環境資産を含む国民所得概念の理論的基礎

時　政　勗

（受付　2002年10月10日）

第1節　ヒックス的国民所得概念

1.1　導　　入

最近幾つかの国で，グリーン基準に基づいて国民所得を再計算する動きがみられる。国民所得から正，負の環境サービスの価値を加除することが行われる。しかし，これらの研究は，データの制約から，少数の環境資産のみしか考慮していないので，重要性を過小評価しているといわれる。どの範囲までを考慮に入れるべきであろうか。これを理解するには，環境基準を考慮に入れた，国民所得概念の理論的な全体像を把握しておくことが望ましい。そこで第1節と第2節で動学的な資源依存的経済において，国民所得を測定する2つの異なるアプローチについてHeal［3］に従いながら概観する。

現在の国民所得勘定の慣習は，環境問題を取り扱うには不十分であるということは一般的に認められている。国民所得勘定に関する現在のフレームワークは，ケインズ的マクロ経済学への統計的枠組みを与えることを目的に，1940，50年代に発展した。しかし，そこでは自然環境は付属項目であった。すなわちサテライト勘定という位置づけしか与えられず環境資産の社会への寄与はその枠組みの中では，中心的概念とならない。

1.2　国民所得の2つの概念

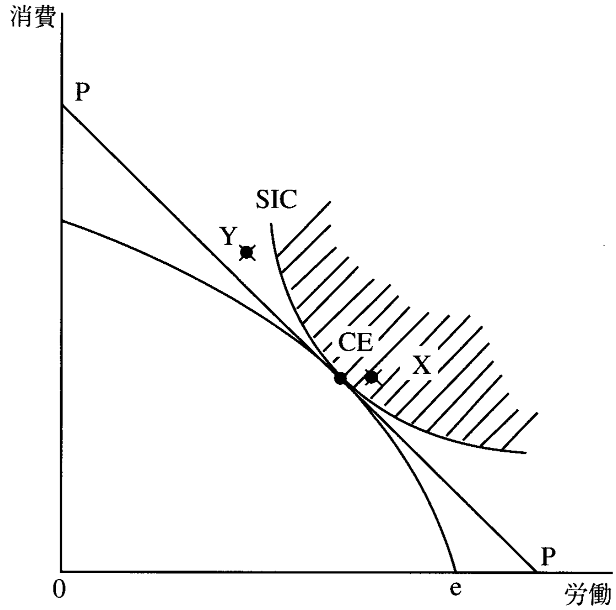
国民所得という語が用いられる2種類の方法がある。一つはヒックスに帰せられる所得概念である。ヒックス[1]は「第3の所得は，それによってある個人が今週を過ごすことができ，かつその後の各週に，同額を支出することができると期待する最大金額として定義されねばならない」と述べた。これは資本を一定額に維持することが可能な最大の消費として言いかえられる。ヒックスはさらに，「実質額で一定である標準的な所得の流れ」という概念を導入する。「個人の実際の期待所得と同一の現在価値を持つ，標準的な所得の流れを得るとしたら，その個人はいくら受け取るか。この金額が彼の所得である」という。

ここで所得は，個人の実際の将来受取額と同一の現在価値を生むであろう一定の支出金額

1）　J. R. ヒックス『価値と資本』（安井琢磨，熊谷尚夫訳）260ページ

として定義される。ヒール（G. Heal）はこの概念をヒックス的所得の定義と呼んでいる。この定義は，動学的であるという利点を持つ。国民所得のこの解釈を初めて定式化したのはワイツマン Weitzman［7］であった。

国民所得のもう一つの利用は伝統的な厚生経済学においてなされる。そこでは福祉的含意を持つ指数を構成する試みがなされてきた。図を用いて説明する。



図－1

図－1は労働と消費の2財をもつ経済を示す。労働は生産関数（今の場合，点eから左上方に曲がる曲線）にしたがって消費へ変換される。経済の賦存量はもっぱら労働であり，e点で示される。変換曲線は，経済に利用できる労働と消費の組み合わせを示す変換フロンティアである。

点CEは競争均衡であり，SICは社会的無差別曲線（Social Indifference Curve），ppは実行可能集合と社会的無差別曲線で限られる集合を分離する超平面である。この平面への法線が，均衡価格ベクトルを表し，国民所得はこの価格の下での均衡消費の値として定義される。それは分離超平面と両軸との切片に現れる2)。

ところで，これは局所的な厚生という意味を持つ。すなわち，ppで定義される価格において，正の価値を持つCEから任意の小さな移動（X点への移動）は，経済をCEを通る社会的無差別曲線より上の経済に移す。

2) CE点の座標を（a, b）としX点の座標を（x_1, x_2）とする。XとCE点の差を（x_1-a, x_2-b）としたときpp平面の上側の半空間は，（p_1, p_2）と（x_1-a, x_2-b）の内積が正だから $p_1x_1+p_2x_2>p_1a+p_2b$ と表せる。よってこの等号の式が超平面の方程式となり，縦軸切片が，$(p_1a+p_2b)/p_2$ となる。この分子が国民所得に対応する。

しかし，大きな移動にとってはそうはならない（図のY点はより低い社会的無差別曲線上へ移動となる)。ところでこの解釈において国民所得の大きさ自体に意味はない。価格はどのような変化が厚生を改善するかを決める方法を与えることにある。なぜなら，ある変化が改善であるための必要条件は，その変化が国民所得を増大させることであるということのために，国民所得が意味を持つのである。

図－1の状況を一般化すれば，国民所得を均衡価格で評価した均衡消費の価値と定義することになる。それは経済の小さい変化が厚生へ与える影響のテストに関係する。この意味での国民所得の解釈を，ヒールは国民福祉的解釈と定義している。

経済学者の間で，国民の幸福の指標としての国民所得概念のもつ限界について，昔からよく指摘されている。特に環境問題に関して欠陥が明らかにされた。上述したように国民所得は国民の幸福のせいぜい局所的測度である。局所的という用語で，我々は国民所得の増加となる経済の小さな変化が，福祉の改善であると解釈されうるということを意味する。経済の大きな変化については，同じことは成立しない。図－1で見るとXとYを通る直線は国民所得を同額（同じ縦軸切片）与えるかもしれないがXの方が右上の無差別曲線上にあり改善となる。国民所得は「真」の国民所得の測度に対する一次近似にすぎない。

本論文で我々は国民所得に対する2つのアプローチ，ヒックス的所得と国民福祉について検討する。動学的最適化問題のハミルトニアンを，国民所得のヒックス的解釈に結びつける多くの文献がある。特にハミルトニアンの線型近似は，所得のヒックス的定義に関連させられることが示される。

1.3　一般モデル

最初に資源の動学的最適利用についての定式化を考える。$c_t \in R^m$ を時間 t に消費される財のフローベクトル，$s_t \in R^n$ を時間 t におけるストックベクトルとする。各ストック $s_{i,t}$，$i=1, \cdots n$ は，あらゆるストックやフローの値に依存するやり方で時間の変化とともに変化する。

$$\dot{s}_{i,t} = d_i(c_t, s_t) \quad i=1,\cdots n \tag{1.1}$$

経済の目的は（1.1）の制約の下で，次の効用の割引積分を最大化することである。

$$\max \int_0^\infty u(c_t, s_t)\, e^{-\delta t} dt \tag{1.2}$$

効用関数 u は強意凹，ストック再生関数 $d_i(c_t, s_t)$ は凹と仮定される。

この問題を解くために次の形のハミルトニアンを構成する。

$$H_t = u(c_t, s_t)\, e^{-\delta t} + \sum_i \lambda_{i,t} e^{-\delta t} \cdot d_i(c_t, s_t) \tag{1.3}$$

ここで $\lambda_{i,t}$ はストックのシャドープライス。最適性の一次条件は次のようにまとめられる。

$\partial H / \partial c_i = 0$ より

$$\partial u(c_t, s_t) / \partial c_j = -\sum \lambda_{i,t}[\partial d_i(c_t, s_t) / \partial c_j] \tag{1.4}$$

さらに，$\dot{\lambda}_{i,t} - \delta\lambda_{i,t} = -\partial e^{\delta t} H / \partial s_i$

$$= -[\partial u(c_t, s_t) / \partial s_i] - \sum_k \lambda_{k,t}[\partial d_k(c_t, s_t) / \partial s_i] \tag{1.5}$$

1.4 ヒックス的所得とハミルトニアン

一定割引率

ここでハミルトニアンとヒックス的国民所得の関係を確立しておく。日付 t におけるハミルトニアン（日付ゼロに割り引きされたものでないもの）は，日付 t 以降最適経路に沿った場合に得られる割引効用積分と，同一価値を与えるであろう。

（c_t*，s_t*）を制約（1.1）の下で（1.2）を最大化する問題の解とする。

CH_t でこの問題の（時間ゼロにまで割り引かれない）ハミルトニアンとする。CH_t は経常価値ハミルトニアン（Current Value Hamiltonian）の意である。以下の命題が成立する。

命題 1

任意の日付 t に対し

$$\int_t^\infty CH_t(c_t*, s_t*)\, e^{-\delta(\tau-t)} d\tau$$

$$= \int_t^\infty u(c_\tau*, s_\tau*)\, e^{-\delta(\tau-t)} d\tau$$

日付 t で評価したハミルトニアンと等しい一定値の t 時点から ∞ までの割引現在価値の和は，（1.1）の下で（1.2）を最大化する問題の解に関連する日付 t から ∞ までの割引効用積分と，同一値を持つ。

(証明)

変数 W_t を導入する。これはもし t から ∞ まで維持されるなら，最適経路 $(c_t*, s_t*)_{t,\infty}$ の与える割引効用積分と同じ値を持つ等価効用水準である。

$$\int_t^\infty W_t e^{-\delta(\tau-t)} d\tau = W_t / \delta = \int_t^\infty u(c_\tau*,\ s_\tau*)\, e^{-\delta(\tau-t)} d\tau$$

第 1 式は計算上[3)]，第 2 等式は定義により成立する。

さて我々は $W_t = CH_t$ を示す必要がある。これを W_t と CH_t が同じ微分方程式に従うことによって示そう。直上式の右方の等式を微分して

$$dW_t / dt = \delta[-u(c_t*, s_t*) + W_t] \tag{1.6}$$

3)　永遠に W_t という配当を受け取る株式の割り引きされた資本価値が W_t / δ であることと似ている。

それゆえ

$$W_t = u(c_t*, s_t*) + (1/\delta)\, dW_t / dt$$

さてハミルトニアン CH_t に向かおう。$CH_t = e^{\delta t} \cdot H_t$ と（1.4），（1.5）に注意して

$$\begin{aligned} dCH_t / dt &= \sum_i (\partial u / \partial c_i)(dc_i / dt) \\ &\quad + \sum_i (\partial u / \partial s_i)(ds_i / dt) \\ &\quad + \sum_i (d\lambda_{i,t} / dt)(ds_i / dt) \\ &\quad + \sum_i \lambda_{i,t}(d^2 s_i / dt^2) \\ &= \sum_i (-\Sigma\lambda_i \cdot (\partial d_i / \partial c_i))(dc_i / dt) \\ &\quad + \sum_i (\partial u / \partial s_i)(ds_i / dt) \\ &\quad + \sum_i (\delta\lambda_{i,t} - \partial u / \partial s_i - \Sigma\lambda_{k,t} \partial d_k / \partial s_i)\, ds_i / dt \\ &\quad + \sum_i (\lambda_{i,t} \cdot d^2 s / dt^2) \\ &= \delta \sum_i ds_i / dt \cdot \lambda_{i,t} \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$CH_t = u(c_t*, s_t*) + \sum \lambda_{i,t} ds_i / dt$$

を思い起こすと，CH_t は微分方程式

$$CH_t = u(c_t*, s_t*) + (1/\delta)\, dCH_t / dt$$

を満たす。これから求むる結果を得る。 □

こうしてハミルトニアンはヒックス的国民所得の測度の自然な候補となる。ここでハミルトニアンの一次近似を取り扱うとさらに便利である。

問題点はハミルトニアンの絶対額が意味をもつのではないことである。重要なことは，ある所与の政策変化がヒックス的所得を増加させるか，減少させるかである。このテストは変化がハミルトニアンの線型近似値を増加させるかどうかである。

方程式（1.7）は，経常価値ハミルトニアンの時間的変化率が，シャドウプライスで評価されたストックの蓄積率に等しいということを述べる。我々は平均的将来効用の価値変化は，シャドウプライスを乗じたストックの蓄積（(1.7) の右辺の表示）に等しいことを知る。

(1.6) から一定の等価効用水準の変化率は，この水準の値と実際の効用水準との差に，割引率を乗じたものに等しいことが分かる。

ハミルトニアンの形は，これが効用に影響するフローの関数と，富の変化の測度を含む((1.7) の次の式) ことを我々に示す。そして，価格変化により生まれるストックの資本利得は，ここに現れないことに注意しよう。

1.5　線型化されたハミルトニアン

次に我々は，経常価値ハミルトニアンの一次近似（これを LCH_t と呼ぶ。）を調べる。これはヒックス的国民所得の測度として解釈されうる。

$$\begin{aligned} LCH &= \sum_j (\partial u / \partial c_j)\, c_j + \sum_j (\partial u / \partial s_j)\, s_j \\ &\quad + \sum_i \lambda_{i,t} (\sum_i (\partial d_i / \partial c_j)\, c_j + (\sum_k \partial d_i / \partial s_k)\, s_k) \\ &= \sum_j c_j [(\partial u / \partial c_j) + \sum_i \lambda_{i,t} (\partial d_i / \partial c_j)] \\ &\quad + \sum_i s_i [(\partial u / \partial s_i) + \sum_k \lambda_{k,t} (\partial d_k / \partial s_i)] \qquad (1.11) \end{aligned}$$

線型化されたハミルトニアンは，経済のあらゆる量――フロー c_j と，ストック s_i ――に，その量の効用に対する限界的寄与や，ストックの成長に対するその限界的寄与で表される，その社会的価値を乗じたものである。$\Sigma c_j [(\partial u / \partial c_j) + \Sigma \lambda_{i,t} (\partial d_i / \partial c_j)]$ の項は，消費フローに対しその限界効用 $(\partial u / \partial c_j)$ および，消費の増加がストックの成長率に及ぼす負の影響で測られる消費の機会費用 $\Sigma \lambda_{i,t} (\partial d_i / \partial c_j)$ を乗じたものの和である。また（1.11）の最後の等式の第 2 項も同様の取り扱いをしている。

我々は今や，線型化された経常価値ハミルトニアンとヒックス的国民所得の関係を示す段階に至った。この関係は，線型化されたハミルトニアンが，国民のストックに対する実質収益に等しくなっていることを示す。我々は，以下の命題 2 で線型化された経常価値ハミルトニアンの表現は，ストックの各項に，価格の変動がホテリングルール（資源価格が利子率の比率で上昇すること）から乖離する部分という収益の大きさを乗じたものであること，言い換えるとストックのシャドウプライスの和であることを見出すであろう。

命題 2

制約条件 $\dot{s}_{i,t} = d_i(c_t, s_t)\,(i = 1, \cdots, n)$ の下で，$\int_0^\infty u(c_t, s_t)\, e^{-\delta t} dt$ を最大化するように動く経済を考える。そのとき線型化された経常価値ハミルトニアンは経済のストックに対する収益，言い換えると時間 t におけるシャドウプライスに，割引率マイナス時間 t におけるシャドウプライスの変化率を乗じて表現したストックの価値に等しい。

$$NI_t = \sum s_{i,t} \lambda_{i,t} (\delta - \dot{\lambda}_{i,t} / \lambda_{i,t})$$

（証明）

線型化された経常価値ハミルトニアン LCH（1.11）式の第 2 表現に注目しよう。ここで第 1 項は最適化の一次条件によってゼロに等しい。また（1.5）を用いて

$$\begin{aligned} LCH &= 0 + \sum_i s_i[(\partial u / \partial s_i) + \sum_k \lambda_{k,t}(\partial d_k / \partial s_i)] \\ &= \sum_i s_i(-\dot{\lambda}_{i,t} + \delta\lambda_{i,t}) \\ &= \sum_i s_i\lambda_{i,t}(\delta - \dot{\lambda}_{i,t} / \lambda_{i,t}) \end{aligned} \qquad \square$$

この結果は，ヒックス的所得とハミルトニアンの間の関係を明らかにする。線型化された経常価値ハミルトニアンは，ストックに対する収益としてのヒックス的所得概念と同値である。消費フローはこの表現には登場しない。

枯渇性資源のホテリングモデルの場合，シャドウプライスの成長率が割引率に等しいので，ヒックス的所得は最適成長経路に沿ってゼロとなることに注意しよう。(この含意は後述する)

ストックの価値に対し適用される収益率の計算が，この結果のカギとなる。すなわち，割引率 δ マイナスこのストックのシャドープライス の変化率・$\dot{\lambda}_{i,t} / \lambda_{i,t}$ で与えられる項が重要である。

ヒックス的国民所得の計算に出てくる調整された収益の項について，2つの解釈ができる。一つの解釈は，第 j ストックを購入できる能力について表現する割引率として，すなわち，そのストックの価格変化だけデフレートされるべき割引率としてである。他の解釈は，そのストックの実質収益率としてである。シャドウプライス変化の表現として，(1.5) から次式が与えられる。

$$\dot{\lambda}_{i,t} / \lambda_{i,t} + 1 / \lambda_{i,t}[\partial u(c_t, s_t) / \partial s_i + \sum_k \lambda_{k,t}\partial d_k(c_t, s_t) / \partial s_i] = \delta \qquad (1.12)$$

左辺全体は第 i ストック 1 単位のもたらす総収益である。第 1 項はキャピタルゲインであり，第 2 項はストックの追加的一単位のもたらす直接的効用プラス全ゆるストックの成長（にシャドウプライスを乗じたもの）に対する貢献を表す。第 2 項が実質収益である。これらの項は，経済で使用されるストックの増分に対する収益を表現する。

各時点において，ストックの価値に適用される収益率 $\delta - \dot{\lambda} / \lambda$ は，実質収益である。持続状態においては $\dot{\lambda} = 0$ より，これは割引率 δ に一致する。カギとなる点は，もし割引率が実質収益を超えているなら，すなわち，$\dot{\lambda}_{i,t} / \lambda_{i,t} > 0$ となっているなら，命題 2 の示す NI の第 1 項である $\Sigma s_{i,t}\lambda_{i,t}\delta$ は，経済のストックから得られる実質収益を超えている。そこでこの 2 つの収益の差だけ国民所得の大きさは下方へ調整がなされなければならないのである。

この結果は，ヒックス的国民所得――所得とは資本を減少させることなく消費可能な最大額，すなわち資本の収益という概念――と精神において同じである。

消費とヒックス的国民所得

ヒックス的国民所得における消費フローは，ハミルトニアンの表現には登場するけれども，

線型化においては相殺されて現れない。これは消費フローが重要でないからではなく，消費フローがハミルトニアンを最大化するように選ばれるから，消費フローに関するハミルトニアンの微分がゼロになることによるのである。

(1.4) は，消費フローの増大からの便益が，限界においてはストックの蓄積の減少という観点からのコストと丁度相殺されることを意味する。これがことの真相である。つまり，消費は限界効用という便益をもたらすが，反面で資源の減耗あるいは資源蓄積の減少，そして将来のより低い消費を導くという点からは費用をもつ。こうして，消費変化は厚生を改善しないことを意味している。

要約すれば，最適経路に沿って，ハミルトニアンを最大化するように選択された変数 c は，定義上，ハミルトニアンの一次近似型には現れない。これがホテリングモデルにおいて，最適経路に沿ってヒックス的国民所得の測度が，常にゼロとなる理由を説明する。

しかしこのことは，その経路に沿って効用がゼロであることを意味するのではない。前に述べたように，国民所得の水準は任意である。重要なのは国民所得が変化する方向に関してだけである。

これら対して別の国民所得の解釈――国民福祉，または分離起平面アプローチの一般化――において，国民所得は消費水準に依存する。そして，経済の資源の減耗を反映するマイナス項を含まないことが示されるだろう。

1.6　ヒックス的所得と資源

ここで前節で述べた，ヒックス的国民所得の結果の，資源依存的経済への適用例を検討する。

枯渇性資源を含む経済モデル

枯渇性資源減耗モデルにおいて，効用関数が加法的 $u(c_t, s_t) = u_1(c_t) + u_2(c_t)$ の功利主義者のフレームワークに従い $\max \int_0^{\infty} u(c_t, s_t)\, e^{-\delta t} dt \ s.t\ \dot{s}_t = -c_t$ の経常価値ハミルトニアンは，次のようである。

$$CH_t = u_1(c_t) + u_2(s_t) - \lambda_t c_t$$

経常価値ハミルトニアンの線型近似は

$$HNI_t = c_t u_1'(c_t) + s_t u_2'(s_t) - c_t \lambda_t$$

であり一次条件 $\partial CH_t / \partial c_t = u_1'(c_t) - \lambda_t = 0$ を用いて

$$HNI_t = s_t u_2'(s_t)$$

HNI（ヒックス的国民所得）の値は，ストックの与える限界効用で評価した，資源ストックからのサービスフローの現在価値に等しい。

定常状態解においては，$\dot{\lambda} - \delta\lambda = -\partial CH / \partial s = -u_2'(s)$ で $\dot{\lambda} = 0$ とおき，$\delta\lambda = u_2'(s_t)$ また

は，$\partial CH / \partial c = u_1' - \lambda = 0$ より

$$u_2' = \delta u_1'$$

定常状態 s^* において NI を

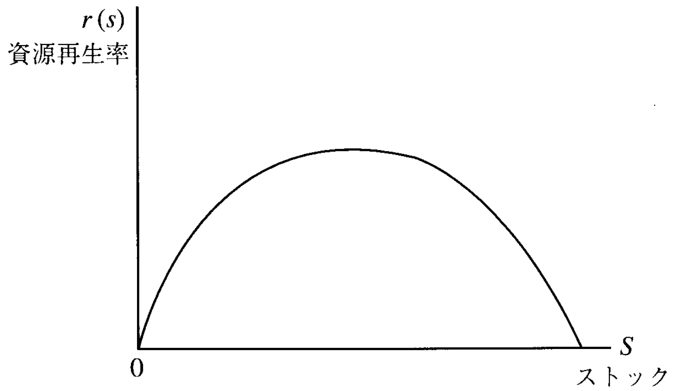
$$HNI = \delta s^* \lambda \tag{1.13}$$

と書くことができる。これはストックのシャドウ価値に割引率を乗じたものである。これは資本ストックからのフローサービス価値が所得に等しいという伝統的所得の定義である。定常状態を外れると，対応する方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} HNI_t &= \partial CH / \partial c_t \cdot c_t + \partial CH / \partial s_t \cdot s_t \\ &= \partial CH / \partial s_t \cdot s_t = -(\dot{\lambda}_t - \delta \lambda_t)\, s_t \\ &= (\delta - \dot{\lambda} / \lambda)\, \lambda_t s_t \end{aligned} \tag{1.14}$$

資源の消費からの効用フローは，HNI に全く寄与しない。資源消費からの $c_t u_1'(c_t)$ の価値は，資源ストック減耗を説明する項 $\lambda_t c_t$ と完全相殺されるからである。ストックのみが計算されるのである。どのようなストック変化も HNI に記録され，定常状態ではフローのシャドウプライスに割引率を乗じたもので評価されねばならない。

再生可能資源を含むモデル



図—2

再生可能資源の場合，$\max \int_0^\infty u(c_t, s_t)\, e^{-\delta t} dt$

$$s.t. \quad \dot{s}_t = r(s_t) - c_t$$

より経常価値ハミルトニアンは次の形になる。

$$CH_t = [u_1(c_t) + u_2(s_t)] + \lambda_t [r(s_t) - c_t]$$

$\partial CH_t / \partial c_t = u_1'(c_t) - \lambda_t = 0$ より

$$\begin{aligned} HNI_t &= \partial CH_t / \partial c_t \cdot c_t + \partial CH_t / \partial s_t \cdot s_t \\ &= [u_2'(s_t) + \lambda_t \cdot r'(s_t)] s_t \end{aligned}$$

再び c_t の項は c の最大化条件により相殺される。また $\dot{\lambda}-\delta\lambda=-\partial CH/\partial s_t$ より

$$=-s_t[\dot{\lambda}-\delta\lambda]=s_t\lambda_t[\delta-\dot{\lambda}_t/\lambda_t]$$

再び HNI の表現において，ストックに関わる項だけしか現れない。

国民所得と再生可能資源と資本蓄積

最後に，再生可能資源に加え生産と資本蓄積を導入した場合を考えよう。

再生可能資源が生産への投入物 σ_t として利用される場合を考える。功利主義者の問題は次の形である。

$$\max\int_0^\infty u(c_t,s_t)\,e^{-\delta t}dt$$

$$s.t.\quad \dot{k}=F(k_t,\sigma_t)-c_t$$

$$\dot{s}_t=r(s_t)-\sigma_t \qquad s_t\geqq 0$$

ここで $F(k_t,\sigma_t)$ は生産関数である。また $r(s_t)$ は再生資源成長関数である。このとき，経常価値ハミルトニアンは次の形になる。

$$CH=u(c,s)+\lambda[F(k,\sigma)-c]+\mu[r(s)-\sigma]$$

c と σ の選択についての一次条件である次式

$$\partial CH/\partial c=u_c{}'-\lambda=0$$

$$\partial CH/\partial\sigma=\lambda F_\sigma-\mu=0$$

を考慮に入れて，線型化された経常価値ハミルトニアン，またはヒックス的国民所得を求めると，

$$HNI=\partial CH/\partial c\cdot c+\partial CH/\partial s\cdot s+\partial CH/\partial\sigma\cdot\sigma+\partial CH/\partial k\cdot k$$

$$=(u_s+\mu r')s+\lambda F_k\cdot k$$

上式にシャドウプライスの行動を記述する次の微分方程式

$$\dot{\lambda}-\delta\lambda=-\lambda F_k$$

$$\dot{\mu}-\delta\mu=-u_s-\mu r'$$

を代入して次式を得る。

$$HNI=k\lambda(\delta-\lambda/\dot{\lambda})+s\mu(\delta-\dot{\mu}/\mu) \tag{1.15}$$

この式から，国民所得はシャドウプライスで評価した資本及び再生可能資源ストックへの収益となる。収益率は［割引率（−）ストックのシャドウプライスの変化率］である。以前と同様，消費と資源フローの項が欠落していることは，閉鎖経済において，資源消費からの便益と資源を失うことのコストが丁度相殺されることを意味している。これらの項が重要でないことを意味するのではない。

第2節　国　民　福　祉

ここで，我々は国民所得への第2のアプローチに向かう。これはある変化が経済厚生の増加に結びつくかどうかを判定するのに，分離超平面を定義する価格を用いる方法である。異時的文脈において，この測度は over time での消費の現在価値を与える。そして所得というよりはむしろ富の概念に対応している。そこでヒールはこの概念を，国民福祉または国富を表現するという観点から NW（National Wealth）と名付ける。

このアプローチは，ヒックス的アプローチにおいて見受けられる直感に反する幾つかの点を避けることができる。

2.1　数学的枠組み

分離超平面アプローチによって，国民福祉または国富を測定する原理をみるための数学的フレームを以下のように設定する。

資源ストック変化率に関する次の方程式の下で，

$$\dot{s}_{i,t} = d_i(c_t, s_t) \quad i = 1, \cdots, n$$

割引きされた効用積分を最大化する。

$$\max \int_0^\infty u(c_t, s_t)\, e^{-\delta t} dt$$

この問題を解くため，前章で述べたようにハミルトニアンを作り，最適性の一次条件から (1.4) 式と (1.5) を求める。

無限時間視野を含む問題での分離超平面の議論をするために，関数 $d_i(c_t, s_t)$, $i = 1, \cdots, n$ は，実行可能経路 $c_{j,t}$, $s_{i,t}$ が有界になるようなものであると限定しよう。

前節，資本蓄積と再生可能資源を含むモデルにおいて

(i)　$u(c, s)$ が凹，増加，微分可能関数である。また，殆どすべての t に対し c 及び s に関し連続，かつ，全ての c, s の値に対し，t に関し可測とする。

(ii)　$r(0) = 0$, ある $\bar{s} > 0$ が存在して，$s > \bar{s}$ なる任意の s に対し $r(s) = 0$, $\max r(s) < b_1 < \infty$, $r(s)$ は $s \in [0, \bar{s}]$ について凹。

(iii)　任意の σ に対して $F(k, \sigma) < b_2(\sigma)$ なる $b_2(\sigma)$ が存在する。これは，資源投入量 σ によって生産物の大きさが $b_2(\sigma)$ に抑えられることを意味する。

(iv)　$|\dot{s}| \leq b_3$ なる $b_3 < \infty$ が存在する

(v)　$|\dot{k}| \leq b_4$ なる $b_4 < \infty$ が存在する。

(ii) は図－2のような資源増加関数を仮定すること，(iv) (v) は，資源ストックも，資本

ストックも無限量の増減が出来ないことを要求する。このもとで資源ストック s も，消費 c も有界となる。従って s の経路（関数）も c の経路（関数）も測度 $e^{-\delta t}$ に対し可測である。すなわち，この仮定の下で，効用を含むすべての変数の経路は，その積分が有界となる。すなわち，任意の i, j について

$$\int_0^\infty c_{j,t}\, e^{-\delta t} dt < \infty,\ \int_0^\infty s_{i,t}\, e^{-\delta t} dt < \infty \tag{2.1}$$

ここで $c_{j,t}$ や $s_{i,t}$ は時間に関する実数値関数である。それゆえ，ストックや消費水準の可能経路の空間を，ウェイトづけられた l_∞ 空間とみなすことができる。関数 $f(t)$ のノルムを

$$\|f\| = \sup_t \left| f(t)\, e^{-\delta t} \right|$$

とし，関数 $f(t)$ と $g(t)$ の内積を

$$< f, g > = \int_0^\infty f(t)\, g(t)\, e^{-\delta t} dt \tag{2.2}$$

とする。

実行可能経路 (c_t, s_t) の集合 S は閉でノルムが有界な空間である。それ故，バナッハ＝アラオグレーの定理（ルーエンバーガー「関数解析による最適理論」p129）より，＊弱コンパクトである（S 内の無限列 (c_t, s_t) が＊弱収束する）。ルベークの有界収束定理から S はその内積のもとでコンパクトになる。従って $W = \int_0^\infty u(c_t, s_t)\, e^{-\delta t} dt$ という写像が (c_t, s_t) の集合 S から R への連続写像なら W は S 上で最大値

$$W^* = \int_0^\infty u(c_t^*, s_t^*)\, e^{-\delta t} dt = \max \int_0^\infty u(c_t, s_t)\, e^{-\delta t} dt$$

をとる4)。

集合 S に対する支持超平面は，次のような関数 $h(t)$ によって与えられる。任意の $s(t) \in S$ に対し，

$$< s(t),\ h(t) >= \int_0^\infty s(t) h(t)\, e^{-\delta t} dt > 0 \tag{2.3}$$

もし関数 $s(t)$ がベクトル値関数 $s(t)$: $R \to R^n$ なら，$h(t)$ もベクトル値 $h(t)$: $R \to R^n$ となる。

最適経路の集合を，実行可能経路と分離する超平面を定めるベクトルは，ストックとフローに対する価格の時間経路 $p_{c,j}(t)$，$p_{s,i}(t)$ であり，以下の条件を満たす5)。

4) W が Lp 内で連続となる必要十分条件は，Chichilnisky [1] により以下の様に与えられている。
$|u(c_t,\ s_t)| \leq a(t) + b(c_t)^p$
ただし $a(t) > 0,\ \int a(t)\, dv(t) < \infty,\ b > 0$

5) $A = \{(c_t,\ s_t) \in S \mid \int_0^\infty u(c_t,\ s_t)\, e^{-\delta t} dt \leqq \int_0^\infty u(c_t^*,\ s_t^*)\, e^{-\delta t} dt = W^*\}$ ↗

$$\int_0^\infty u(c_t,\ s_t)\,e^{-\delta t}dt \geqq \int_0^\infty u(c_t*,\ s_t*)\,e^{-\delta t}dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty [< p_c(t),\ c_t > + < p_s(t),\ s_t >]\,e^{-\delta t}dt$$

$$\geqq \int_0^\infty [< p_c(t),\ c_t* > + < p_s(t),\ s_t* >]\,e^{-\delta t}dt \tag{2.4}$$

かつ［c_t, s_t］が実行可能なら⇒

$$\int_0^\infty [< p_c(t),\ c_t > + < p_s(t),\ s_t >]\,e^{-\delta t}dt \leqq$$

$$\int_0^\infty [< p_c(t),\ c_t* > + < p_s(t),\ s_t* >]\,e^{-\delta t}dt \tag{2.5}$$

ここで $<p_c(t),\ c_t>$ は価格ベクトル $p_c(t)$ と消費ベクトル c_t の内積を示す。

(2.4) は，価格 $p_{c,j}(t)$, $p_{s,i}(t)$ の下で，少なくとも最適経路と同じくらいよいいかなる経路も，少なくとも最適値と同じ現在価値を持つことを示す。

(2.5) は，いかなる実行可能経路も，価格 $p_{c,j}(t)$, $p_{s,i}(t)$ の下で最適経路以下の現在価値しか持たないことを述べる。

定義

(2.4) (2.5) を満たす価格 $p_{c,j}(t)$, $p_{s,i}(t)$ の集合は，最適価格と呼ばれ，以下のような厚生概念を定義するのに用いられる。

最適経路に沿った国民福祉を，

$$\int_0^\infty [< p_c(t),\ c_t* > + < p_s(t),\ s_t* >]\,e^{-\delta t}dt$$

とする。

我々は，この現在価値厚生測度を増加させるいかなる小さな変化も，厚生の改善となることを示す。

次の命題は最適価格の集合を特徴付ける。

命題 3

最適経路に沿っての効用関数の微分で定義される価格系列，すなわち任意の j, i, t に対し

$$[p_{c,j}(t),\ p_{s,i}(t)]$$
$$= [\partial u(c_t*,\ s_t*] / \partial c_{j,t},\ \partial u(c_t*,\ s_t*) / \partial s_{i,t}]$$

は最適価格の集合を構成する。

$$B = \{(c_t,\ s_t) \in S \mid W* = \int_0^\infty u(c_t*,\ s_t*)\,e^{-\delta t}dt \geqq \int_0^\infty u(c_t,\ s_t)\,e^{-\delta t}dt\}$$

としたとき，A, B は S の空でない凸集合，$A \cap B = \phi$。A が開，B が閉とすると A と B を分離する閉じたアフィン超平面 Λ が存在し，$x \in A$, $y \in B$ のとき $\Lambda(x) \leqq W* \leqq \Lambda(y)$ とできる。この超平面の内積を決めるベクトルが［$p_{c,j}(t)$, $p_{s,i}(t)$］となる。

（証明）

これらの価格が（2.4）（2.5）を満足することを示そう。以下のような経路 (c_t, s_t) を考える。

$$\int_0^\infty [u(c_t,\ s_t) - u(c_t*,\ s_t*)]\, e^{-\delta t} dt \geqq 0 \tag{2.6}$$

（2.4）のためには次式が成立することが必要である。

$$\int_0^\infty [< p_c(t),\ c_t > + < p_s(t),\ s_t >]\, e^{-\delta t} dt$$
$$\geqq \int_0^\infty [< p_c(t),\ c_t* > + < p_s(t),\ s_t* >]\, e^{-\delta t} dt$$

最適経路に沿った (c_t^*, s_t^*) において，$u\,(c_t, s_t)$ への線型近似をとる。さらに効用関数の凹性を用いて

$$\begin{aligned} & u(c_t,\ s_t) - u(c_t*,\ s_t*) \\ & \quad \leqq \sum_j [\partial u(c_t*,\ s_t*) / \partial c_{j,t}](c_{j,t} - c_{j,t}^*) \\ & \qquad + \sum_i [\partial u(c_t*,\ s_t*) / \partial s_{i,t}](s_{i,t} - s_{i,t}^*) \\ & \quad = \sum_j p_{c,j}(t)(c_{j,t} - c_{j,t}^*) \\ & \qquad + \sum_i p_{s,i}(t)(s_{i,t} - s_{i,t}^*) \end{aligned}$$

を得る。これは（2.6）と合わせて求める不等式（2.4）を与える。

不等式（2.5）を確立するために，価格［$p_{c,j}(t)$, $p_{s,i}(t)$］の下での現在価値を最大化するプログラムを選択する問題を考えよう。

$$\max \int_0^\infty [p_c(t) \cdot c_t + p_s(t) \cdot s_t]\, e^{-\delta t} dt$$
$$\dot{s}_{i,t} = d_i(c_t,\ s_t) \quad i = 1,\ \cdots,\ n$$

対応するハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H = & [< p_c(t),\ c_t > + < p_s(t),\ s_t >]\, e^{-\delta t} \\ & + \sum \mu_{i,t} e^{-\delta t} d_i(c_t,\ s_t) \end{aligned}$$

である。一次条件より

$$\partial H / \partial c_j = p_{c,j} + \sum_i \mu_{i,t} \partial d_i / \partial c_j = 0$$

よって

$$p_{c,j}(t) = -\sum \mu_{i,j} [\partial d_i(c_t,\ s_t) / \partial c_j]$$

また

$$\dot{\mu}_{i,t} - \delta\mu_{i,t} = -\partial e^{\delta t} H / \partial s_i$$
$$= -p_{s,i}(t) - \sum \mu_{k,t}[\partial d_k(c_t,\ s_t)/\partial s_i]$$

が成立する。これらの条件は命題の条件のように $p_c(t)$, $p_s(t)$ を与えたとき（1.4）（1.5）の条件と同一である。後者は（1.1）の制約の下で（1.2）を最大化する最適化問題の解を特徴付けるものである。したがって，最適化問題を解いてえられる経路は，最適価格の下で経路の現在価値を最大化する問題を解いてえられるものと同一である。□

こうして効用関数のストックやフローに関する微分は，最適経路の集合を実行可能経路の集合から分離する超平面を定義するのに用いられる。次の系によりこれらの最適価格の下で，正の現在価値を持つ経路の任意の小さな変化は，国民福祉を増大させることが明らかになる。

系　$(\Delta c_t,\ \Delta s_t)$ を最適経路 $(c_t^*,\ s_t^*)$ の周りの小さな変動とする。それが最適価格［$p_{c,j}(t)$, $p_{s,i}(t)$］の下で，正の現在価値を持つなら，この変動は厚生の増加を導く。

逆に，最適経路の周りの小さな変動が厚生の増加を導くなら，それは最適価格［$p_{c,j}(t)$, $p_{s,i}(t)$］の下で正の値を持つ。

（証明）仮定により

$$\int_0^\infty [<\Delta c_t,\ p_c(t)> + <\Delta s_t,\ p_s(t)>]\, e^{-\delta t} dt > 0 \tag{2.7}$$

経路 $(\Delta c_t + c_t^*,\ \Delta s_t + s_t^*)$ を最適経路の変動を意味するとしよう。この経路のもつ厚生は，経路が $(c_t^*,\ s_t^*)$ から $(\Delta c_t,\ \Delta s_t)$ だけ変化しているので，一次近似をとると

$$u(c^* + \Delta c,\ s^* + \Delta s) = u(c^*,\ s^*) + u_c \Delta c + u_s \Delta s$$

ゆえ

$$\int_0^\infty [u(c_t^*,\ s_t^*) + \sum_j \partial u(c_t^*,\ s_t^*)/\partial c_{j,t} \Delta c_{jt}$$
$$+ \sum_i \partial u(c_t^*,\ s_t^*)/\partial s_{i,t} \Delta s_{it}]\, e^{-\delta t} dt$$
$$= \int_0^\infty [u(c_t^*,\ s_t^*) + \sum_j p_{cj}(t) \Delta c_{it}$$
$$+ \sum_i p_{s,i}(t) \Delta s_{it}]\, e^{-\delta t} dt$$

と表される。(2.7) よりその値は最適経路の厚生より大きい。　□

2.2　国民福祉と資源

ここで国民所得の２つの定義，すなわちヒックス的国民所得と国民福祉の関連について検討しよう。まず資源ベースの経済に関する国民福祉の分析から始める。

ホテリングケースの国民福祉とヒックス的所得

ここでホテリングの取り上げた次のケースの国民福祉の現在価値を考察する。

$$\max \int_0^\infty u(c_t)e^{-\delta t}dt$$

$$s.t \quad \int_0^\infty c_t dt = s_0$$

この場合の国民福祉の現在価値 $PVNW$ は，次式で測定される。

$$PVNW = \int_0^\infty c_t * \cdot u'(c_t*)\, e^{-}$$

$u'(c_t*)\, e^{-\delta t} = p_0 =$ 一定に注意するとこの式は，初期ストックにシャドウプライスを乗じた値に等しいことが知れる。

$$PVNW = p_0 s_0$$

経済が達成できる福祉は初期ストックとその社会的価値とに依存する。これは，富の合理的な測度である。

この場合のヒックス的国民所得の値はいかなる大きさになるだろうか。ハミルトニアンは，

$$H = u(c_t)\, e^{-\delta t} - e^{-\delta t} p_t \cdot c_t$$

それゆえ，線型化されたハミルトニアンは

$$LH = \partial H / \partial c \cdot c = e^{-\delta t}[u'(c_t) - p_t]\, c_t = 0$$

となりヒックス的所得の現在価値もゼロとなる。この場合，ハミルトニアンに依存する国民所得のヒックス的測度はゼロとなり，一方国民福祉的測度は資源の初期ストックのシャドウ価値となる。

こうしてホテリングケースでは，ヒックス的所得はゼロであるが，国民福祉は正であり，その値がストックと効用関数に依存する。そして資源ストックが２倍に増加すれば，福祉的測度の値も増加するが，ヒックス的所得の方はその場合でも値はゼロのままであることがわかる。

再生可能資源と国民福祉

次の問題を取り上げよう。

$$\max \int_0^\infty u(c_t, s_t)\, e^{-\delta t} dt$$

$$s.t. \quad \dot{s}_t = r(s_t) - c_t$$

ハミルトニアンを作ると

$$H = u(c_t,\ s_t)\, e^{-\delta t} + \lambda_t e^{-\delta t}[r(s_t) - c_t]$$

となる。この経路に沿っての国民福祉は $(c_t^*,\ s_t^*)$ を最適解として

$$NW = \int_0^\infty [u_c(c_t*,\ s_t*)\, c_t + u_s(c_t*,\ s_t*)\, s_t]\, e^{-\delta t} dt > 0$$

この問題に対するヒックス的所得 HNI は

$$HNI_t = \partial CH / \partial c \cdot c + \partial HC / \partial s \cdot s = [(\partial CH / \partial s) / \lambda_t] \lambda_t s_t$$
$$= [\delta - \dot{\lambda}_t / \lambda_t] s_t \lambda_t$$

ここで λ_t は，資源蓄積制約のシャドウプライスである。

即時的国民福祉測度 NW_t は次のように表される。

$$NW_t = c_t u_c + s_t u_s = c_t \lambda_t + s_t \lambda \{u_s / \lambda\}$$
$$= c_t \lambda_t + s_t \lambda_t \{\delta - r' - \dot{\lambda} / \lambda\}$$

定常状態においては $\dot{\lambda} = 0$ より，

$$HNI = s_t \lambda_t (\delta - \dot{\lambda} / \lambda) = s_t \lambda_t \delta$$
$$NW_t = c_t \lambda_t + s_t \lambda_t (\delta - r')$$

割引率が 0 になったときの定常解では，

$$HNI = 0, \ NW = c_t \lambda_t - \lambda_t s_t r'(s)$$

となり，両者の違いは（$\delta > 0$ のときも同一であるが）消費フロー（マイナス）ストックの限界生産性で評価したストックの収益となる。

国民福祉と再生可能資源と資本蓄積

最後に，再生可能資源と生産と資本蓄積を含むケースを取り上げる。経済の目的は次のようである。

$$\max \int_0^\infty u(c_t, \ s_t) e^{-\delta t} dt$$
$$s.t. \quad \dot{k}_t = F(k_t, \ \sigma_t) - c_t$$
$$\dot{s}_t = r(s_t) - \sigma_t$$
$$s_t \geqq 0$$

この場合，国民福祉は再び

$$NW = \int_0^\infty [u_c(c_t^*, \ s_t^*) c_t + u_s(c_t^*, \ s_t^*) s_t] e^{-\delta t} dt$$

である。一方ヒックス的国民所得は，経常価値ハミルトニアンが

$$CH = u(c, \ s) + \lambda[F(k, \ \sigma) - c] + \mu[r(s) - \sigma]$$

だから，$HNI = \partial CH / \partial c \cdot c + \partial CH / \partial s \cdot s + \partial CH / \partial \sigma \cdot \sigma + \partial CH / \partial k \cdot k$

$$= (u_s + \mu r') s + \lambda F_k \cdot k$$

となる。資源のシャドウプライス μ_t と資本ストックのシャドウプライス λ_t の動学方程式を

用いて，

$$HNI = (\delta\mu - \dot{\mu})s + (\delta\lambda - \dot{\lambda})\,k$$
$$= k\lambda(\delta - \dot{\lambda}/\lambda) + s\mu(\delta - \dot{\mu}/\mu)$$

とあらわせる。

即時的国民福祉 NW_t は，

$$NW_t = u_c \cdot c_t + u_s \cdot s_t$$
$$= \lambda_t c_t + \mu_t \{u_s / \mu_t\}\, s_t$$
$$= c_t \lambda_t + s_t \mu\{\delta - \dot{\mu}/\mu - r'\}$$

こうして，国民福祉はヒックス的国民所得の表現には現れない $c_t\lambda_t$ や $s_t\mu_t r'$ という項を含んでいる。しかし，ヒックス的国民所得は，資本ストックに対する収益の項を含んでいる。そして，即時的国民福祉 NW_t は資本ストックと独立である。

また，定常状態において（$\dot{\lambda}_t = \dot{\mu}_t = 0$ より）かつ割引率がゼロ（$\delta = 0$）なら，再びヒックス的国民所得はゼロとなる。

第3節　要　　約

ここで，これまでの議論を要約しておこう。

(1)　2つの択一的所得概念がある。それは国民所得のヒックス的測度と国民福祉である。前者は動学的最適化問題のハミルトニアンと関連しており，後者は厚生経済学で用いられる分離超平面の一般化である。後者は社会の所得の測度というよりも，社会的富の測度である。

(2)　これらの測度は，経済の目的（目的関数の形，割引率）に依存する。すなわち，異なる目的関数や異なる割引率をもつ国は，異なる国民所得の値を持つ。ホテリングの資源減耗モデルは，ヒックス的測度と国民福祉的測度の区別を際だたせて示してくれる。ヒックス的国民所得はゼロではあるが，国民福祉，国富は資源の初期ストックに依存する。両方のアプローチにおいて財・サービスのシャドウプライスが同一であるにも関わらず，そうである。

(3)　国民福祉で測られた国民所得の増大は，変数の小さな変化に対しては，厚生の増加を示す。このことは国民福祉が，厚生の真の測度の一次近似であることを意味している。

(4)　ヒックス的国民所得は，物的資本ストック，自然資本ストックによって完全に表わされる。

最後に，上の2つの所得測度に関わる幾つかの実行上の問題点を述べる。

ヒックス的国民所得の測定に際しては，ストックの統計が十分にあることが必要となる。経済のあらゆる面でのストックの正確な測定が重要であることを意味する。その中には，大気

のような地球公共財であるような環境資産のストックの測定も含まれる。これらのことは，まだほとんど取り掛かられていない仕事である。(世界銀行は，物的資本，自然資本，人的資本の国家への貢献分を評価する準備的試みを行っているが……)

国民所得測度を気候変動のような影響が広範囲に及ぶ現象の評価に用いることには注意を払うことが必要であろう。国民所得は厚生変化の局所的測度である。すなわち一次近似である。自然科学的予想によれば，気候変動は今後100～150年の間に，経済環境に非局所的変化をもたらすとみられている。たとえば，多数の国で農業生産物は気候変動のため大幅に下落するとみられる。こうして本論分で取り上げたヒックス的測度，国民福祉的測度いずれの国民所得も，その様な変化の影響を測るのに適当な測度とは言えない。

ヒックス的国民所得測度であるハミルトニアンの値が最適経路上でゼロという値をとるが，これは，経済発展は国民所得の増大であるという通常の観念に対していて，ヒックス的国民所得測度を受け入れ難くしている。

参 考 文 献

[1] Chichilnisky, G, “Nonlinear functional analysis and optimal economic growth”, Jornal of Mathematical Analysis and Applications, 1977, 61(2)

[2] Dasgupta. P., B. Kristrom and K. G. Maler, ‘The Environment and Net National Product’ in “Current Issues in Environmental Economics”, Manchester Univ.Press 1994

[3] Heal, G., “Valuing the Future: Economic Theory and Sustainability”, Columbia Univ. Press, 2000

[4] Hicks, J. R., “Value and Capital”, Clarendon Press, 1939,（安井琢磨，熊谷尚夫訳『価値と資本』岩波書店）

[5] Luenberger, D. G, “Optimization By Vector Space Methods”, 1969（増淵正美・嘉納秀明訳『関数解析による最適理論』コロナ社）

[6] 丸山徹『数理経済学の方法』創文社1995

[7] Weitzman, M. L. ‘On the welfare significance of the net national product in a dynamic economy’, Quartery Journal of Economics, 1976, 90

〈付記〉 本稿は科学研究費補助金（課題番号 12630029）の研究成果の一部である。