# 発注時点，需要の払い出し始点および需要形態の確率的在庫モデルへの影響について

## ——離散編——

兒　玉　正　憲
坂　口　通　則

（受付　2002 年 3 月 7 日）

## 目　　　次



## は　し　が　き

一期間（$t$）の購入・販売在庫モデルでは発注量は期首に即時的にみたされ，需要はすべて期首に払いだしがはじまると仮定しているが本論文では，発注量は $t/m$ 時点（$m \geqq 1$）に即時的にみたされ，需要は $t/n$ 時点から払いだしがはじまると仮定する。確率的に変化するのは需要量だけである。最初に需要が1回きりと仮定できる突発需要の場合を取扱い，次に，需要が期を通じて一様に発生する場合を取扱う。最後に，需要が一般的な関数にしたがって発生する場合を取扱う。需要量が離散量の場合について検討する。

## 1.　突発需要の購入・販売在庫モデル

まず，

$x$：前期からの繰越在庫量

$y$：発注量（仮定によって $t/m$ 時点に即時的に入荷）

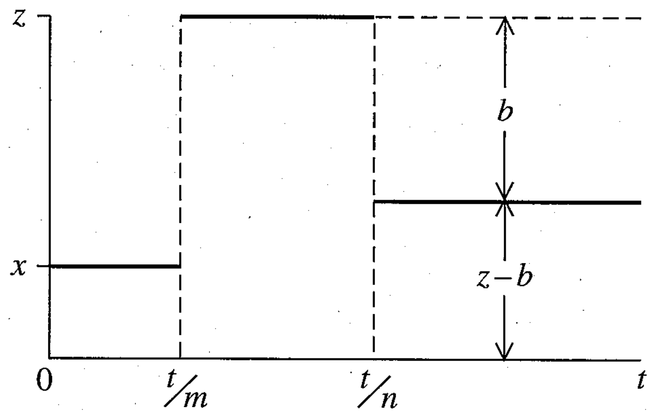
$z = x + y$

$B$：需要量を表す確率変数

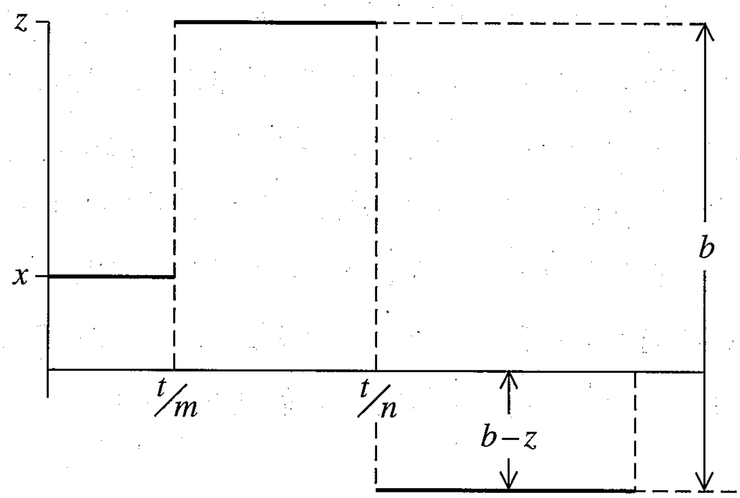
$b$：$B$ の実現値

とおく。

図 1　在庫状態




(i)　$b \leq z$ の場合




(ii)　$b > z$ の場合

需要量 $B$ は，仮定によって確定的でない。このため在庫量 $z$，$x$ と需要量 $B$ の実現値の大小関係は確率的であり，その大小関係に応じて在庫状態は図1のようになる。

(1) $\boldsymbol{m \geq n}$

期平均在庫 $I_1(b, z)$ および期平均在庫不足量 $I_2(b, z)$ は $B$ の実現値 $b$ と $z$ の大小関係によりつぎのように表される。

$$I_1(b,z)=\begin{cases}\left\{x\cdot\dfrac{t}{m}+z\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)t+(z-b)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)t\right\}/t \\ \qquad =\left(1-\dfrac{1}{m}\right)z-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)b+\dfrac{x}{m}, & b\le z \\ \left\{x\cdot\dfrac{t}{m}+z\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)t\right\}/t=\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)z+\dfrac{x}{m}, & b>z\end{cases} \tag{1.1}$$

$$I_2(b,z)=\begin{cases}0, & b\le z \\ \left\{(b-z)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)t\right\}/t=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)(b-z), & b>z\end{cases} \tag{1.2}$$

また，諸費用を

$c$：購入費用（単位当たり）

$h$：在庫維持費用（期当たり，単位当たり）

$p$：品切費用（単位当たり）

とおき，さらに

$\phi(b)$：需要量 $B$ の確率関数，即ち，$P_r(B=b)=\phi(b)$，$\phi(b)=0$，$b<0$

とする。

このモデルでは，発注費用を無視することにしたから，期待総費用を $E\{C(B, z)\}$ とすれば，それは

$E\{C(B, z)\}$ = 購入費用 + $h$・(期待期平均在庫量) + $p$・(期待期平均在庫不足量)

$$
\begin{aligned}
&= cy + hE\{I_1(B,z)\} + pE\{I_2(B,z)\} \\
&= c(z-x) + h\sum_{b=0}^{\infty} I_1(b,z)\phi(b)db + p\sum_{b=0}^{\infty} I_2(b,z)\phi(b)db \\
&= c(z-x) + h\left\{\sum_{b=0}^{z}\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)z-\left(1-\frac{1}{n}\right)b+\frac{x}{m}\right)\phi(b)db\right. \\
&\qquad\left. +\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\frac{x}{m}\right)\phi(b)db\right\} \\
&\qquad +p\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)(b-z)\phi(b)db \\
&=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+c+\left(\frac{1}{n}-1\right)p\right\}z \\
&\qquad +\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{\infty} b\phi(b) \\
&\qquad +\left(1+\frac{1}{n}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z}(z-b)\phi(b)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

ここで,

$$E\{(C(B,z)\}-E\{C(B,z-1)\}=\varDelta E\{C(B,z)\}$$

$$\varDelta^2 E\{C(B,z)\}=\varDelta E\{C(B,z)\}-\varDelta E\{C(B,z-1)\}$$

とおく,

$\varDelta^2 E\{C(B,z)\}\geq 0$ のとき，期待費用最小化の条件は

$$\varDelta E\{C(B,z)\}\leq 0,\ \varDelta E\{C(B,z+1)\}\geq 0 \tag{1.4}$$

であり，問題は，これをみたす $z$ を求めることに帰着する。

式(1.3)から容易に

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varDelta E\{C(B,z)\}=\left\{c+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p\right\}+\left(1+\frac{1}{n}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b) \\
&\varDelta^2 E\{C(B,z)\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\phi(z-1)\geq 0 \\
&\varDelta E\{C(B,z+1)\}=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+c+\left(\frac{1}{n}-1\right)p\right\}+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z}\phi(b)
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.5}
$$

となるから，式(1.4)より $z$ の最適値 $z^*$ は，

$$P_r(B \leq z^* - 1 \leq \frac{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)h+\left(1-\frac{1}{n}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)} \leq P_r(B \leq z^*) \tag{1.6}$$

をみたさなければならない。

(2)　$\boldsymbol{m < n}$

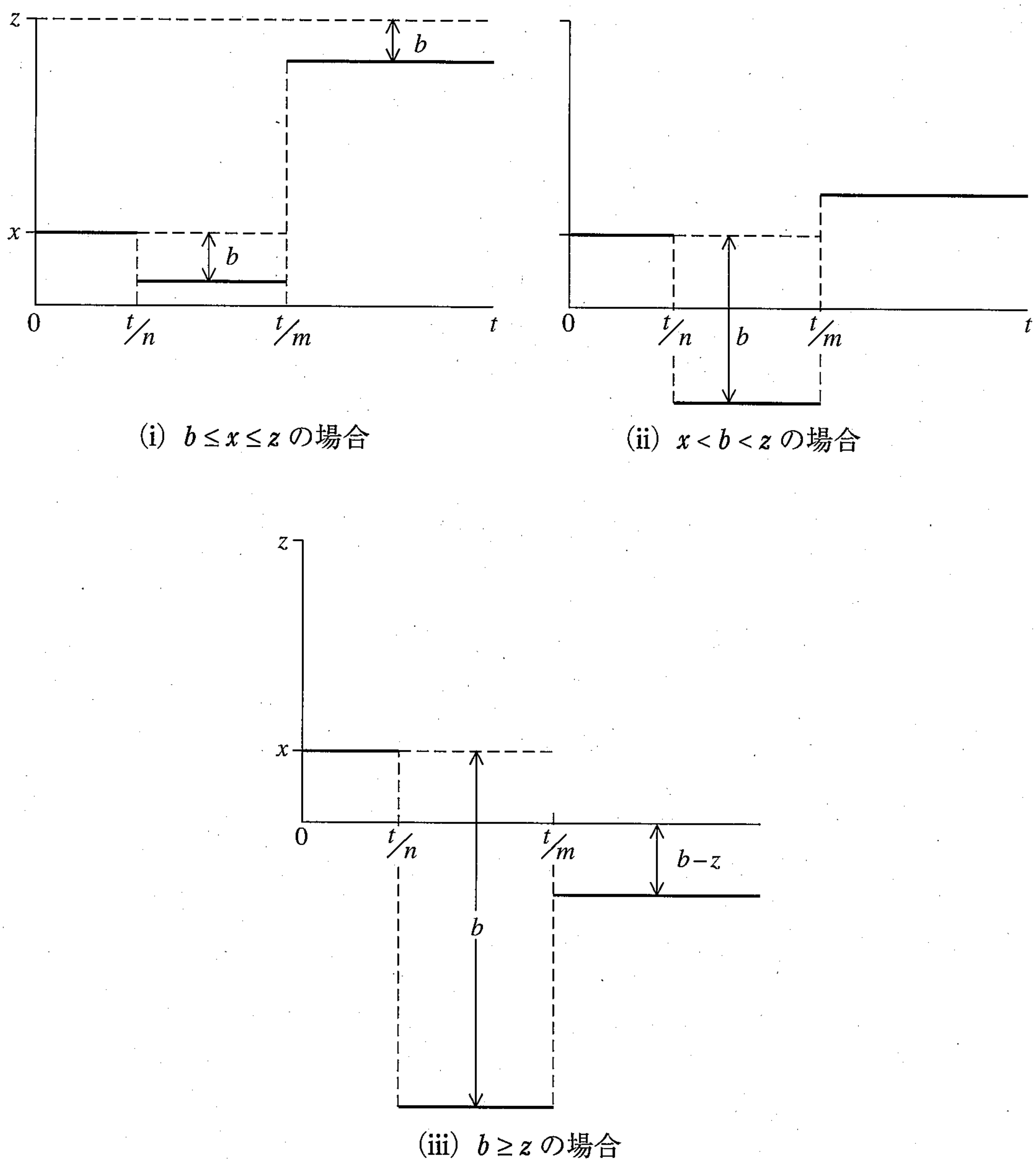
$z$，$x$ および $b$ の大小関係により在庫状態は図 2 のようになる。

$I_1(b, z)$ および $I_2(b, z)$ はつぎのように表される。

$$I_1(b,z) = \begin{cases} \left\{x \cdot \frac{t}{n} + (x-b)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)t + (z-b)\left(1-\frac{1}{n}\right)t\right\} \\ \quad = \frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z - \left(1-\frac{1}{n}\right)b,\ b < x \\ \left\{x \cdot \frac{t}{n} + (z-b)\left(1-\frac{1}{m}\right)t\right\}/t \\ \quad = \frac{x}{n} + \left(1-\frac{1}{m}\right)(z-b),\ x \leq b < z \\ \left\{x \cdot \frac{t}{n}\right\}/t = \frac{x}{n},\ z \leq b \end{cases} \tag{1.7}$$

$$I_2(b,z) = \begin{cases} 0,\ b < x \\ \left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)(b-x)t\right\}/t = \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)(b-x),\ x \leq b < z \\ \left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)(b-x)t + \left(1-\frac{1}{m}\right)(b-z)t\right\}/t \\ \quad = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x - \left(1-\frac{1}{m}\right)z + \left(1-\frac{1}{n}\right)b,\ b \geqq x \end{cases} \tag{1.8}$$

図 2　在庫状態




式(1.7)および式(1.8)より

$$E\{C(B,z)\} = c(z-x) + h\sum_{b=0}^{\infty} I_1(b,z)\phi(b) + p\sum_{b=0}^{\infty} I_2(b,z)\phi(b)$$

$$= \left\{\frac{h}{n} - p\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\right\}x + p\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_{b=0}^{\infty} b\phi(b)db$$

$$+ (h+p)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)x\sum_{b=0}^{x}\phi(b)db + (h+p)\left(\frac{1}{n} - 1\right)\sum_{b=0}^{x} b\phi(b)db$$

$$+\left\{c+p\left(\frac{1}{m}-1\right)\right\}z+(h+p)\left(\frac{1}{m}-1\right)\sum_{b=x}^{z}b\phi(b)db$$
$$+(h+p)\left(1-\frac{1}{m}\right)z\sum_{b=0}^{z}\phi(b) \tag{1.9}$$

したがって

$$\varDelta E\{C(B,z)\}=\left\{c+p\left(\frac{1}{m}-1\right)\right\}+(h+p)\left(1-\frac{1}{m}\right)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b) \tag{1.10}$$

$$\varDelta^2 E\{C(B,z)\}=(h+p)\left(1-\frac{1}{m}\right)\phi(z-1)\geqq 0 \tag{1.11}$$

$$\varDelta E\{C(B,z+1)\}=\left\{c+p\left(\frac{1}{m}-1\right)\right\}+(h+p)\left(1-\frac{1}{m}\right)\sum_{b=0}^{z}\phi(b) \tag{1.12}$$

となる。式(1.4)より $z$ の最適値 $z^*$ は

$$P_r\{B\leq z^*-1\}\leq\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)}\leq P_r\{B\leq z^*\} \tag{1.13}$$

をみたさなければならない。

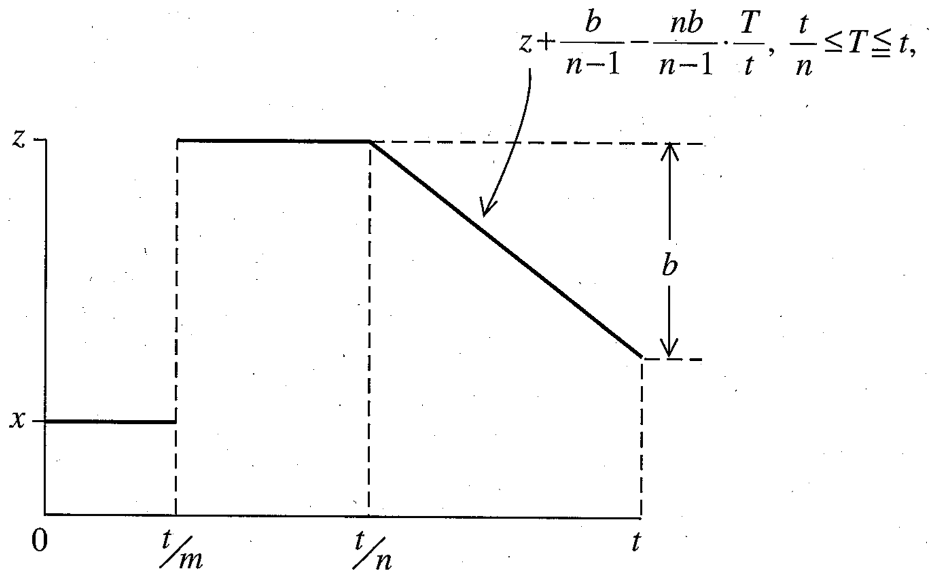
## 2.　一様需要の購入・販売在庫モデル

需要は $t/n$ 時点から $t$ 時点まで一様に発生する場合を考察する。しかし，他の条件は1の場合と同じとする。在庫状態は図3のようになる。

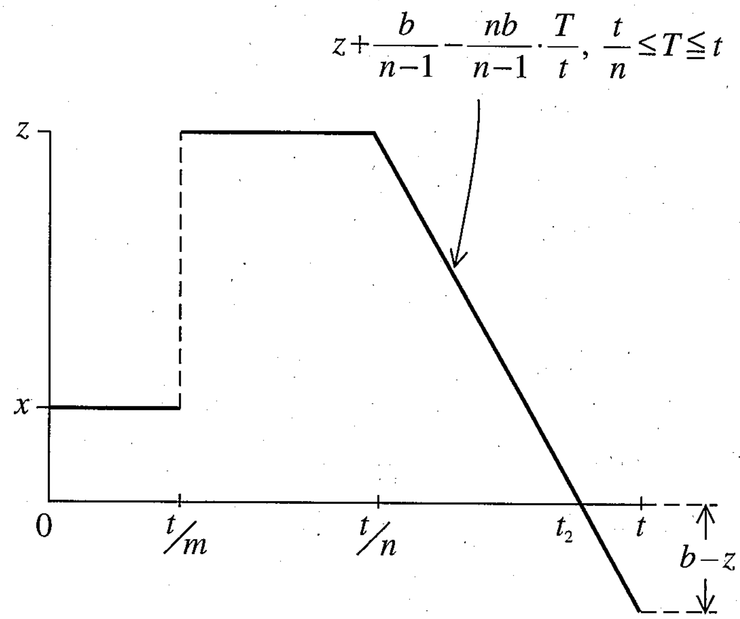
(1)　$\boldsymbol{m>n}$

$T$ 時点の在庫量を $Q(T)$ とすると，$t/n\leqq T\leqq t$ における $Q(T)$ は $z+b/(n-1)-nb\,T/((n-1)t)$ で与えられる。これは $Q(T)=a+cT$ とおき，$Q(t/n)=a+c\cdot\frac{t}{n}=z$, $Q(t)=A+ct=z-b$ より，$c=-nb/\{(n-1)t\}$, $a=z+b/(n-1)$ を得る。

図 3　在庫状態, $m>n$




(i) $b\le z$ の場合




(ii) $b>z$ の場合

$$Q(T)=\begin{cases} x, & 0\le T<t/m \\ z, & t/m\le T<t/n \\ z+\dfrac{b}{n-1}-\dfrac{nb}{n-1}\cdot\dfrac{T}{t}, & t/n\le T\le t \end{cases} \tag{2.1}$$

(i)　$b \leq z$ の場合

$$\left.\begin{aligned} I_1(b,z) &= \frac{1}{t}\left[x\cdot\frac{t}{m}+z\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)t+\frac{(z+(z-b))\left(1-\frac{1}{n}\right)t}{2}\right] \\ &= \frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2} \\ I_2(b,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

(ii)　$b > z$ の場合

$$\begin{aligned} I_1(b,z) &= \frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{m}+z\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)t+z\left(t_2-\frac{t}{n}\right)/2\right\} \\ &= \frac{x}{m}+z\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)+\frac{z}{2}\left(\frac{t_2}{t}-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{x}{m}+z\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2b} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\left(\because Q(t_2)=z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{t_2}{t}=0 \text{ より} \quad \frac{t_2}{t}=\{(n-1)z+b\}/\{nb\}=\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z}{b}\right)$$

$$\begin{aligned} I_2(b,z) &= \frac{1}{t}\{(b-z)(t-t_2)/2\}=\frac{(b-z)}{2}\left(1-\frac{t_2}{t}\right) \\ &= \frac{(b-z)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{z}{b}\right)}{2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

したがって

$$\begin{aligned} E\{C(B,z)\} &= c(z-x)+h\sum_{b=0}^{\infty}I_1(b,z)\phi(b)db+p\sum_{b=0}^{\infty}I_2(b,z)\phi(b)db \\ &= c(z-x)+h\left\{\sum_{b=0}^{z}\left(\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z-\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{b}{2}\right)\phi(b)\right. \\ &\quad \left.+\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(\frac{x}{m}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2b}\right)\phi(b)\right\} \end{aligned}$$

$$+p\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)(b-z)\left(1-\frac{z}{b}\right)\right)\phi(b) \tag{2.5}$$

となる。$E\{C(B,z)\}$ の第 1 次差分（差分と省略している），および第 2 次差分は

$$\begin{aligned}\varDelta E\{C(B,z)\} &= E\{C(B,z)-E\{C(B,z-1)\}\\ &=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p+c\\ &\quad+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\left\{\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)+\left(z-\frac{1}{2}\right)\sum_{b=z}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}\right\}\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\varDelta E\{C(B,z+1)\} &= E\{C(B,z+1)\}-E\{C(B,z)\}\\ &=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p+c\\ &\quad+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\left\{\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\left(z+\frac{1}{2}\right)\sum_{b=z+1}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}\right\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\varDelta^2 E\{C(B,z)\} &= \varDelta E\{C(B,z)\}-\varDelta E\{C(B,z-1)\}\\ &=\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\left\{\frac{\phi(z-1)}{2(z-1)}+\sum_{b=z}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}\right\}\geq 0\end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。式(1.4)より $z$ の最適値 $z^*$ は

$$\begin{aligned}\sum_{b=0}^{z^*-1}\phi(b)+\left(z^*-\frac{1}{2}\right)\sum_{b=z^*}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b} &\leq \frac{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)h+\left(1-\frac{1}{n}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)}\\ &\leq \sum_{b=0}^{z^*}\phi(b)+\left(z^*+\frac{1}{2}\right)\sum_{b=z^*+1}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}\end{aligned} \tag{2.9}$$

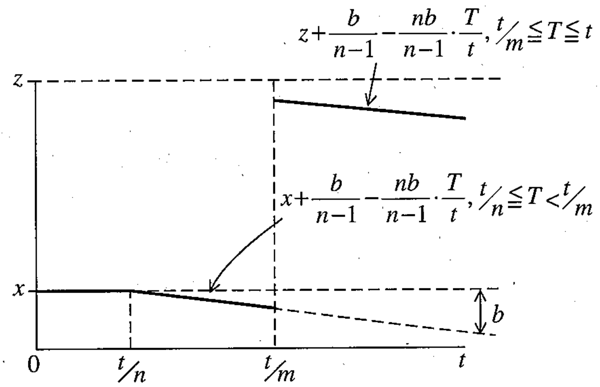
をみたさなければならない。

(2)　$\boldsymbol{m \leq n}$

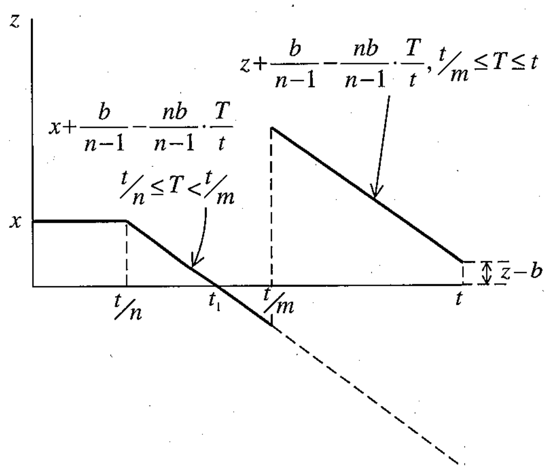
この場合の在庫状態は図 4 で示される。このときの時点 $T$ における在庫量 $Q(T)$ はつぎの式で与えられる。

$$Q(T)=\begin{cases} x, & 0 \leq T \leq t/n \\ x+\dfrac{b}{n-1}-\dfrac{nb}{n-1}\cdot\dfrac{T}{t}, & t/n \leqq T < t/m \\ z+\dfrac{b}{n-1}-\dfrac{nb}{n-1}\cdot\dfrac{T}{t}, & t/m \leqq T \leqq t \end{cases} \tag{2.10}$$

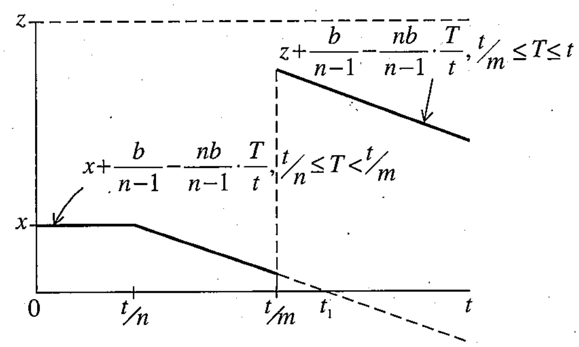
図 4　在庫状態



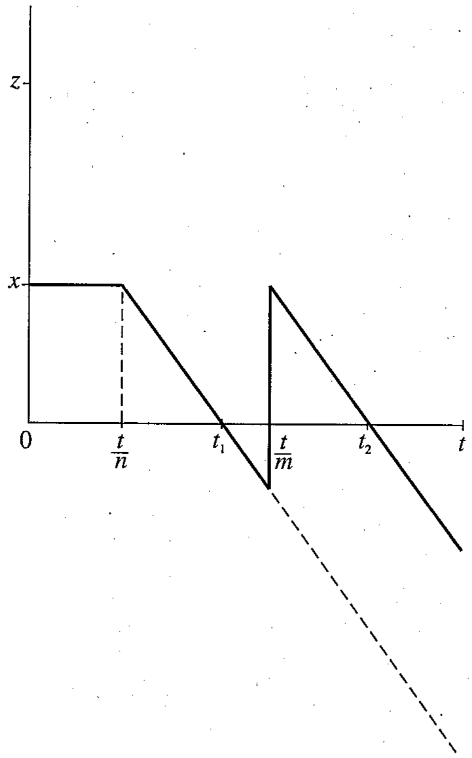

(i)　$b < x < z$ の場合



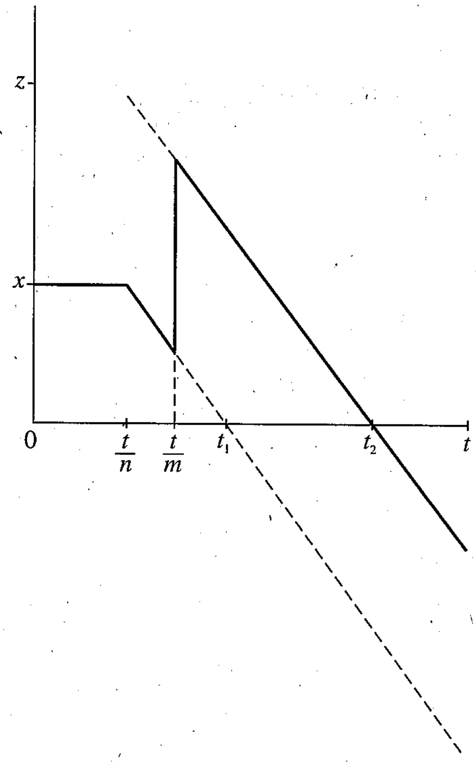

(ii)　$x < b < z,\ t_1 < t/m$ の場合



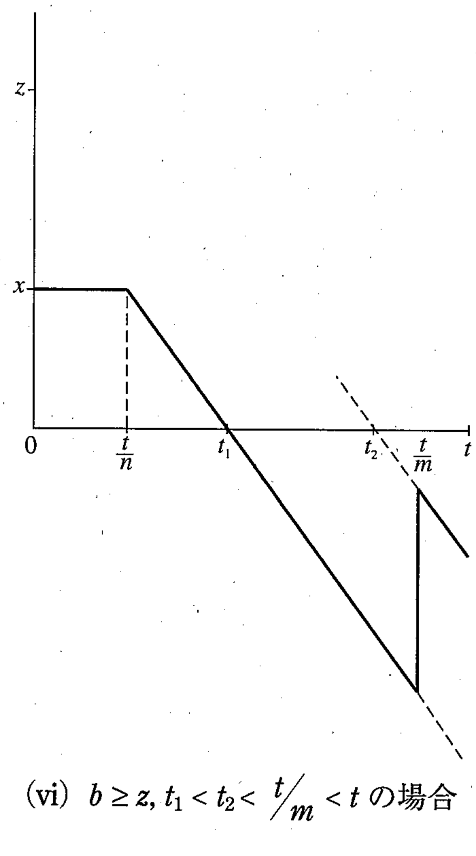

(iii)　$x < b < z,\ t_1 \geq t/m$ の場合




（iv） $b \geq z, t_1 < t < {}^{t}\!/_{m} < t_2 < t$ の場合




（v） $b \geq z,\ {}^{t}\!/_{m} < t_1 < t_2 < t$ の場合




（vi） $b \geq z, t_1 < t_2 < {}^{t}\!/_{m} < t$ の場合

(i) $b<x$ の場合（図４，(i) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\left(x+x+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)t/2\right.$$

$$\left.+\left(z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}+z-b\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)t/2\right\}$$

$$=\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2m}\left\{\frac{m-n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)+1-m\right\}$$

$$=\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right) \tag{2.11}$$

$$I_2(b,z)=0 \tag{2.12}$$

(ii)　$x<b\leqq z,\ t_1<t/m<t/t_2$ の場合（図４，(ii) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+x\left(t_1-\frac{t}{n}\right)/2+\left(z+\frac{b}{n-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}+z-b\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)t/2\right\}$$

$$=\frac{x}{2n}+\frac{x}{2}\cdot\frac{t_1}{t}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\frac{b}{2}\left\{\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right\}\left(1-\frac{1}{m}\right)$$

ここで，$x+\dfrac{b}{n-1}-\dfrac{nb}{n-1}\cdot\dfrac{t_1}{t}=0$ より $\dfrac{t_1}{t}=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{x}{b}$　これを上式に代入して

$$=\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2b}\left(1-\frac{1}{n}\right)+z\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{b}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left\{\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right\} \tag{2.13}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\left(\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}-x-\frac{b}{n-1}\right)\left(\frac{t}{m}-t_1\right)/2\right\}$$

$$=\left(\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}-x-\frac{b}{n-1}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}\right)/2$$

$$=-\frac{x}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\frac{x^2}{2b}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{b}{2}-\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)/(n-1) \tag{2.14}$$

つぎに $t_1 \geq {}^{t}\!/_{m}$ の場合を考察しよう。

(iii)　$x<b\leq z,\ {}^{t}\!/_{m}<t_1<t<t_2$ の場合（図 4，(iii) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\left(x+x+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(\frac{t}{m}-\frac{t}{n}\right)/2\right.$$

$$\left.+\left(z+\frac{b}{n-1}+\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}+z-b\right)\left(t-\frac{t}{m}\right)/2\right\}$$

$$=\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right) \tag{2.15}$$

$$I_2(b,z)=0 \tag{2.16}$$

(iv)　$b>z,\ t_1<{}^{t}\!/_{m}<t_2<t$ の場合（図 4，(iv) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+x\left(t_1-\frac{t}{n}\right)/2+\left(z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(t_2-\frac{t}{m}\right)/2\right\}$$

$$=\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2b}-\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z}{b}\right)/2$$

$$\left(\because\ z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{t_2}{t}=0\ \text{より}\ \frac{t_2}{t}=\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z}{b}\right)$$

$$=\frac{x}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)(x^2+z^2)\frac{1}{2b}$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{b}{2(n-1)} \tag{2.17}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\left(\frac{t}{m}-t_1\right)\left(\frac{n}{m}\cdot\frac{nb}{n-1}-\frac{b}{n-1}-x\right)/2\right.$$

$$\left.+(t-t_2)\left(\frac{nb}{n-1}-\frac{b}{n-1}-z\right)/2\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{m}-\frac{t_1}{t}\right)\left(\frac{b}{n-1}\left(\frac{n}{m}-1\right)-x\right)/2+\left(1-\frac{t_2}{t}\right)(b-z)/2$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x-\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{2b}\left(1-\frac{1}{n}\right)(x^2+z^2)+\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{m}-1\right)\right)b \tag{2.18}$$

(v)　$b>z,\ {}^{t}\!/_{m}<t_1<t_2<t$ の場合（図４，(v) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\left(x+x+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)t/2\right.$$

$$\left.+\left(z+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\left(t_2\cdot\frac{t}{m}\right)/2\right\}$$

$$=\frac{x}{m}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2b}\quad\left(\because t_2/t=1/n+\left(1-1/n\right)z/b\right) \tag{2.19}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{(b-z)(t-t_2)/2\right\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{(b-z)^2}{2b}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(-z+\frac{b}{2}+\frac{z^2}{2b}\right) \tag{2.20}$$

(vi)　$b>z,\ t_1<t_2<{}^{t}\!/_{m}<t$ の場合（図４，(vi) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t_1}\left(x+\frac{b}{n-1}-\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{T}{t}\right)dT\right\}$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x+\frac{b}{n-1}\right)\left(\frac{t_1}{t}-\frac{1}{n}\right)-\frac{nb}{2(n-1)}\left(\left(\frac{t_1}{t}\right)^2-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x+\frac{b}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}-\frac{nb}{2(n-1)}\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{x}{b}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}\right\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)x\left(\frac{x}{2b}+\frac{1}{n-1}\right) \tag{2.21}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t/m}\left(\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{T}{t}-\frac{b}{n-1}-x\right)dT+\int_{t/m}^{t}\left(\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{T}{b}-\frac{b}{n-1}-z\right)dT\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t}\frac{nb}{n-1}\cdot\frac{T}{t}dT-\left(\frac{b}{m}-t_1\right)\left(\frac{b}{n-1}+x\right)-\left(t-\frac{t}{m}\right)\left(\frac{b}{n-1}+z\right)\right\}$$

$$=\frac{nb}{2(n-1)}\left\{1-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{x}{b}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x}{b}\right)\left(\frac{b}{n-1}+x\right)\right\}-\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{b}{n-1}+z\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(b+\frac{x^2}{b}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+\left(\frac{1}{m}-1\right)z \qquad (2.22)$$

したがって次の 6 つのケースにわけて $E\{C(B,z)\}$ を求めることができる。

ケース 1． i) $b<x$, $t<t_1<t_2$, ii) $x<b<z$, $t_1<t/m<t<t_2$, iii) $b\geq z$, $t_1<t/m<t_2<t$

この場合は, (i), (ii), (iv)（図 4, (i), (ii), (iv) を参照）より

$$E\{C(B,z)\}=c(z-x)+h\sum_{b=0}^{\infty}I_1(b,z)\phi(b)+p\sum_{b=0}^{\infty}I_2(b,z)\phi(b)$$

$$=c(z-x)+h\left\{\sum_{b=0}^{x}I_1(b,z)\phi(b)+\sum_{b=x+1}^{z}I_1(b,z)\phi(b)+\sum_{b=z+1}^{\infty}I_1(b,z)\phi(b)\right\}$$

$$+p\left\{\sum_{b=0}^{x}I_2(b,z)\phi(b)+\sum_{b=x+1}^{z}I_2(b,z)\phi(b)+\sum_{b=z+1}^{\infty}I_2(b,z)\phi(b)\right\}$$

$$=c(z-x)+h\left\{\sum_{b=0}^{x}\left(\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{b}{2}\right)\phi(b)\right.$$

$$+\sum_{b=x+1}^{z}\left(\frac{x}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{m}\right)-1\right)\frac{b}{2}\right)\phi(b)$$

$$+\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)(x^2+z^2)\frac{1}{2b}\right.$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{b}{2(n-1)}\Bigg)\phi(b)\Bigg\}$$

$$+p\Bigg\{\sum_{b=x+1}^{z}\Bigg(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}$$

$$+\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2(n-1)}\Bigg)\phi(b)$$

$$+\sum_{b=z+1}^{\infty}\Bigg(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x-\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)(x^2+z^2)\frac{1}{2b}$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{m}-1\right)\frac{1}{(n-1)}\right)\frac{b}{2}\phi(b)\Bigg\}\qquad(2.23)$$

となる。また

$$\triangle E\{C(B,z)\}=E\{C(B,z)\}-E\{C(B,z-1)\}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p+c$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\left\{\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)+\left(z-\frac{1}{2}\right)\sum_{b=z}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}\right\}\qquad(2.24)$$

$$\triangle E\{C(B,z+1\}=E\{C(B,z+1)\}-E\{C(B,z)\}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p+c$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\left\{\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\left(z+\frac{1}{2}\right)\sum_{b=z+1}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}\right\}\qquad(2.25)$$

$$\triangle^2 E\{C(B,z)\}=\triangle E\{C(B,z)\}-\triangle E\{C(B,z-1)\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\left\{\frac{\phi(z-1)}{2(z-1)}+\sum_{b=z}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}\right\}\qquad(2.26)$$

となる。式(1.4)より $z$ の最適値 $z^*$ は式(2.9)をみたさなければならない。

ケース 2．i) $b \le x$, $t < t_1 < t_2$, ii) $x < b < z$, $t/m < t_1 < t < t_2$, iii) $b > z$, $t/m < t_1 < t_2 < t$

この場合は，(i)，(iii)，(v)（図 4，(i)，(iii)，(v) を参照）より

$$
\begin{aligned}
E\{C(B,z\} &= c(z-x) + h\sum_{b=0}^{\infty} I_1(b,z)\phi(b) + p\sum_{b=0}^{\infty} I_2(b,z)\phi(b) \\
&= c(z-x) + h\left\{\sum_{b=0}^{x}\left(\frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z + \left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{b}{2}\right)\phi(b)\right. \\
&\quad + \sum_{b=x+1}^{z}\left(\frac{x}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)z + \left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{b}{2}\right)\phi(b) \\
&\quad \left. + \sum_{b=z+1}^{\infty}\left(\frac{x}{m} + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2b}\right)\phi(b)\right\} \\
&\quad + p\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(-z+\frac{b}{2}+\frac{z^2}{2b}\right)\phi(b) \\
&= c(z-x) + \frac{hx}{m} + \left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h + \left(\frac{1}{n}-1\right)p\right)z + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)p\sum_{b=0}^{\infty} b\phi(b) \\
&\quad + \left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\frac{z^2}{2}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b} + \left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)z\sum_{b=0}^{z}\phi(b) \\
&\quad + \left(\frac{1}{n}-1\right)(h+p)\frac{z^2}{2}\sum_{b=0}^{z}\frac{\phi(b)}{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z} b\phi(b)
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

となる。したがって第 1 次差分，第 2 次差分を計算すると，式(2.24)～式(2.26)とまったく同じ式が得られる。よって式(1.4)より $z$ の最適値 $z^*$ は式(2.9)をみたさなければならない。異なるのは $E\{C(B, z)\}$ だけであることに注意しよう。つまり，各モデルの差は決定変数 $z$ に関係しない値の差である。

ケース 3．i) $b \le x$, $t < t_1 < t_2$, ii) $x < b < z$, $t_1 < t/m < t < t_2$, iii) $b \ge z$, $t_1 < t_2 < t/m < t$

この場合は，(i)，(ii)，(vi)（図 4，(i)，(ii)，(vi) を参照）より

$$E\{C(B,z)\}=c(z-x)+h\left\{\sum_{b=0}^{x}\left(\frac{x}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)b\right)\phi(b)+\left(1-\frac{1}{m}\right)z\sum_{b=0}^{z}\phi(b)\right.$$
$$+\sum_{b=x+1}^{z}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right)b\phi(b)$$
$$\left.+\sum_{b=x+1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}\right)\phi(b)\right\}$$
$$+p\left\{\sum_{b=x+1}^{z}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2(n-1)}\phi(b)\right.$$
$$+\sum_{b=x+1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}\right)\phi(b)$$
$$\left.+\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)z\right)\phi(b)\right\} \tag{2.28}$$

となる。したがって

$$E\{C(B,z-1)\}=c(z-1-x)+h\left\{\sum_{b=0}^{x}\left(\frac{x}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)b\right)\phi(b)\right.$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)(z-1)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)$$
$$+\sum_{b=x+1}^{z-1}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right)b\phi(b)$$
$$\left.+\sum_{b=x+1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}\right)\phi(b)\right\}$$
$$+p\left\{\sum_{b=x+1}^{z-1}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2(n-1)}\phi(b)\right.$$
$$+\sum_{b=x+1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2b}\right)\phi(b)$$
$$\left.+\sum_{b=z}^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{b}{2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)(z-1)\right)\phi(b)\right\}$$
$$=E\{C(B,z)\}-c+\left(1-\frac{1}{m}\right)p-\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)$$

$$-\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{m}\right)-1\right)\right\}hz\phi(z)$$

$$-\left\{\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+1-\frac{1}{m}\right\}pz\phi(z)$$

$$=E\{C(B,z)\}-c+\left(1-\frac{1}{m}\right)p-\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)$$

$$-\left(1-\frac{1}{m}\right)^2\frac{n(h+p)z\phi(z)}{2(n-1)} \tag{2.29}$$

となり，最適条件の必要条件式(1.4)より

$$\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{nz\phi(z)}{2(n-1)}\le\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)} \tag{2.30}$$

となる。$\varDelta E\{C(B,z+1)\}$ についての同様な計算および式(1.16)を用いて，

$$\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{n(z+1)\phi(z+1)}{2(n-1)}\ge\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)} \tag{2.31}$$

となる。$E\{C(B,z)\}$ を最小にする $z$ の値 $z^*$ は

$$\sum_{b=0}^{z^*-1}\phi(b)+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{nz^*\phi(z^*)}{2(n-1)}\le\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)}$$

$$\le\sum_{b=0}^{z^*}\phi(b)+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{n(z^*+1)\phi(z^*+1)}{2(n-1)} \tag{2.32}$$

をみたす。第 2 次差分 $\varDelta^2E\{C(B,z)\}$ を計算すると，

$$\varDelta^2E\{C(B,z)\}=\varDelta E\{C(B,z)\}-\varDelta E\{C(B,z-1)\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)\phi(z-1)$$

$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)^2\frac{n(h+p)}{2(n-1)}\left(z\phi(z)-(z-1)\phi(z-1)\right) \tag{2.33}$$

となり，$\varDelta^2 E\{C(B,z)\} \geq 0$ は不明である。

ケース4．i）$b \leq x$, $t < t_1 < t_2$，ii）$x < b < z$, $t_1 < t/m < t < t_2$，iii）$b \geq z$, $t/m < t_1 < t_2 < t$

ケース5．i）$b \leq x$, $t < t_1 < t_2$，ii）$x < b < z$, $t/m < t_1 < t < t_2$，iii）$b \geq z$, $t_1 < t/m < t_2 < t$

ケース6．i）$b \leq x$, $t < t_1 < t_2$，ii）$x < b < z$, $t/m < t_1 < t < t_2$，iii）$b \geq z$, $t_1 < t_2 < t/m < t$

はおこらない。

## 3.　一般的需要の購入・販売在庫モデル

1. における需要形態は突発需要で，それが $t/n$ 時点に発生し，発注は $t/m$ 時点に即時的に入荷する例になっており，2. のそれは $t/n$ 時点から $t$ まで一様に需要が発生する場合である。ここでは発注は 1. および 2. と同様に $t/m$ 時点に即時的に入荷するが，需要形態としては 1. および 2. を特殊な場合として含む一般的かつ総合的需要形態を表すモデルとして，

$g(b, T/t)$

を用いることにする。ここに

$b$：期間 $t$ における需要量

$t$：1期間の長さ

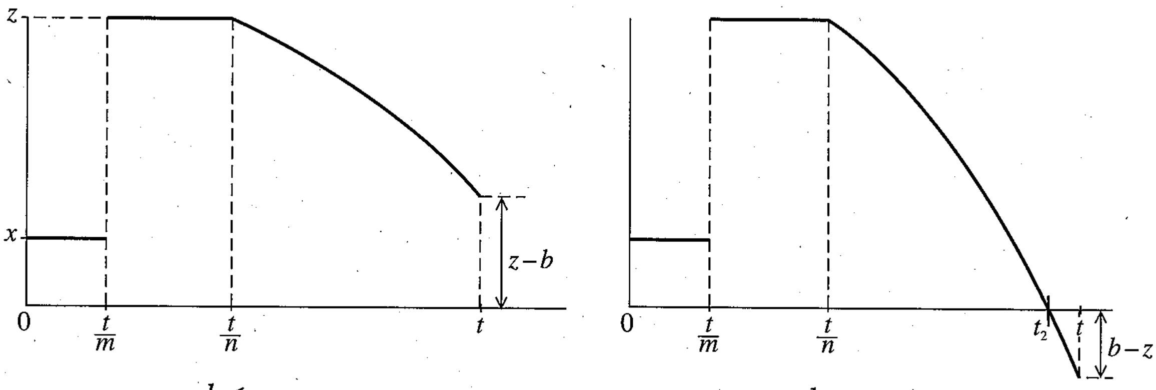
$g(b, T/t)$：時点 $T(T \leqq t)$ における需要量

$g(b, x)$：$g(b,x)=0$, $0 \leq x \leq t/n$, $g(0,x)=0$, $g(b,1)=b$ となる $x$ の微分可能な単調増加関数

そこでわれわれの目的は，$g(b, x)$ を需要形態を表す1つの統一モデルとして使用し，そのときの最適条件を求め，1. および 2. のモデルが特殊な場合として含まれることを示す。この点を除き他の仮定や記号は 1. および 2. の場合と全く同じとする。

需要量 $B$ は仮定によって確定的でない。このため在庫量 $z, x$ と需要量 $B$ の実現値 $b$ の大小関係は確率的であり，その大小関係および $m$ と $n$ の大

図 5　在庫状態




小関係に応じて在庫状態は図 5 および図 6 のようになる。

時点 $T$ における在庫量を $Q(T)$ とすると

$$Q(T)=\begin{cases} x, & 0 \leq T < t/m \\ z, & t/m \leq T \leq t/n \\ z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t), & t/n \leq T \leq t \end{cases} \qquad (3.1)$$

$t/n \leq T \leq t$ における在庫量が上式で与えられることは，つぎのようにして示される。$T/t$ の関数 $a-g(b,cT/t)$ が $T=t$ で $z-b$，$T=t/n$ で $z$ となるように $a$，$c$ をきめる。$a-g(b,c)=z-b$，$a-g(b,c/n)=z$ より $g(b,c)-g(b,c/n)=b$ この式をみたす $c$ の値を $g^{-1}(b,n)$ で表す（$c>1$ で存在することは $g(b,x)$ の仮定より明らか，$n \to \infty$ のとき，$c=g^{-1}(b,\infty)=1$）よって $a=z-b+g(b,g^{-1}(b,n))=z+g(b,g^{-1}(b,n)/n)$ となる。よって $t/n \leq T < t$ において，$Q(T)=a-g(b,cT/t)=z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)$ となる。

つぎに $I_1(b,z)$，$I_2(b,z)$ および $E\{C(B,z)\}$ を求める。

(1)　$\boldsymbol{m > n}$

期平均在庫量 $I_1(b,z)$ および期平均在庫不足量 $I_2(b,z)$ は図 5 より

(i)　$b \leqq z$ の場合

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\frac{t}{m}+z\left(\frac{t}{n}-\frac{t}{m}\right)+\int_{t/n}^{t}\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right.\right.$$

$$-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\Big)dT$$

$$=\frac{x}{m}+z\left(1-\frac{1}{m}\right)+(g(b,g^{-1}(b,n))-b)\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)) \tag{3.2}$$

ここに，

$$G(b,u)=\int_0^u g(b,v)dv \tag{3.3}$$

$$I_2(b,z)=0 \tag{3.4}$$

(ii)　$0\leq z<b$ の場合

図5において

$$z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)=0,\ {t}/{n}\leq T\leq t \tag{3.5}$$

は唯一の ${t}/{n}<t_2\leq t$ なる根 $t_2$ をもつ（$\because z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)/n)=z$, $z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n))=z-b$，また，仮定より $g(b,g^{-1}(b,n)T/t)$ は $T$ の単調増加関数であることより明らか）この値 ${t_2}/{t}$ を

$$\frac{t_2}{t}=g_2^{-1}(b,z,n)$$

とおく。この ${t_2}/{t}$ を用いて

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{m}+\left(\frac{t}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\int_{t/n}^{t_2}(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\left.-g(b,g^{-1}(b,n)T/t))dT\right\}$$

$$=\frac{x}{m}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{t_2}{t}-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\int_{g^{-1}(b,n)/n}^{t_2g^{-1}(b,n)/t}g(b,\ell)d\ell$$

$$=\frac{x}{m}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z+\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b,g_1^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right\} \tag{3.6}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\int_{t_2}^{t}\left\{g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right\}dT$$

$$=\left\{b-z-g(b,g^{-1}(b,n))\right\}\left(1-\frac{t_2}{t}\right)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b,g^{-1}(b,n))-G\left(b,\frac{t_2}{t}g^{-1}(b,n)\right)\right\}$$

$$=\left\{b-z-g(b,g^{-1}(b,n))\right\}\left\{1-g_2^{-1}(b,z,n)\right\}$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right\} \tag{3.7}$$

需要量が離散的であるから，期待総費用 $E\{C(B,z)\}$ は

$$E\{C(B,z)\}=c(z-x)+h\sum_{b=0}^{\infty}I_1(b,z)\phi(b)+p\sum_{b=0}^{\infty}I_2(b,z)\phi(b)$$

$$=c(z-x)+h\left\{\sum_{b=0}^{z}\left(\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\right\}\phi(b)\right.$$

$$+h\left\{\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(\frac{x}{m}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)z\right.\right.$$

$$+\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$\left.\left.-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)\right)-G\left(b,g^{-1}(b,n)/n\right)\right)\right\}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{\left(b-z-g(b,g^{-1}(b,n))\right)(1-g_2^{-1}(b,z,n))\right.$$

$$\left.+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right)\right\}\phi(b)$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+h\sum_{b=0}^{\infty}\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=0}^{\infty}\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)$$

$$+\left(\frac{h}{n}+p\right)\sum_{b=0}^{\infty}\left(b-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\phi(b)$$

$$+(h+p)\sum_{b=0}^{z}\left\{z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)$$

$$+(h+p)\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b) \tag{3.8}$$

となる。また，

$$E\{C(B,z+1)\}=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)(z+1)+h\sum_{b=0}^{\infty}\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=0}^{\infty}\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)$$

$$+\left(\frac{h}{n}+p\right)\sum_{b=0}^{\infty}(b-g(b,g^{-1}(b,n))\phi(b)$$

$$+(h+p)\sum_{b=0}^{z+1}\left\{z+1-b+g(b,g^{-1}(b,n))-\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)$$

$$+(h+p)\sum_{b=z+2}^{\infty}\left\{(z+1-b+g(b,g^{-1}(b,n))g_2^{-1}(b,z+1,n)-\frac{G(b,g_2^{-1}(b,z+1,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+h\sum_{b=0}^{\infty}\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=0}^{\infty}\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)$$

$$+\left(\frac{h}{n}+p\right)\sum_{b=0}^{\infty}\left(b-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\phi(b)$$

$$+(h+p)\sum_{b=0}^{z}\left\{z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)$$

$$+(h+p)\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{\left(z+1-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)g_2^{-1}(b,z+1,n)\right.$$

$$\left.-\frac{G(b,g_2^{-1}(b,z+1,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)$$

$$+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)+(h+p)\sum_{b=0}^{z}\phi(b) \tag{3.9}$$

$$(\because g_2^{-1}(z+1,\ z+1,\ n)=1$$

となるから，

$$\triangle E\{C(B,z+1)\}=E\{C(B,z+1)\}-E\{C(B,z)\}$$

$$=\left(c-\frac{h}{m}-p\right)+(h+p)\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+(h+p)\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{g_2^{-1}(b,z+1,n)\right.$$

$$+(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\,(g_2^{-1}(b,z+1,n)-g_2^{-1}(b,z,n))$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_2^{-1}(b,z+1,n)g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\left.\left.-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right)\right\} \tag{3.10}$$

$$\triangle E\{C(B,z)\}=E\{C(B,z)\}-E\{C(B,z-1)\}$$

$$=\left(c-\frac{h}{m}-p\right)+(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)$$

$$+(h+p)\sum_{b=z}^{\infty}\left\{g_2^{-1}(b,z,n)+(z-1-b+g(b,g^{-1}(b,n))\,(g_2^{-1}(b,z,n)\right.$$

$$-g_2^{-1}(b,z-1,n))-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\left.\left.-G(b,g_2^{-1}(b,z-1,n)g^{-1}(b,n))\right)\right\}\phi(b) \tag{3.11}$$

したがって最適性の必要条件より，$E\{C(B, z)\}$ を最小にする $z$ の値 $z^*$ は

$$\sum_{b=0}^{z^*-1}\phi(b)+\sum_{b=z}^{\infty}\left\{g_2^{-1}(b,z,n)+\left(z-1-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)(g_2^{-1}(b,z,n)-g_2^{-1}(b,z-1,n))\right.$$

$$\left.-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z-1,n)g^{-1}(b,n))\right)\right\}\phi(b)$$

$$\leq\frac{p+\dfrac{h}{m}-c}{(h+p)}\leq\sum_{b=0}^{z^*}\phi(b)+\sum_{b=z^*+1}^{\infty}\left\{g_2^{-1}(b,z^*+1,n)\right.$$

$$+\left(z^*-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_2^{-1}(b,z+1,n)-g_2^{-1}(b,z^*,n)\right)$$

$$\left.-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_2^{-1}(b,z+1,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right)\right\}\phi(b) \tag{3.12}$$

をみたさなければならない。

ここで，$n\to\infty$（したがって $m\to\infty$）とおくと，

$$g^{-1}(b,\infty)=1,\ g_2^{-1}(b,z,\infty)=g^{-1}(b,z),\ g(b,g^{-1}(b,\infty)=g(b,1)=b$$

となり，上式は

$$\sum_{b=0}^{z^*-1}\phi(b)+\sum_{b=z^*}^{\infty}\left\{\left[z^*g^{-1}(b,z^*)-G(b,g^{-1}(b,z^*))\right]-\left[(z^*-1)g^{-1}(b,z^*-1)\right.\right.$$

$$\left.\left.-G(b,g^{-1}(b,z^*-1))\right]\right\}\phi(b)$$

$$\leq\frac{p+\dfrac{h}{m}-c}{(h+p)}\leq\sum_{b=0}^{z^*}\phi(b)+\sum_{b=z^*}^{\infty}\left\{\left[(z^*+1)g^{-1}(b,z^*+1)-G(b,g^{-1}(b,z^*+1))\right]\right.$$

$$\left.-\left[z^*g^{-1}(b,z^*)-G(b,g^{-1}(b,z^*))\right]\right\}\phi(b) \tag{3.13}$$

となり，文献（20，p. 140）に一致する。

ここで

$$M(z)=\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{g_2^{-1}(b,z+1,n)\right.$$

$$+\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)(g_2^{-1}(b,z+1,n)-g_2^{-1}(b,z,n))$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_2^{-1}(b,z+1,n)g^{-1}(b,n))$$

$$\left.-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\Big)\right\}\phi(b) \tag{3.14}$$

とおくと，式(3.12)は

$$M(z^*-1)\leq\frac{p+\dfrac{h}{m}-c}{(h+p)}\leq M(z^*) \tag{3.15}$$

となる。

(2)　$\boldsymbol{m \leq n}$

この場合は $t_1$, $t_2$, $t$ および $t/_m$ の大小関係により在庫状態は図6のようになる。

(i)　$b\leq x<z$ の場合（図6，(i) を参照）

このときは，明らかに $t_1>t/_m$ となる。$t_1\leq t/_m$ の場合を考察する必要はない。

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/_n}^{t/_m}\Big(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n))T/t\Big)dT\right.$$

$$\left.+\int_{t/_m}^{t}\Big(z-b+g(b,g^{-1}(b,n)-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\Big)dT\right\}$$

$$=\frac{x}{m}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\Big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\Big)-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)/m)$$

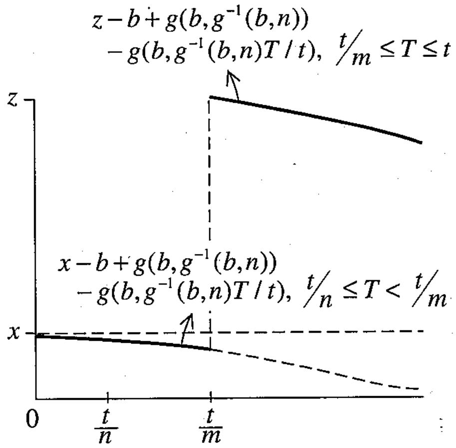
$$-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{m}\right)\Big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\Big)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\Big)$$

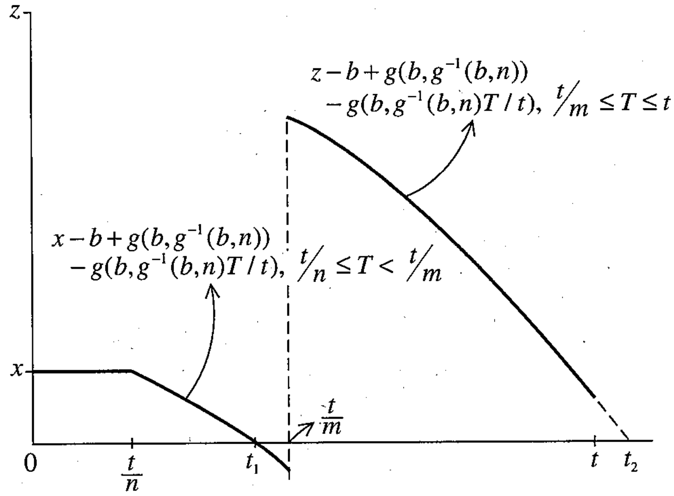
$$=\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\Big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\Big)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big) \tag{3.16}$$

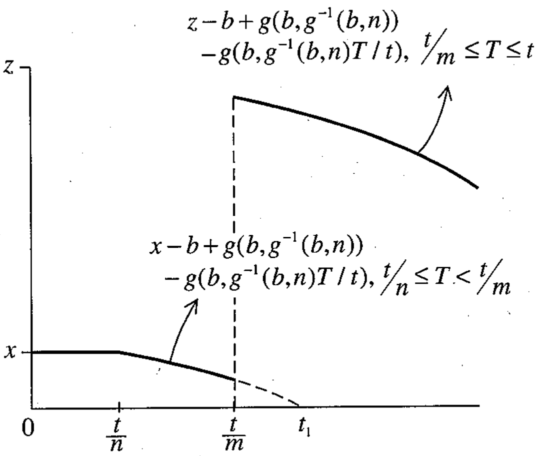
図6　在庫状態，$\boldsymbol{m \leq n}$



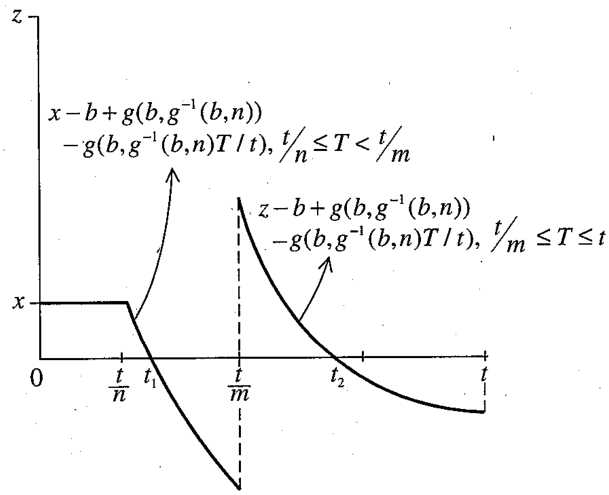

(i)　$b<x<z,\ t/m<t_1<t_2$ の場合



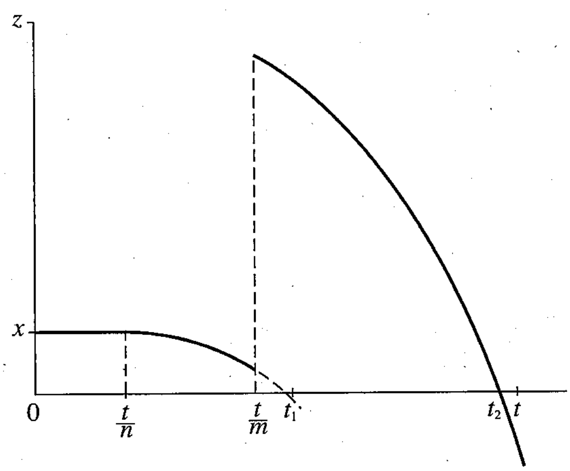

(ii)　$x<b<z,\ t_1<t/m<t<t_2$ の場合



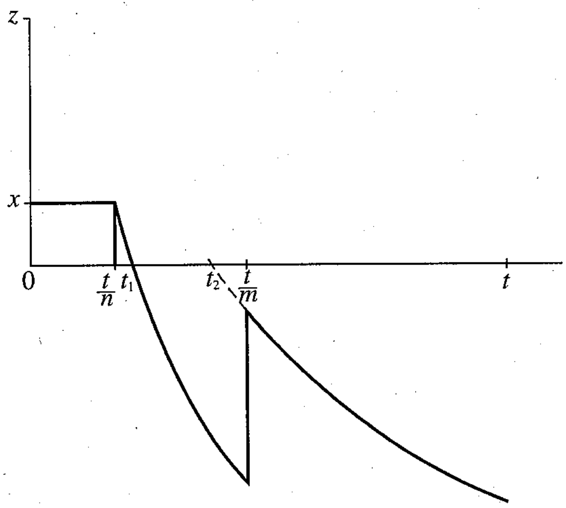

(iii)　$x<b<z,\ t/m<t_1<t<t_2$ の場合




(iv)　$b>z,\ t_1<t/m<t_2<t$ の場合




(v) $b \geq z,\ t/m<t_1<t_2<t$ の場合




(vi)　$b \geq z,\ t_1<t_2<t/m<t$ の場合

$$I_2(b,z)=0 \tag{3.17}$$

(ii)　$x<b<z,\ t_1 \le t/m$　$(<t<t_2)$の場合

$x<b<z$ のときは，$t_1<t/m$ と $t_1 \ge t/m$ に分けて検討する必要がある。

$$\begin{aligned}
I_1(b,z)=&\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t_1}\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right.\\
&\left.+\int_{t/m}^{t}\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right\}\\
=&\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{t_1}{t}-\frac{1}{n}\right)\\
&-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)\right.\\
&\left.-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)+(z-b+g(b,g^{-1}(b,n)))\left(1-\frac{1}{m}\right)\\
&-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right)\\
=&xg_1^{-1}(b,x,n)+\left(1-\frac{1}{m}\right)z\\
&+\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\left(1-\frac{1}{m}+g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\right)\\
&-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right.\\
&\left.+G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ここに，$t_1/t$ の値は

$$x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)=0,\quad t/n \le T < t/m \tag{3.19}$$

をみたす唯一の根で $g_1^{-1}(b,x,n)$ とおく。

$$\begin{aligned}
I_2(b,z)=&\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t/m}\left(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-x\right)dT\right\}\\
=&\left(b-x-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)/m)-G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))\right) \tag{3.20}$$

(iii)　$x<b<z,\ {}^{t}\!/_{m}<t_1(<t)$ の場合（図 6，(iii) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t/m}\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right.$$

$$\left.+\int_{t/m}^{t}\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right\}$$

$$=\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)(g(b,g^{-1}(b,n))-b)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right) \tag{3.21}$$

$$I_2(b,z)=0 \tag{3.22}$$

(iv)　$b>z,\ t_1<{}^{t}\!/_{m}<t_2<t$ の場合（図 6，(iv) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t_1}\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right.$$

$$+\int_{t/m}^{t_2}\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n))T/t\right)dT$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,x)\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$+\left(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{m}\right)$$

$$-\int_{g^{-1}(b,n)/n}^{g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n)}g(b,\ell)\frac{d\ell}{g^{-1}(b,n)}$$

$$-\int_{g^{-1}(b,n)/m}^{g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)}g(b,\ell)\frac{d\ell}{g^{-1}(b,n)}$$

$$=-\frac{z}{m}+xg_1^{-1}(b,x,n)+zg_2^{-1}(b,z,n)$$

$$+\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}+g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{m}\right)$$

$$-\left\{G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right.$$

$$+G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\Big\}\frac{1}{g^{-1}(b,n)} \quad (3.23)$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t/m}(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-x)\phi(b)db\right.$$

$$\left.+\int_{t_2}^{t}(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z)\phi(b)db\right\}$$

$$=\left\{-\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)x-(1-g_2^{-1}(b,x,n))z+(b-g(b,g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\bullet\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)+1-g_2^{-1}(b,z,n)\right)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big\{G(b,g^{-1}(b,n)/m)-G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))$$

$$\left.+G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\Big\}\right\} \quad (3.24)$$

(v)　$b>z$, ${}^{t}\!/\!_{m}<t_1<t_2<t$ の場合（図 6，(V) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t/m}\Big(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\Big)dT\right.$$

$$\left.+\int_{t/m}^{t_2}\Big(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\Big)dT\right\}$$

$$=\frac{x}{n}+\Big(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\Big)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$$

$$+\Big(z-b+g(b,g^{-1}(b,n))\Big)\left(\frac{t_2}{t}-\frac{1}{m}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(t,n)}\left\{\int_{g^{-1}(b,n)/n}^{g^{-1}(b,n)/m}g(b,\ell)d\ell+\int_{g^{-1}(b,n)/m}^{g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)}g(b,\ell)d\ell\right\}$$

$$=\frac{x}{m}-\frac{z}{m}+g_2^{-1}(b,z,n)z+\Big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\Big)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big\{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big\}$$

$$(3.25)$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_2}^{t}\left(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)dT\right\}$$

$$=\left(1-\frac{t_2}{t}\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\int_{g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)}^{g^{-1}(b,n)}g(b,\ell)d\ell$$

$$=(1-g_2^{-1}(b,z,n))\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b,g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\left.-G\left(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n)\right)\right\} \tag{3.26}$$

(vi)　$b>z,\ t_2<{}^{t}\!/_{m}$ の場合（図 6，(vi) を参照）

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\left\{x\cdot\frac{t}{n}+\int_{t/n}^{t_1}\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)T/t)\right)dT\right\}$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{t_1}{t}-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)$$

$$=\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right) \tag{3.27}$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t/m}\left(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-x\right)dT\right.$$

$$\left.+\int_{t/m}^{t}\left(g(b,g^{-1}(b,n)T/t)-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)dT\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\left\{\int_{t_1}^{t}g(b,g^{-1}(b,n)T/t)dT+\left(\frac{t}{m}-t_1\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-x\right)\right.$$

$$\left.+\left(t-\frac{t}{m}\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left\{G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))\right\}$$

$$+\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-x\right)$$

$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right) \tag{3.28}$$

したがって，次の 6 つのケースにわけて $E\{C(B,z)\}$ を求めることができる。

ケース **1**．i) $b<x\,(t<t_1<t_2)$，ii) $x<b<x$, $t_1<{}^{t}/_{m}<t<t_2$，iii) $b\geq z$, $t_1<{}^{t}/_{m}<t_2<t$

この場合は，(i)，(ii)，(iv)（図 6，(i)，(ii)，(iv) を参照）より

$$E\{C(B,z)\}=c(z-x)+h\sum_{b=0}^{\infty}I_1(b,z)\phi(b)+p\sum_{b=0}^{\infty}I_2(b,z)\phi(b)$$

$$=c(z-x)+h\sum_{b=0}^{x}\left\{\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)(g(b,g^{-1}(b,n))-b)\right.$$

$$\left.-\frac{G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)db$$

$$+h\sum_{b=x}^{z}\left\{xg_1^{-1}(b,x,n)+\left(1-\frac{1}{m}\right)z\right.$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}+g_1^{-1}(b,x,z)-\frac{1}{m}\right)(g(b,g^{-1}(b,n))-b)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right.$$

$$\left.\left.+G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right)\right\}\phi(b)db$$

$$+h\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{-\frac{z}{m}+xg_1^{-1}(b,x,n)+zg_2^{-1}(b,z,n)\right.$$

$$+(g(b,g^{-1}(b,n))-b)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}+g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{m}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right.$$

$$\left.\left.+G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\right)\right\}\phi(b)db$$

$$+p\sum_{b=x+1}^{z}\left\{\left(b-x-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)\right.$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)/m)$$

$$\left.-G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))\Big)\right\}\phi(b)db$$

$$+p\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{-\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)x-(1-g_2^{-1}(b,x,n))z\right.$$

$$+\left(b-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)+1-g_2^{-1}(b,z,n)\right)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)/m)-G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))$$

$$\left.+G(b,g^{1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\Big)\right\}\phi(b)db$$

$$=c(z-x)+h\left(1-\frac{1}{m}\right)z\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+h\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{b=0}^{z}\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\phi(b)$$

$$+h\sum_{b=0}^{z}\frac{\left\{G(b,g^{-1}(b,n)/n)-G(b,g^{-1}(b,n)\right\}}{g^{-1}(b,n)}\phi(b)$$

$$+h\sum_{b=x+1}^{\infty}\left\{xg_1^{-1}(b,x,n)+\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{m}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\Big)\right\}\phi(b)$$

$$+h\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{n}\right)+\left(g_2^{-1}(b,z,n)=\frac{1}{m}\right)z\right.$$

$$\left.-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)\right\}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=x+1}^{\infty}\left\{\left(b-x-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)/m-G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))\Big)\right\}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{\left(1-g_2^{-1}(b,z,n)\right)\left(b-z-g(b,g^{-1}(b,z))\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right)\right\}\phi(b) \qquad (3.29)$$

となる。また

$$\varDelta E\{C(B,z)\}=E\{C(B,z)\}-E\{C(B,z-1)\}$$

$$=\left(c-\frac{h}{m}-p\right)+(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)+(h+p)\left\{g_2^{-1}(b,z,n)\right.$$

$$+(z-1-b+g(b,g^{-1}(b,n))(g_2^{-1}(b,z,n)-g_2^{-1}(b,z-1,n))$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\right.$$

$$\left.\left.-G(b,g_2^{-1}(b,z-1,n)g^{-1}(b,n))\right)\right\}\phi(b) \qquad (3.30)$$

となり，$M(z)$ を式(3.14)で定義すると，$E\{C(B,z)\}$を最小にする $z$ の値 $z^*$ は式(3.15)をみたす $z^*$ の値である。

ケース 2．　i) $b<x$, $t<t_1<t_2$,　ii) $x<b<z$, $t/_m<t_1<t<t_2$,　iii) $b\geq z$, $t/_m<t_1<t_2<t$

この場合は，(i)，(iii)，(v)（図 6，(i)，(iii)，(v) を参照）より

$$E\{C(B,z)\}=c(z-x)+h\sum_{b=0}^{\infty}I_1(b,z)\phi(b)+p\sum_{b=0}^{\infty}I_2(b,z)\phi(b)$$

$$=c(z-x)+h\left\{\sum_{b=0}^{x}\left\{\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\right\}\phi(b)$$

$$+\sum_{b=x+1}^{z}\left\{\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\right.$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)\Bigg\}\phi(b)$$

$$+\sum_{b=z+1}^{\infty}\Bigg\{\frac{x}{m}-\frac{z}{m}+g_2^{-1}(b,z,n)z$$

$$+\Big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\Big)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))$$

$$-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)\Bigg\}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=z+1}^{\infty}\Bigg\{(1-g_2^{-1}(b,z,n))\Big(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\Big)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\Big)\Bigg\}\phi(b)$$

$$=c(z-x)+h\Bigg\{\sum_{b=0}^{z}\Bigg\{\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\Big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\Big)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)\Bigg\}\phi(b)$$

$$+\sum_{b=z+1}^{\infty}\Bigg\{\frac{x-z}{m}+g_2^{-1}(b,z,n)z$$

$$+\Big(g(b,g^{-1}(b,n))-b\Big)\left(g_2^{-1}(b,z,n)-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))$$

$$-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)\Bigg\}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=z+1}^{\infty}\Bigg\{(1-g_2^{-1}(b,z,n))\Big(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\Big)$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))\Big)\Bigg\}\phi(b)$$

$$=c(z-x)+\frac{h}{m}(x-z)+h\sum_{b=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\left(b-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\right.$$

$$\left.+\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)$$

$$+(h+p)\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{\left(g(b,g^{-1}(b,n))+z-b\right)g_2^{-1}(b,z,n)\right.$$

$$\left.-\frac{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)$$

$$+h\sum_{b=0}^{z}\left\{z+g(b,g^{-1}(b,n))-b-\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b)$$

$$-p\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{z+g(b,g^{-1}(b,n))-b-\frac{G(b,g^{-1}(b,n)}{g^{-1}(b,n)}\right\}\phi(b) \tag{3.31}$$

また，$\varDelta E\{C(B,z)\}$ を計算すると，式(3.30)と同じものになる。したがって $E\{C(B,z)\}$ を最小にする $z$ の値 $z^*$ は式(3.15)をみたす $z^*$ である。

ケース 3． i) $b\leq x$, $t<t_1<t_2$, ii) $x<b\leq z$, $t_1<t/m<t<t_2$, iii) $b\geq z$, $t_1<t_2<t/m<t$

この場合は，(i)，(ii)，(vi)（図 6，(i)，(ii)，(vi) を参照）より

$$E\{C(B,z)\}=c(z-x)+h\sum_{b=0}^{\infty}I_1(b,z)\phi(b)+p\sum_{b=0}^{\infty}I_2(b,z)\phi(b)$$

$$=c(z-x)+h\sum_{b=0}^{x}\left\{\frac{x}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)(g(b,g^{-1}(b,n))-b)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\left(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\right)\right\}\phi(b)$$

$$+h\sum_{b=x+1}^{z}\left\{xg_1^{-1}(b,x,n)+\left(1-\frac{1}{m}\right)z\right.$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}+g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{m}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)$$

$$+G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\Big)\Big\}\phi(b)$$

$$+h\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{\frac{x}{n}+\left(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))$$

$$\left.-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)\right\}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=x+1}^{z}\left\{\left(b-x-g(b,g^{-1}(b,n))\right)\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)\right.$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n)/m)$$

$$\left.-G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))\Big)\right\}\phi(b)$$

$$+p\sum_{b=z+1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\right)\left(-g(b\ g^{-1}(b,n))+b-x\right)\right.$$

$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(-g(b,g^{-1}(b,n))+b-z\right)$$

$$\left.+\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)g_1^{-1}(b,x,n))\Big)\right\}\phi(b)$$

$$=c(z-x)+h\left\{\frac{x}{m}\sum_{b=0}^{x}\phi(b)+\sum_{b=0}^{z}\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)z\right.\right.$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)$$

$$\left.-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g^{-1}(b,n))-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)\right\}\phi(b)$$

$$+\sum_{b=x+1}^{z}\left\{xg_1^{-1}(b,x,n)+\left(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{m}\right)\left(g(b,g^{-1}(b,n))-b\right)\right.$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))$$

$$-G(b,g^{-1}(b,n)/m)\Big)\Bigg\}\phi(b)$$

$$+\sum_{b=z+1}^{\infty}\Bigg\{\frac{x}{n}+\Big(x-b+g(b,g^{-1}(b,n))\Big)\bigg(g_1^{-1}(b,x,n)-\frac{1}{n}\bigg)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))$$

$$-G(b,g^{-1}(b,n)/n)\Big)\Bigg\}\phi(b)\Bigg\}$$

$$+p\Bigg\{\sum_{b=x+1}^{\infty}\Bigg\{\bigg(\frac{1}{m}-g_1^{-1}(b,x,n)\bigg)\Big(b-x-g(b,g^{-1}(b,n))\Big)$$

$$-\frac{1}{g^{-1}(b,n)}\Big(G(b,g_1^{-1}(b,x,n)g^{-1}(b,n))\Big)\Bigg\}\phi(b)$$

$$+\sum_{b=x+1}^{z}\Bigg\{\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/m)}{g^{-1}(b,n)}\Bigg\}\phi(b)$$

$$+\sum_{b=z+1}^{\infty}\Bigg\{\bigg(1-\frac{1}{m}\bigg)(b-z-g(b,g^{-1}(b,n))$$

$$+\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}\Bigg\}\phi(b)\Bigg\} \tag{3.32}$$

$$\varDelta E\{C(B,z)\}=E\{C(B,z)\}-E\{C(B,z-1)\}$$

$$=c-\bigg(1-\frac{1}{m}\bigg)p+\bigg(1-\frac{1}{m}\bigg)(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)$$

$$+(h+p)\Bigg\{\bigg(1-\frac{1}{m}\bigg)g(z,g^{-1}(z,n))$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(z,n)}\Big(G(z,g^{-1}(z,n)/m)-G(z,g^{-1}(z,n))\Big)\Bigg\}\phi(z)$$

$$(3.33)$$

$$\triangle E\{C(B,z+1)\} = c - \left(1-\frac{1}{m}\right)p + \left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z}\phi(b)$$

$$+(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)g(z+1, g^{-1}(z+1,n))\right.$$

$$+\frac{1}{g^{-1}(z+1,n)}\Big(G(z+1, g^{-1}(z+1,n)/m)$$

$$\left.-G(z+1, g^{-1}(z+1,n))\Big)\right\}\phi(z+1) \tag{3.34}$$

$$\triangle^2 E\{C(B,z)\} = \left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)\phi(z-1)$$

$$+(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)\Big(g(z, g^{-1}(z,n))\phi(z)\right.$$

$$-g(z-1,\ g^{-1}(z-1,n))\phi(z-1)\Big)$$

$$+\frac{\phi(z)}{g^{-1}(z,n)}\Big(G(z, g^{-1}(z,n)/m) - G(z, g^{-1}(z,n))\Big)$$

$$-\frac{\phi(z-1)}{g^{-1}(z-1,n)}\Big(G(z-1, g^{-1}(z-1,n)/m)$$

$$\left.-G(z-1, g^{-1}(z-1,n))\Big)\right\} \tag{3.35}$$

$\triangle E^2\{C(B,z)\} \geq 0$ を仮定すると，$E\{C(B,z)\}$ を最小にする $z$ の値 $z^*$ は

$$\sum_{b=0}^{z^*-1}\phi(b) + \left\{ g(z^*, g^{-1}(z^*,n))\phi(z^*)\right.$$

$$\left.+\frac{\phi(z^*)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)g^{-1}(z^*,n)}\Big(G(z^*, g^{-1}(z^*,n)/m - G(z^*, g^{-1}(z^*,n))\Big)\right\}$$

$$\le \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)p-c}{\left(1-\frac{1}{m}\right)(h+p)} \le \sum_{b=0}^{z^*}\phi(b)+\left\{g(z^*+1,g^{-1}(z^*+1,n))\phi(z^*+1)\right.$$

$$+\frac{\phi(z^*+1)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)g^{-1}(z^*+1,n)}\Big(G(z^*+1,g^{-1}(z^*+1,n)/m)$$

$$\left.-G(z^*+1,g^{-1}(z^*+1,n))\Big)\right\} \tag{3.36}$$

をみたす $z^*$ として得られる。

ケース 4． i) $b \le x, t < t_1 < t_2$， ii) $x < b < z,\ t_1 < {}^{t}\!/_{m} < t < t_2$， iii) $b \ge z$, ${}^{t}\!/_{m} < t_1 < t_2 < t$

ケース 5． i) $b \le x, t < t_1 < t_2$， ii) $x < b < z, {}^{t}\!/_{m} < t_1 < t < t_2$， iii) $b \ge z$, $t_1 < {}^{t}\!/_{m} < t_2 < t$

ケース 6． i) $b \le x, t < t_1 < t_2$， ii) $x < b < z, {}^{t}\!/_{m} < t_1 < t < t_2$， iii) $b \ge z$, $t_1 < t_2 < {}^{t}\!/_{m} < t$

はおこらない。

## 4.　一般的需要関数の特定化

3. では需要形態を表わす関数 $g\ (b,\ T/t)$ は，$T/t$ に関して微分可能な単調増加関数という条件を付しただけであった。そこでこれを若干具体的にして $b(T/t)^k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \infty;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots$ とおいていてみよう。もちろん，これが上記条件をみたすことは明らかである。このとき，

$$G(b,\ell)=\int_0^{\ell} g(b,s)ds = b\int_0^{\ell} s^k ds == \frac{b\ell^{k+1}}{k+1} \tag{4.1}$$

また,

$$g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)/n)=b \tag{4.2}$$

より

$$b(g^{-1}(b,n))^k - b(g^{-1}(b,n)/n)^k = b,\quad k \neq 0$$

よって

$$g^{-1}(b,n)=\frac{n}{(n^k-1)^{1/k}},\ k\neq 0,\ k=0\ のとき，\ g^{-1}(b,n)=1 とする。\quad (4.3)$$

$$g(b,g^{-1}(b,n))=b(g^{-1}(b,n))^k=b\frac{n^k}{n^k-1},\ k\neq 0, \qquad (4.4)$$

$$=b,\ k=0$$

となり，

$$x-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)g_1(b,x,n))$$

$$=x-b+b\frac{n^k}{n^k-1}-b\frac{n^k}{n^k-1}g_1(b,x,n)^k=0,\ k\neq 0$$

および

$$z-b+g(b,g^{-1}(b,n))-g(b,g^{-1}(b,n)g_2(b,z,n))$$

$$=z-b+b\frac{n^k}{n^k-1}-b\frac{n^k}{n^k-1}g_2(b,x,n)^k=0,\ k\neq 0$$

より，

$$g_1^{-1}(b,x,n)=\left(1-\frac{1}{n^k}\right)^{1/k}\left(\frac{x}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k}=\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\left(\frac{x}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k},\ k\neq 0 \qquad (4.5)$$

$$g_2^{-1}(b,z,n)=\left(1-\frac{1}{n^k}\right)^{1/k}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k}=\frac{(n^k-1)^{1/k}}{n}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1/k},\ k\neq 0 \qquad (4.6)$$

$$g_1^{-1}(b,x,n)=g_2^{-1}(b,z,n)=\frac{1}{n},\ k=0 \qquad (4.7)$$

となる。

また式(4.1)，(4.3)，(4.4)，(4.5)および(4.6)を用いて

$$G(b,g^{-1}(b,n)=\frac{b}{k+1}(g^{-1}(b,n)^{k+1}=\frac{b}{k+1}\left(\frac{n}{(n^k-1)^{1/k}}\right)^{k+1}$$

$$=\frac{b}{k+1}\cdot\frac{n^k}{n^k-1}\cdot\frac{n}{(n^k-1)^k},\ k\neq 0 \qquad (4.8)$$

$$\frac{G(b,g^{-1}(b,n)}{g^{-1}(b,n)}=\frac{n^k b}{(n^k-1)(k+1)},\ k\neq 0 \qquad (4.9)$$

$$G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))=\frac{b}{k+1}(g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))^{k+1}$$

$$=\frac{b}{k+1}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1+\frac{1}{k}},k\neq 0 \tag{4.10}$$

$$\frac{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}=\frac{(n^k-1)^{1/k}b}{n(k+1)}\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{1+1/k},\ k\neq 0 \tag{4.11}$$

$$G(b,g^{-1}(b,n)/n)=\frac{b}{k+1}(g^{-1}(b,n)/n)^{k+1}=\frac{b}{(k+1)(n^k-1)^{1+1/k}},\ k\neq 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}=\frac{b}{n(k+1)(n^k-1)},\ k\neq 0$$

$$\left.\begin{aligned}
&G(b,g^{-1}(b,n))=\frac{G(b,g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}=b,\ k=0,\\
&G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))=\frac{G(b,g_2^{-1}(b,z,n)g^{-1}(b,n))}{g^{-1}(b,n)}=\frac{b}{n},\ k=0\\
&G(b,g^{-1}(b,n)/n)=\frac{G(b,g^{-1}(b,n)/n)}{g^{-1}(b,n)}=\frac{b}{n},k=0
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

これらを用いて，3. の (1) $m>n$ における諸式を計算すると，つぎのようになる。重要な式番号に * 印をつけておく。

$$E\{C(B,z)\}=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+\frac{(h+p)}{n(k+1)(n^k-1)}\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)$$

$$+\left(\frac{k}{n}+p\right)\frac{1}{(1-n^k)}\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)$$

$$+(h+p)\left\{z\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\frac{(k+1-n^k)}{(n^k-1)(k+1)}\sum_{b=0}^{z}b\phi(b)\right\}$$

$$+\frac{k(h+p)(n^k-1)^{\frac{1}{k}}}{n(k+1)}\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(z+\frac{b}{n^k-1}\right)\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{\frac{1}{k}},\ k\neq 0$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+\frac{(h+p)-(k+1)(k+np)}{n(n^k-1)(k+1)}\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)$$

$$+(h+p)\left\{z\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\frac{(k+1-n^{k})}{(n^{k}-1)(k+1)}\sum_{b=0}^{z}b\phi(b)\right\}$$

$$+\frac{k(h+p)(n^{k}-1)^{\frac{1}{k}}}{n(k+1)}\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(z+\frac{b}{n^{k}-1}\right)\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^{k}-1}\right)^{\frac{1}{k}},\ k\neq 0 \tag{3.8}^{*}$$

$$E\{C(B,z)\}=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left(c-\frac{h}{m}-p\right)z+(h+p)\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)$$

$$+(h+p)\sum_{b=0}^{z}(z-b)\phi(b)+(h+p)\sum_{b=z+1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}-\frac{b}{n}\right)\phi(b),\ k=0$$

$$=\left(\frac{h}{m}-c\right)x+\left\{c+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)k+\left(\frac{1}{n}-1\right)p\right\}z$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z}(z-b)\phi(b),\ k=0 \tag{1.3}^{*}$$

$$\varDelta E\{C(B,z)\}=\left(c-\frac{h}{m}-p\right)+(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)$$

$$+\frac{k(n^{k}-1)^{\frac{1}{k}}(h+p)}{n(k+1)}\sum_{b=z}^{\infty}b\left\{\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^{k}-1}\right)^{\frac{1}{k}+1}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{z-1}{b}+\frac{1}{n^{k}-1}\right)^{\frac{1}{k}+1}\right\}\phi(b),\ k\neq 0 \tag{3.11}^{*}$$

$$\varDelta E\{C(B,z)\}=\left(c-\frac{h}{m}-p\right)+(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)+(h+p)\sum_{b=z}^{\infty}\frac{1}{n}\phi(b)$$

$$=c+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)h+\left(\frac{1}{n}-1\right)p$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b),\ k=0 \tag{1.5}^{*}$$

$$\varDelta^2 E\{C(B,z)\} = (h+p)\phi(z-1) + \frac{k(n^k-1)^{\frac{1}{k}}(k+p)}{n(k+1)} \sum_{b=z}^{\infty} b\left\{\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{\frac{1}{k}+1}\right.$$

$$\left. -2\left(\frac{z-1}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{\frac{1}{k}+1} + \left(\frac{z-2}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{\frac{1}{k}+1}\right\}$$

$$-(z-1)\left\{\left(1+\frac{1}{n^k-1}\right)^{\frac{1}{k}+1} - \left(\frac{z-2}{z-1}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{\frac{1}{k}+1}\right\}\phi(z-1), \quad k \neq 0 \tag{4.14*}$$

$$\varDelta^2 E\{C(B,z)\} = \left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\phi(z+1), \ k=0 \tag{1.5*}$$

$$\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b) + \frac{k(n^k-1)^{\frac{1}{k}}}{n(k+1)} \sum_{b=z}^{\infty} b\left\{\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{\frac{1}{k}+1}\right.$$

$$\left. -\left(\frac{z-1}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{\frac{1}{k}+1}\right\}\phi(b)$$

$$\leq \frac{\frac{h}{m}+p-c}{h+p} \leq \sum_{b=0}^{z}\phi(b) + \frac{h(n^k-1)^{\frac{1}{k}}}{n(k+1)} \sum_{b=z+1}^{\infty} b\left\{\left(\frac{z+1}{b}+\frac{1}{n^k+1}\right)^{\frac{1}{k}+1}\right.$$

$$\left. -\left(\frac{z}{b}+\frac{1}{n^k-1}\right)^{\frac{1}{k}+1}\right\}\phi(b) \tag{3.12*}$$

式(3.8)*，(3.11)*，(4.14)，(3.12)* において $k=1$ とおくと，それぞれ式(2.5)，(2.6)，(2.8)，(2.9)に一致する。$m \leq n$ の場合についても類似の結果が得られるが省略する。

## む す び

発注時点，需要の払い出し始点および需要形態の確率的在庫モデルへの

影響について，一期間モデルに限定して検討した。多期間モデルの検討は今後の課題である。

付記．本論文は2001年度広島修道大学総合研究所調査研究費（研究課題「動的計画法の理論的・応用的研究」）による研究成果の一部である。

## 参 考 文 献


[1] Kabak, I. W.: "Partial Returns in the Single Period Inventory Model," IE News. **19**(2), 1984, pp.1–3.

[2] Bellman, R: *Dynamic Programming*, Princetion, N. J., Princetion Univ. Press, 1957.

[3] 兒玉正憲：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅰ）」経済学研究，Vol. **55**, No. 6，九州大学経済学会，1990，pp. 31–48.

[4] 兒玉正憲：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル（Ⅱ）」経済学研究，Vol. **56**, No. 1・2, 九州大学経済学会，1990，pp. 277–293.

[5] 兒玉正憲：「返却および追加注文を許す多期間確率的在庫モデル」経済学研究，Vol. **56**, No. 4，九州大学経済学会，1991，pp. 1–26.

[6] 兒玉正憲：「ある非凸期待費用関数の最適政策（Ⅰ）」経済学研究，Vol. **57**, No. 2，九州大学経済学会，1991，pp. 1–26.

[7] 兒玉正憲：「ある非凸期待費用関数の最適政策（Ⅱ）」経済学研究，Vol. **57**, No. 3・4，九州大学経済学会，1991，pp. 175–198.

[8] 兒玉正憲：「ある確率的システムの最適政策（Ⅰ）」経済学研究，Vol. **58**，No. 2，九州大学経済学会，1992，pp. 35–50.

[9] 兒玉正憲：「ある確率的システムの最適政策（Ⅱ）」経済学研究，Vol. **58**，No. 3，九州大学経済学会，1993，pp. 17–27.

[10] Kodama, M.: "Some Probabilistic Inventory Problems with Various Demmand Pattern", Journal of Information & Optimization Science, Vol. **17**, No. 1, 1996, pp. 17–48.

[11] 兒玉正憲：「区分的費用関数をもと動的在庫モデル（Ⅰ）」経済科学研究，第１巻第１・２合併号，広島修道大学経済科学会，1998，pp. 99–122.

[12] 兒玉正憲：「区分的費用関数をもつ動的在庫モデル（Ⅱ）」経済科学研究，第２巻第１号，広島修道大学経済科学会，1998，pp. 33–60.

[13] 兒玉正憲，北原貞輔：「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究．**47**(5-6)，九州大学経済学会，1983，pp. 49–72.

[14] 兒玉正憲，坂口通則：「区分的費用関数をもつ動的在庫モデルの最適政策

（Ⅰ）」経済科学研究，第 2 巻第 2 号，広島修道大学経済科学会，1999，pp. 143–150.

[15] 兒玉正憲，坂口通則：「区分的費用関数をもつ動的在庫モデルの最適政策（Ⅱ）」経済科学研究，第 3 巻第 1 号，広島修道大学経済科学会，1999，pp. 95–136.

[16] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Some comments on the probabilistic dynamic inventory problems with piecewise cost functions", to appear, Narosa New Delhi.

[17] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Stochastic inventory models with piecewise cost functions", to appear, Narosa New Delhi.

[18] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "Probalilistic analysis of dynamic inventory models with general demand pattern, Journal of Information & Optimization Sciences, Vol. **22**, No.1, 2001, pp. 57–72.

[19] Kodama, M. and Sakaguchi, M.: "On the dynamic programming on the probabilistic inventory models with multiple piecewise cost functions", to apper in Journal of Information & Optimization Sciences.

[20] 兒玉正憲：「生産・在庫管理システムの基礎」九州大学出版会，1996.

[21] 兒玉正憲，坂口通則：「区分的費用関数をもつ確率的在庫モデルの研究」広島修道大学研究叢書，2002.

[22] Monks, J. G.: *Operations Management. Theory and Problem*, McGraw Hill, 1977.

[23] Naddor, E.: *Inventory System*, John Wiley, 1966.

[24] Scharf, H. E., D. M. Gilford, and M. W. Shelly: *Multistage Inventory Models and Techniques*, Stanford, Calif, Stanford Univ. Press, 1963.

[25] 徂徠三十六，有薗育生，大田　宏：「返却および追加注文を許す一期間モデルの解法」日本経営工学会誌 **37**(2), 1986, pp. 100–105.