + \left(1-\gamma\right)\left(\sigma_{r\lambda}\right)^2 / \sigma_r^2}{\gamma\sigma_g^2\left(1-\rho_{rg}^2\right)} \tag{52}$$

4.2.2　個人が危険資産の市場に参入できないと想定したケース

この項においても，Matsen and Thøgersen（2004）において扱われていなかったケースについて分析を進めていこう。代表的個人が安全資産の購入はできるが，危険資産の市場へは参入できないと政府が想定するケースについて，彼らが行っていなかったより一般的なケースについて考察を進めよう。

安全資産の購入のみしか行えないと想定するので $\omega^P = 0$ となる。そのため，政府は積立金運用部門を運営して（$0 < \beta \leq 1$），配分された財源をリスキーな資産と安全な資産にそれぞれ運用することを考える。したがって，政府の選択変数は τ，β，ω^g の 3 つになる。

（5）において $\omega^P = 0$ とおいたものを $\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f$ に代入する。

$$\begin{aligned}\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f = \lambda_t + \tau\beta\omega^g\left(\left(r_{t+1} - r^f\right) + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(1-\beta\right)\left(\left(g_{t+1} - r^f\right) + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)\\ - \frac{1}{2}\left(\tau^2\beta^2\left(\omega^g\right)^2\sigma_r^2 + \tau^2\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2 + 2\tau\beta\omega^g\tau\left(1-\beta\right)\sigma_{rg}\right)\end{aligned} \tag{53}$$

（53）の期待値をとる。

$$\begin{aligned}E_t\left(\lambda_t + r_{t+1}^T - r^f\right) = \left(\mu^\lambda + r^f\right) + \tau\beta\omega^g\left(\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(1-\beta\right)\left(\mu^g + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)\\ - \frac{1}{2}\left(\tau^2\beta^2\left(\omega^g\right)^2\sigma_r^2 + \tau^2\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2 + 2\tau\beta\omega^g\tau\left(1-\beta\right)\sigma_{rg}\right)\end{aligned} \tag{54}$$

また，（53）より σ_T^2 が以下のように求められる。

$$\sigma_T^2 = \left(\omega^g\right)^2\tau^2\beta^2\sigma_r^2 + \tau^2\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2 + 2\omega^g\tau^2\beta\left(1-\beta\right)\sigma_{rg} \tag{55}$$

さらに，（39），（53）より σ_c^2 を求める。

$$\sigma_c^2 = \sigma_\lambda^2 + \sigma_T^2 + 2\tau\beta\omega^g\sigma_{r\lambda} \tag{56}$$

（55），（56）より σ_c^2 は以下のようになる。

$$\sigma_c^2 = \sigma_\lambda^2 + \left(\omega^g\right)^2\tau^2\beta^2\sigma_\lambda^2 + \tau^2\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2 + 2\tau\beta\omega^g\sigma_{r\lambda}\left(1+\tau\left(1-\beta\right)\right) \tag{57}$$

（54），（57）を（40）に代入すると，政府が $t-1$ 期において想定する t 世代の代表的個人の期待効用は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
E_{t-1}\left(u_t\right) &= \mu^{\lambda} + r^{f} + \tau\beta\omega^{g}\left(\mu^{r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \tau\left(1-\beta\right)\left(\mu^{g} + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\left(1-\gamma\right)\sigma_{\lambda}^2 - \gamma\left(\left(\omega^{g}\right)^2\tau^2\beta^2\sigma_r^2 - \gamma\tau^2\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2\right) + 2\omega^{g}\tau\beta\sigma_{rg}\left[1-\gamma\left(1+\tau\left(1-\beta\right)\right)\right]\right] \qquad (58)
\end{aligned}
$$

（58）を用いながら，３つの変数のそれぞれの最適値を求めることを考えよう。（58）より，３つの変数に関する F.O.C はそれぞれ以下のようになる。

$$
\omega^{g} = \frac{\left(\mu^{r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \sigma_{rg}\left[1-\gamma\left(1+\tau\left(1+\beta\right)\right)\right]}{\gamma\beta\tau\sigma_r^2} \qquad (59)
$$

$$
\beta = \frac{\omega^{g}\left(\mu^{r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) - \left(\mu^{g} + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) - \gamma\tau\sigma_g^2 + \omega^{g}\sigma_{rg}\left(1-\gamma\left(1+\tau\right)\right)}{\gamma\tau\left(\omega^{g}\right)^2\sigma_r^2 - \gamma\tau\sigma_g^2 - 2\gamma\tau\omega^{g}\sigma_{rg}} \qquad (60)
$$

$$
\tau = \frac{\beta\omega^{g}\left(\mu^{r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \left(1-\beta\right)\left(\mu^{g} + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) - \left(1-\gamma\right)\beta\omega^{g}\sigma_{rg}}{\gamma\beta^2\left(\omega^{g}\right)^2\sigma_r^2 + \gamma\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2 + 2\gamma\omega^{g}\beta\left(1-\beta\right)\sigma_{rg}} \qquad (61)
$$

これら３本の方程式から３つの変数をそれぞれ求めたいが，（59），（60），（61）は煩雑な形をしており，このままでは解を求めることが難しい。そこで，１つのケースとして，r_{t+1} と g_{t+1} の共分散 σ_{rg} がゼロとなるケースについて分析を進めていくことにする。

（59），（60），（61）において $\sigma_{rg}=0$ とおく。

$$
\omega^{g} = \frac{\left(\mu^{r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right)}{\gamma\beta\tau\sigma_r^2} \qquad (62)
$$

$$
\beta = \frac{\omega^{g}\left(\mu^{r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) - \left(\mu^{g} + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right) - \gamma\tau\sigma_g^2}{\gamma\tau\left(\omega^{g}\right)^2\sigma_r^2 - \gamma\tau\sigma_g^2} \qquad (63)
$$

$$
\tau = \frac{\beta\omega^{g}\left(\mu^{r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2\right) + \left(1-\beta\right)\left(\mu^{g} + \frac{1}{2}\sigma_g^2\right)}{\gamma\beta^2\left(\omega^{g}\right)^2\sigma_r^2 + \gamma\left(1-\beta\right)^2\sigma_g^2} \qquad (64)
$$

（62）を τ について整理した式を（64）に代入して整理すると，β と ω^{g} の関係が求められる。

$$\beta = \frac{1}{\left(\dfrac{\mu^g + \dfrac{1}{2}\sigma_r^2}{\mu^r + \dfrac{1}{2}\sigma_r^2}\dfrac{\sigma_r^2}{\sigma_g^2}\right)\omega^g + 1} \tag{65}$$

また，同じ式を（63）に代入して整理すると，β と ω^g のもう 1 つの関係が求められる。

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\mu^g + \dfrac{1}{2}\sigma_g^2}{\mu^r + \dfrac{1}{2}\sigma_r^2}\dfrac{\sigma_r^2}{\sigma_g^2}\right)\omega^g} \tag{66}$$

（65），および，（66）より β と ω^g を求めると，端点解 $\beta = 1$，$\omega^g = 0$ となる。したがって，年金保険料による財源はすべて年金システムの積立金運用部門に配分され，賦課方式による年金給付部門には配分されない。そして，積立金運用部門に配分された保険料収入はすべて安産資産に運用され，危険資産にはまったく運用されないことになる。3.3節における分析では，$\sigma_{rg} = 0$ のケースでは，$\beta = 0$ となり，年金システムは賦課方式による年金給付部門のみが運営されるケースが存在するという結果が得られていたが，ここでの結果は正反対の結果となっている。

また，この端点解を（62）に代入すると $\tau = \infty$ となるが，$0 \leq \tau \leq 1$なので年金保険料率は端点解 1 となり，労働期の所得はすべて政府によって徴収されることになる。徴収された所得は政府によって安全資産に運用されることになるが，もともと個人は安全資産しか購入できないケースについて分析を行っているので，このことは，政府が個人の資産運用を代行していることを意味している。

5　お　わ　り　に

本稿においては，Matsen and Thøgersen（2004）によって展開された積立金運用による賦課方式の年金システムに関する理論的分析について詳細な再検討が行われ，かつ，分析が行われていなかった以下の点について彼らの分析の拡張が試みられた。Matsen and Thøgersen（2004）においては，年金保険料による財源を賦課方式による年金給付部門と積立金運用部門に分割して配分し，さらに，積立金運用部門に配分された財源をリスキーな資産の運用と安全な資産の運用にそれぞれ分割して配分する年金システムが想定されていたが，積立金運用部門において，政府が 2 つの資産をそれぞれ運用することを想定するケースについては，

一般的な分析が行われていなかった。

本稿においては，まず彼らの分析の詳細な再検討が行われた後，積立金運用部門において 2 つの資産がそれぞれ運用されるための十分条件について検討が行われ，さらに，この十分条件の検討にもとづいて，あり得る 1 つのケースとして，賦課方式による年金給付部門が運営されず積立金運用部門のみが運営されるケースがあり得ることが確認された。そして，その場合には，安全資産のみが運用され，危険資産は運用されないことも確認された。

しかしながら，これらのことは，事後的リスク・シェアリングを想定したケースにおいてのみ検討されたことであり，事前的リスク・シェアリングを想定したケースにおいては， 1 階条件が複雑なため，$\sigma_{rg}=0$ という限定されたケースにおいてのみしか分析が行われなかった。そして，そのケースでは， 2 つのケースにおけるそれぞれの結果は正反対のものであった。

今後の課題としては，まず，事前的リスク・シェアリングを想定したケースにおいて $\sigma_{rg}\neq 0$ のケースの分析が進められなければならない。そして，（54）～（56）の方程式を明示的に解けない場合は，Miles（2000）や Matsen and Thøgersen（2004）などにおいて行われているように，各パラメータに実証的な数値を与えて，シミュレーションを行うことで分析を進めなければならないであろう。

また，本稿においては，事後的リスク・シェアリングを想定したケースと事前的リスク・シェアリングを想定したケースが，それぞれ別々に考察されたが，政府が実際に年金システムの運営について意思決定を行う場合には，現存する世代と将来誕生する世代の両方を考慮した意思決定が行われるであろう。したがって，両方のケースにおける分析を融合することも今後の課題であると考えられる。3.3節における分析と4.3節における分析を比較すると，$\sigma_{rg}=0$ という特殊ケースにおいてではあるが， 2 つのケースを比較することができる。$\sigma_{rg}=0$ のケースでは，事後的リスク・シェアリングを想定した場合は，賦課方式による年金給付部門のみが運営され，事前的リスク・シェアリングを想定した場合は，積立金運用部門のみが運営されるケースが存在していたが， 2 つのリスク・シェアリングを同時に考慮する場合は，両部門がそれぞれ運営されることになるであろう。その際に，政府が現在世代と将来世代に，それぞれどのくらいのウェイトをかけるかによって，両部門の規模が違ってくることが考えられる。政府が実際に年金システムに関する意思決定を行う際には，現在の世代と将来の世代の両方を考慮しながら意思決定を行っているので，今後の分析の方向性の 1 つとして，この問題は重要であると思われる。

A　付録

A.1 （5）の導出

（5）は次のようにして導出される。（4）における R_{t+1} の定義式の両辺に 1 を加え，さらに，右辺の括弧内を変形する。

$$1+R_{t+1}^T=1+R^f+a\left\{\left(1+R_{t+1}\right)-\left(1+R^f\right)\right\}+b\left\{\left(1+G_{t+1}\right)-\left(1+R^f\right)\right\}$$

両辺を $(1+R^f)$ で除し，さらに両辺の対数をとると，以下のようになる。

$$log\left(1+R_{t+1}^T\right)-log\left(1+R^f\right)=log\left[1+a\left(\frac{1+R_{t+1}}{1+R^f}-1\right)+b\left(\frac{1+G_{t+1}}{1+R^f}-1\right)\right]$$

r_{t+1}^T，r^f，g_{t+1} の定義，および，$\dfrac{1+R_{t+1}}{1+R^f}=e^{r_{t+1}-r^f}$ という関係式を代入する。

$$r_{t+1}^T-r^f=log\left[1+a\left(e^{r_{t+1}-r^f}-1\right)+b\left(e^{g_{t+1}-r^f}-1\right)\right]$$

この式を，$r_{t+1}=r^f$，$g_{t+1}=r^f$ の近傍でテイラー展開する。

$$F\left(r_{t+1},g_{t+1}\right)\equiv log\left[1+a\left(e^{r_{t+1}-r^f}-1\right)+b\left(e^{g_{t+1}-r^f}-1\right)\right]$$

と定義すると，近似式は以下のように表される。

$$F(r_{t+1},g_{t+1})=F(r^f,r^f)+\left.\frac{\partial F}{\partial r_{t+1}}\right|_{r_{t+1}=r^f,g_{t+1}=r^f}(r_{t+1}-r^f)+\left.\frac{\partial F}{\partial g_{t+1}}\right|_{r_{t+1}=r^f,g_{t+1}=r^f}(g_{t+1}-r^f)$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 F}{\partial^2 r_{t+1}^2}\right|_{r_{t+1}=r^f,g_{t+1}=r^f}(r_{t+1}-r^f)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial r_{t+1}\partial g_{t+1}}(r_{t+1}-r^f)(g_{t+1}-r^f)+\left.\frac{\partial^2 F}{\partial^2 g_{t+1}^2}\right|_{r_{t+1}=r^f,g_{t+1}=r^f}(g_{t+1}-r^f)^2\right]$$

この近似式を整理すると，$r_{t+1}^T-r^f$ の近似式は以下のようになる。

$$r_{t+1}^T-r^f=a\left(r_{t+1}-r^f\right)+b\left(g_{t+1}-r^f\right)+\frac{1}{2}\left\{a\left(1-a\right)\left(r_{t+1}-r^f\right)^2-2ab\left(r_{t+1}-r^f\right)\left(g_{t+1}-r^f\right)+b\left(1-b\right)\left(g_{t+1}-r^f\right)^2\right\}$$

ここで，$\sigma_r^2\equiv(r_{t+1}-r^f)^2$，$\sigma_g^2\equiv(g_{t+1}-r^f)^2$，$\sigma_{rg}\equiv(r_{t+1}-r^f)(g_{t+1}-r^f)$ と定義して，この定義を用いながら整理すると（6.5）が得られる。

$$r_{t+1}^T-r^f=a\left(r_{t+1}-r^f\right)+b\left(g_{t+1}-r^f\right)+\frac{1}{2}(a\sigma_r^2+b\sigma_g^2)-\frac{1}{2}\left(a^2\sigma_r^2+b^2\sigma_g^2+2ab\sigma_{rg}\right)$$

A.2 （6）の導出

（6）は次のようにして導出される。（1）の対数をとる。

$$log\,U_t=log\frac{\delta}{1-\gamma}+log\,EtC_{t+1}^{1-\gamma}$$

$log\,\dfrac{\delta}{1-\gamma}$ の項を無視すると，以下のようになる。

$$log\,U_t = log\,E_t C_{t+1}^{1-\gamma}$$

対数正規分布をする確率変数の期待値に関する性質（$log\,E[X] = E[log\,X] + \dfrac{1}{2}\,Var[log\,X] = E[log\,X] + \dfrac{1}{2}\sigma_X^2$ ；X：対数正規分布をする確率変数，σ_X^2 ：確率変数 X の分散）を適用する。

$$\begin{aligned}
log\,U_t &= E_t\left[log\,C_{t+1}^{1-\gamma}\right] + \frac{1}{2}Var\left[log\,C_{t+1}^{1-\gamma}\right] \\
&= E_t\left[(1-\gamma)log\,C_{t+1}\right] + \frac{1}{2}Var\left[(1-\gamma)log\,C_{t+1}\right] \\
&= (1-\gamma)E_t\left[(1-\gamma)log\,C_{t+1}\right] + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_c^2; \sigma_c^2 : c_{t+1} \equiv log\,C_{t+1} \text{ の分散} \\
&= (1-\gamma)E_t[c_{t+1}] + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_c^2
\end{aligned}$$

A.3　$\sigma_T^2 = (\omega^P)^2\sigma_r^2$ の導出

（5）において $\tau = 0$ とおくと，以下のようになる。

$$r_{t+1}^T - r^f = \omega^P\left(r_{t+1} - r^f\right) + \frac{1}{2}\omega^P\left(1-\omega^P\right)\sigma_r^2$$

上式において，r^f, ω^P, σ_r^2 は定数なので，括弧でまとめる。

$$r_{t+1}^T = \omega^P r_{t+1} + \left\{\frac{1}{2}\omega^P\left(1-\omega^P\right)\sigma_r^2 + \left(1-\omega^P\right)r^f\right\}$$

ここで，定数項を $\bar{C}$ とおくと，

$$r_{t+1}^T = \omega^P r_{t+1} + \bar{C}$$

となるが，この関係式から次のことが示される。

$$\begin{aligned}
Var\left[r_{t+1}^T\right] &= Var\left[\omega^P r_{t+1} + \bar{C}\right] \\
&= Var\left[\omega^P r_{t+1}\right] \\
&= (\omega^P)^2 Var\left[r_{t+1}\right]
\end{aligned}$$

したがって，$\sigma_T^2 = (\omega^P)^2\sigma_r^2$ となる。

A.4 $\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 = log\ E\left[\frac{1+R_{t+1}}{1+R^f}\right]$ の導出

この関係式は，以下のようにして導出される。

$$\begin{aligned}
\mu^r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 &= E\left[r_{t+1} - r^f\right] + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \\
&= E\left[log\left(1+R_{t+1}\right) - log\left(1+R^f\right)\right] + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \\
&= E\left[log\left(1+R_{t+1}\right)\right] - E\left[log(1+R^f)\right] + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \\
&= log\ E\left[1+R_{t+1}\right] - \frac{1}{2}\sigma_r^2 - log\ E\left[1+R^f\right] + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \\
&= log\ E\left[1+R_{t+1}\right] - log\ E\left[1+R^f\right] \\
&= log\ E\left[\frac{1+R_{t+1}}{1+R^f}\right]
\end{aligned}$$

A.5 （**13**）の導出

（5）において $\beta = 0$ とおいた式を以下のように再整理する。

$$r_{t+1}^T - r^f - \tilde{C} = \omega^P\left(1-\tau\right)\left(r_{t+1} - r^f\right) + \tau\left(g_{t+1} - r^f\right);$$

$$\tilde{C} \equiv \frac{1}{2}\omega^P\left(1-\tau\right)\sigma_r^2 + \frac{1}{2}\tau\sigma_g^2 - \frac{1}{2}\left\{\left(\omega^P\right)^2\left(1-\tau\right)^2\sigma_r^2 + \tau^2\sigma_g^2 + 2\omega^P\tau(1-\tau)\sigma_{rg}\right\}$$

$\tilde{C}$ は定数項を表している。上式の分散を考えると，左辺は $Var\left[r_{t+1}^T - r^f - \tilde{C}\right] = Var\left[r_{t+1}^T\right]$ となる。また，右辺については，分散の性質（$Var[x] = E[x^2] - \mu^2$; x は確率変数，μ は x の期待値）より，以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&Var\left[\omega^P(1-\tau)(r_{t+1} - r^f) + \tau(g_{t+1} - r^f)\right] \\
&= E\left[\left\{\omega^P\left(1-\tau\right)\left(r_{t+1} - r^f\right) + \tau\left(g_{t+1} - r^f\right)\right\}^2\right] - \left\{E\left[\omega^P\left(1-\tau\right)\left(r_{t+1} - r^f\right) + \tau\left(g_{t+1} - r^f\right)\right]\right\}^2 \\
&= \left(\omega^P\right)^2\left(1-\tau\right)^2 E\left[\left(r_{t+1} - r^f\right)^2\right] + 2\tau\left(1-\tau\right)\omega^P E\left[\left(r_{t+1} - r^f\right)\left(g_{t+1} - r^f\right)\right] + \tau^2 E\left[\left(g_{t+1} - r^f\right)^2\right] \\
&- \left\{\omega^P\left(1-\tau\right)E\left[r_{t+1} - r^f\right] + \tau E\left[g_{t+1} - r^f\right]\right\}^2 \\
&= (\omega^P)^2\left(1-\tau\right)^2\sigma_r^2 + 2\tau\left(1-\tau\right)\omega^P\sigma_{rg} + \tau^2\sigma_g^2
\end{aligned}$$

なお，ここでの分析は $r_{t+1} = r^f$, $g_{t+1} = r^f$ の近傍で行われているので，$E[r_{t+1} - r^f] = 0$, $E[g_{t+1} - r^f] = 0$ となることから，上記の展開における最後の式で第4項が消去されている。

A.6　$|\rho_{xy}|<1$の導出

$a_1, \cdots, a_N, b_1, \cdots, b_N$ が実数であるとき，コーシーの不等式より，

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i b_i\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} b_i^2\right)$$

が成立する。$a_i = x_i - \overline{x}$，$b_i = y_i - \overline{y}$($\overline{x}$, $\overline{y}$ は x, y の平均値）とおくと，上式は以下のようになる。

$$\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-\overline{y})^2\right)$$

両辺を$\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-\overline{y})^2\right)$で除する。

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-\overline{y})^2\right)} < 1$$

ここで，

$$\rho_{xy} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-\overline{y})^2\right)}}$$ （変数 x,y の相関係数）

と定義すると，$(\rho_{xy})^2 < 1$となるので，$-1 < \rho_{xy} < 1$となる。

A.7　$g_{t+1} = n + \lambda_{t+1}$ の導出

$G_{t+1} = N_{t+1} + \Lambda_{t+1} + N_{t+1}\Lambda_{t+1}$ なので，

$$\begin{aligned} 1+G_{t+1} &= 1+N_{t+1}+\Lambda_{t+1}+N_{t+1}\Lambda_{t+1} \\ &= (1+N_{t+1})(1+\Lambda_{t+1}) \end{aligned}$$

となる。両辺の対数をとると，

$$\begin{aligned} log(1+G_{t+1}) &= log(1+N_{t+1})(1+\Lambda_{t+1}) \\ &= log(1+N_{t+1}) + log(1+\Lambda_{t+1}) \end{aligned}$$

となるので，定義より，$g_{t+1} = n + \lambda_{t+1}$ となる。

A.8　$\sigma_g^2 = \sigma_\lambda^2, \sigma_{rg} = \sigma_{r\lambda}$の導出

$g_{t+1} = n + \lambda_{t+1}$という関係式から，$g_{t+1}$の分散と$\lambda_{t+1}$の分散の関係式，および，$r_{t+1}$と$g_{t+1}$の共分散と$r_{t+1}$と$\lambda_{t+1}$の共分散の関係式が，以下のように求められる。

$$
\begin{aligned}
Var[g_{t+1}] &= Var[n + \lambda_{t+1}] \\
&= Var[\lambda_{t+1}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rg} &= E\left[\left(r_{t+1} - r^f\right)\left(g_{t+1} - r^f\right)\right] \\
&= E\left[\left(r_{t+1} - r^f\right)\left(n + \lambda_{t+1} - r^f\right)\right] \\
&= E\left[n\left(r_{t+1} - r^f\right) + \left(r_{t+1} - r^f\right)\left(\lambda_{t+1} - r^f\right)\right] \\
&= nE\left[r_{t+1} - r^f\right] + E\left[\left(r_{t+1} - r^f\right)\left(\lambda_{t+1} - r^f\right)\right] \\
&= E\left[\left(r_{t+1} - r^f\right)\left(\lambda_{t+1} - r^f\right)\right] \\
&= \sigma_{r\lambda}
\end{aligned}
$$

参　考　文　献

［1］　Ball, L. and G. Mankiw（2001）, “Intergenerational risk sharing in the spirit of Arrow, Debreu, and Rawls, with applications to social security design,” *NBER Working Paper*, No. 8270.

［2］　Campbell, J. and L. Viceira（2002）, *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Oxford University Press.

［3］　Gordon, R. and H. Varian（1988）, “Intergenerational risk sharing,” *Journal of Public Economics*, 37, pp. 185–202.

［4］　Gyárfás, G. and M. Marquardt（2001）, “Pareto Improving Transition from Pay-as-You- Go to a Fully Funded Pension System in a Model of Endogenous Growth,” *Journal of Population Economics*, 14, pp. 445–453.

［5］　Matsen, E. and Ø. Thøgersen（2004）, “Designing social security-a portfolio choice approach-,” *European Economic Review*, 48, pp. 883–904.

［6］　Miles, D.（2000）, “Funded and unfunded pensions: Risk, return and welfare,” Discussion Paper No. 2369, *Center for Economic Policy Reseach*, London.

［7］　Shiller, R.（1998）, “Social security and institutions for intergenerational, intragenerational, and international risk sharing,” *NBER Working Paper*, No. 6641.

［8］　Sinn, H.（2000）, “Pension reform and demographic crisis: Why a funded system is needed and why it is not needed,” *International Tax and Public Finance*, 7, pp. 389–410.